目　　次

【附錄】(Appendix)

銜接教材的導讀

在國中的課程中，同學們學過「數與量」、「代數」、「圖形與空間」和「統計與機率」等主題的題材。進入高一之後，將要就「數與坐標系」、「數列與級數」、「多項式」、「指數與對數」、「三角函數的基本概念」和「三角函數的性質與應用」等六大主題做更深入的學習，而這些主題是需要用在國中階段的學習成果來做預備知識。由於暫行綱要能力指標和各版本課程設計的緣故，使得在銜接高中一年級數學課程中或許有不順暢之處。

我們以同學們的學習經驗及高中一年級課程的內涵爲考量，來製作這本教材，希望能協助同學們順利銜接高中課程的學習。在教材中，「乘法公式」、「因式分解」、「平方根」、「一元二次方程式」、「數列與級數」和「函數」等六個單元是高一上學期必要的預備知識。例如：高一第一章「數與坐標系」，就需要用同學們在國中所學的平方根、一元二次方程式解的判別式、二元一次方程式等來做預備知識。至於在附錄中的「立方根與高次方根」、「一元二次方程式的根與係數關係」、「不等式與集合」、「平面幾何的基本性質」與「三角函數的基本概念」等五個單元，則是延伸性的知識。我們鼓勵同學們能自我學習，這將會更有助於高中數學的學習。

進入銜接單元之前，我們先用以下幾個主題來介紹高中課程常用的數學概念或名詞，以及銜接教材和高中課程間的關聯。

【數系的擴展】

在國中的課程裡，數的學習是由正整數、正分數、正小數和零，擴展至負整數、負分數和負小數。在數學上，凡是能寫成兩個整數相除的數稱爲「**有理數**」(Rational Number)，其中除數不爲零。同學們所學過的整數、分數和有限小數當然都是有理數。

此外，在小數中，可分爲有限小數和無限小數，而且無限小數又分成循環的無限小數（簡稱循環小數），如：$0.3333\cdots$(記作$0.\overline{3}$)、$1.2525\cdots$(記作$1.\overline{25}$)、$\cdots$等，和不循環的無限小數兩種類型。

在高中課程的「等比級數」單元中，會藉由無窮等比級數來說明循環小數也可用分數來表示，例如：$0.3333\cdots=0.\bar{3}=\frac{1}{3}$，$-1.111\cdots=-1.\bar{1}=-\frac{10}{9}$。因此，循環小數也是有理數。

那麼，不循環的無限小數應歸在數系裡的那一類呢？在數學裡，將不爲有理數的數統稱爲「**無理數**」(Irrational Number)。也就是說，不循環的無限小數就是無理數。在高一上學期第一章中，同學們將要學習如何證明$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$等平方根爲無理數。此外，圓周率$\pi=3.14159\cdots$也是無理數。

再者，在數學上，將有理數和無理數統稱爲「**實數**」(Real Number)，並常以英文大寫字母「$\boldsymbol{R}$」來代表實數，「$\boldsymbol{Q}$」代表有理數，「$\boldsymbol{Z}$」代表整數，而以「$\boldsymbol{N}$」代表正整數(或稱自然數)。

在銜接教材中，我們會使用整數、分數、有理數和實數這些名詞來描述數的屬性，以協助同學們提早適應。此外，我們會用「**非負數**」來表示大於零，或等於零的數；同樣的，用「**非正數**」來表示小於零，或等於零的數。

除了實數，高中的課程再將數系的學習擴展到「**複數**」(Complex Number)。在數學上，以$a+bi$（a、b皆爲實數）來表示複數，其中$i^2=-1$。由於複數的引進，使得國中階段所討論的一元二次方程式都會有解。也就是說，以前我們說某些一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$在判別式$b^2-4ac<0$時，沒有解，應該是說此方程式沒有實數解。例如：方程式$x^2+x+1=0$的判別式$b^2-4ac=1-4=-3<0$，而它確實有兩個複數解$x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$。

【乘法公式與因式分解】

同學們在國中所學的乘法公式與因式分解都是建構在二項式乘積、完全平方及平方差公式，所以多項式的主題僅侷限於一次、二次多項式。由於缺乏立方公式

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \text{ ；}$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \text{ ，}$$
的學習，在國中課本中很少出現三次以上的多項式。國中老師或許會補充，但一般來說，同學們對$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$、$x^3 + 1$、$x^4 - 1$等常見的高次多項式就較為陌生。然而在高中課程之中，將會經常使用到三次以上多項式的乘、除運算、因式分解、求根等，因此，同學們要加強三次以上多項式間的加、減、乘、除四則運算的熟練度。

【平方根與高次方根】

對同學們而言，平方根的符號最常出現在一元二次方程式的公式解，或利用畢氏定理(即商高定理)求直角形的某一邊長等問題之中，而且很少有對方根繼續做運算的必要。在高中的課程裡，卻是經常用到方根的加、減和乘法的運算，或者在運算過程中需對含有根號的算式做化簡。同學們也應加強根式運算、化簡以及有理化的熟練度，因為這些概念不只是高一上學期第一章「數與坐標系」的預備知識，也是複數的基本運算模式。

在高中的課程裡，方根的學習也將由平方根擴展到立方根$\sqrt[3]{a}$或$a^{1/3}$，乃至於 n 次方根$\sqrt[n]{a}$或$a^{1/n}$，所以可將指數律的指數由國中階段所學的整數擴展至任意的有理數
$$a^p a^q = a^{p+q} \text{ ； } a^p b^p = (ab)^p \text{ 。}$$
因此，我們在附錄 A1 說明立方根、n 次方根的概念，同學們可以自行參考，來充實高一下學期第一章「指數與對數」的基礎知識。

【推理過程與符號的使用】

數學是一個深具知識結構的科學，在推論的過程中講求「有因方有果」的邏輯。也就是說，我們會在給定的條件下，嘗試去做分析與推論。例如，**若 $x > 1$，則 $x^2 > 1$**。這樣的推論，也常用「**假設(已知、如果或因為) $x > 1$，所以(或因此) $x^2 > 1$**」等形式來表徵。

有時候，我們會用一些符號來簡化這些推論的表徵。例如，以「$\because$」

代表「若」、「假設」、「已知」、「如果」或「因爲」，並以「$\therefore$」代表「**所以或因此**」。以「**因爲 $\boldsymbol{x}>1$，所以 $\boldsymbol{x}^2>1$**」爲例來做說明，我們也可以用「$\because\ \boldsymbol{x}>1$，$\therefore\ \boldsymbol{x}^2>1$」來表徵。

事實上，「因爲 $x>1$，所以 $x^2>1$」應有以下推論過程：

由 $\boldsymbol{x}>1$，若對 $\boldsymbol{x}>1$ 兩邊同乘以 $\boldsymbol{x}$，可得 $\boldsymbol{x}^2>\boldsymbol{x}$。

因此，由遞移律，可得 $\boldsymbol{x}^2>\boldsymbol{x}>1$。

我們常用箭頭符號「$\Rightarrow$」來表徵「由左向右」或「由上向下」推論的順序。因此，上述的推論過程可寫成：

$$\begin{aligned} x>1 \Rightarrow\ & x^2>x \\ \Rightarrow\ & x^2>1 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} &\because\ x>1>0 \\ &\therefore\ x^2>x \\ &\Rightarrow\ x^2>1 \end{aligned}$$

在代數式的推論過程，我們也常用這樣的寫法。例如：解 $2x^2+5x+2=0$ 時，可以用下列的方式來解題：

$$\begin{aligned} &\because\ 2x^2+5x+2=(2x+1)(x+2)=0 \\ &\Rightarrow\ 2x+1=0\text{，或 } x+2=0 \\ &\Rightarrow\ x=-\frac{1}{2}\text{，或 } x=-2 \end{aligned}$$

因此，在本教材中的某些範例中，我們會在推論的過程中使用這些符號的表徵。

我們將教材中的「乘法公式」、「因式分解」、「平方根」及「一元二次方程式」等單元列爲預備階段，希望進入高一上學期的第一章「數與坐標系」之前，同學們能強化這四個單元的基礎知識，而融入階段的「數列與級數」和「函數」二個單元，乃至於附錄 A3 的「不等式與集合」，則做爲第二章「數列與級數」和第三章「多項式」的基礎知識。

在高中的課程中，平面幾何的基本性質，例如：三角形的內角和、外角和、邊角關係、全等、相似以及三心等性質；平行線的相關性質；圓的

圓心角、圓周角、切線、三角形的內切圓、外接圓等性質，都被視爲基礎知識，我們在附錄 A4 中列出重要的幾何性質，做爲同學們複習的參考，並爲高一下三角函數的學習預做準備。

「多項式函數」、「指數與對數函數」、「三角函數」是高中數學課程中有關函數的三個重要主題，其中三角函數的學習則是建構在國中階段所學的比例與比值、直角三角形、相似三角形、圓心角、圓周角及切線等重要性質。我們建議同學們除了複習 A4 的內容外，也能利用寒假先閱讀附錄 A5-1 的內容而對銳角三角函數有初步的認識，這絕對有助於高一下第二章的學習。我們更鼓勵同學們勇於挑戰 A5-2、A5-3，進一步充實三角函數的基礎知識。

這份教材除了提供給高中做爲銜接教學的參考依據之外，我們希望同學們也能自我學習。因此，在每一個單元中，我們會複習或說明國中階段的學習經驗，再進入銜接的主要內容；除了重要類型的範例之外，並且設有「類題練習」來引導同學再次理解相關範例的概念。在某些單元的家庭作業中，除了基礎的練習題之外，我們也希望同學勇於向進階題挑戰。本教材附有各單元類題練習、想想看及家庭作業的簡答，同學們若需要較詳細的解題過程，可自教育部中教司網站：

http://www.edu.tw/EDU_WEB/Web/HIGH-SCHOOL/index.htm

或國立中正大學數學系網站：

http://www.math.ccu.edu.tw/chinese/index.htm

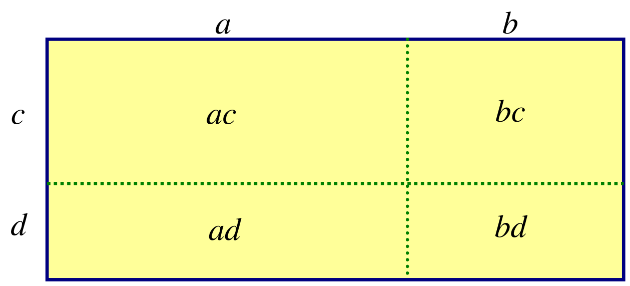
中下載。

一、乘法公式與多項式

1-1 多項式的乘法

【二項式相乘公式】

如下圖，一個長為$a+b$，寬為$c+d$的長方形，其面積為$(a+b)(c+d)$，也等於四個長方形的面積和，即$ac+ad+bc+bd$ 。



我們也可利用分配律來展開$(a+b)(c+d)$的乘積而得到下列的公式：

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd \qquad \text{【公式 1】}$$

在應用上，a、b、c 及 d 可為數字或任何文字符號。

【範例 1】 利用公式 1 展開下列各式：

(1) $(1+a)(1+b)$ (2) $(x+2)(x+3)$ (3) $(2x+y)(3x-y)$

【解】 (1) $(1+a)(1+b)=1\cdot 1+1\cdot b+a\cdot 1+a\cdot b$

$=1+a+b+ab$

(2) $(x+2)(x+3)=x\cdot x+x\cdot 3+2\cdot x+2\cdot 3$

$=x^2+5x+6$

(3) $(2x+y)(3x-y)=(2x+y)[3x+(-y)]$

$=2x\cdot 3x+2x\cdot(-y)+y\cdot 3x+y\cdot(-y)$

$=6x^2-2xy+3xy-y^2$

$=6x^2+xy-y^2$

在上例的第(2)題中，x^2+5x+6的x^2項(或稱**二次項**)係數為 1，x 項(或稱**一次項**)係數為 5，常數項為 6，其中最高次項為二次，所以稱x^2+5x+6為

x 的二次多項式，並簡稱爲**一元二次式**。在第(3)題中，$6x^2+xy-y^2$ 有 x、y 兩個變數，其中 $6x^2$、xy 和 $-y^2$ 都是二次項。因此，它的最高次項爲二次，所以稱它爲 x 和 y 的二次多項式，並簡稱爲**二元二次式**。

【類題練習 1】展開下列各式：

(1) $(5x+2)(2x-3)$　　(2) $(-2x+3y)(3x-4y)$

二項式相乘公式也常運用於來簡化數的計算過程，例如：

求 $123\times279+127\times121+123\times121+127\times279$ 的值。

我們觀察到 123×279 與 123×121 有公因數 123；127×121 與 127×279 有公因數 127，所以

$$\begin{aligned}&123\times279+127\times121+123\times121+127\times279\\&=123\times279+123\times121+127\times279+127\times121\\&=123\times(279+121)+127\times(279+121)\\&=(279+121)\times(123+127)\\&=400\times250\\&=100000\text{。}\end{aligned}$$

【範例 2】展開下列各式：

(1) $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

(2) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

【解】　利用分配律：

(1) $(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

$$\begin{aligned}&=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1\\&=x^6-1\end{aligned}$$

(2) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$$\begin{aligned}&=x^5-x^4+x^3-x^2+x+x^4-x^3+x^2-x+1\\&=x^5+1\end{aligned}$$

【範例 3】 分別求$(3x^2-5x+1)(-2x^3+4x^2-x+3)$的展開式中，$x^5$、$x^3$、$x^2$和$x$的係數。

【解】 利用分配律做展開運算時，只需要觀察兩式中，兩項次數的和等於所要求次數，則其係數乘積的總和即爲所求，因此

x^5的係數爲 $3\times(-2)=-6$；

x^3的係數爲 $3\times(-1)+(-5)\times4+1\times(-2)=-3-20-2=-25$；

x^2的係數爲 $3\times3+(-5)\times(-1)+1\times4=9+5+4=18$；

x的係數爲 $(-5)\times3+1\times(-1)=-15-1=-16$。

【類題練習 2】分別求$(3x^4+x^3-2x^2-5x+1)(-2x^3+4x^2-x+3)$的展開式中，$x^7$、$x^6$、$x^4$、$x$的係數。

【重點整理】

1. 【二項式相乘公式】
   $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$，其中a、b、c及d可爲數字或任何文字符號。
2. 兩多項式相乘，若求部分項的係數時，只需將兩多項式中次數和相等的兩項係數相乘後，再求其和即可。

【家庭作業】

基礎題

1. 展開下列各式：

① $(1+2a)(2-3b)$　② $(-x+5y)(2x-y)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$　④ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

2. 分別求$(x^5+2x^3-5x+1)(3x^5-x^4+2x^3-3x^2-7x+5)$的展開式中，$x^8$、$x^7$、$x^5$、$x^3$、$x$及常數項的係數。

進階題

3. 回答下列各題：

① 若 $(x^3+ax+2)(2x-a)$ 的展開式中，x^3 的係數爲 9，求 a 的值。

② 若 $x(x+1)=3$，求 $(x-1)^2(x+2)^2+3(x-3)(x+4)+5$ 的值。

③ 若 a、b、c 是整數，且 $2x^2+3x+5=a(x-1)^2+b(x-1)+c$，
求 a、b、c 的值。

4. 試證明下列兩式成立：

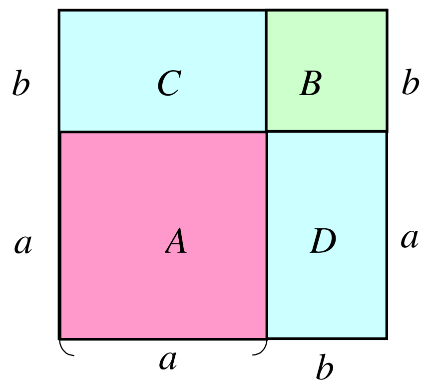
① $(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)=x^n-1$

② $(x+1)(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}-\cdots+x^2-x+1)=x^n+1$，其中 n 是奇數。

1-2 平方公式

多項式的乘法公式除了用來簡化多項式的乘法運算外，還可運用於因式分解。我們首先來複習已經學過的平方公式，然後再延伸到立方公式。

【完全平方公式】



我們觀察到上圖中，邊長爲$(a+b)$的大正方形是由邊長分別爲 a、b 的兩個正方形 A、B，和 C、D 兩個長方形所組合而成，其中 C 的面積爲 ab、D 的面積爲 ba，所以，大正方形的面積等於 A、B、C、D 四個區域的面積總和，也就是說

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+ab+ba \\ &= a^2+b^2+2ab \\ &= a^2+2ab+b^2\text{。}\end{aligned}$$

乘法交換律：
$ba=ab$

因此，我們得到**和的平方公式**：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \qquad \text{【公式 2】}$$

事實上，將公式 1 中的 c、d 分別以 a、b 代入，也可以得到

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b) &= a\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b\cdot b \\ &= a^2+2ab+b^2\text{ 。}\end{aligned}$$

【範例 1】 利用公式 2 展開下列各式：

(1) $(x+1)^2$　　　　(2) $(2x+3y)^2$

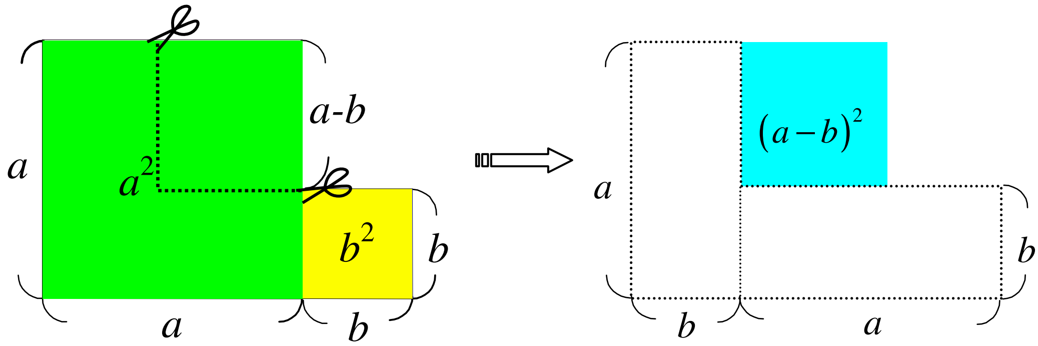
【解】　(1) $(x+1)^2 = x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2$

$$= x^2+2x+1$$

(2) $(2x+3y)^2 = (2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2$

$$= 4x^2+12xy+9y^2$$

有了和的平方公式，是否也有差的平方公式呢？如果在下面的左圖中，我們剪下一個邊長爲$a-b$的正方形，如下圖：



由上面各圖形之間面積的關係，我們知道$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$。

同樣的，若將公式 1 中的 b、c、d 分別以$-b$、a、$-b$ 代入，即可得

$$(a-b)(a-b) = a\cdot a+a\cdot(-b)+(-b)\cdot a+(-b)\cdot(-b)$$

$$= a^2-2ab+b^2，$$

因而得到**差的平方公式**：

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \qquad 【公式 3】$$

其實，只要將公式 2 中的 b 改爲$-b$，也可得到公式 3。

【範例 2】利用公式 3 展開下列各式：

(1) $(x-a)^2$　　　　(2) $(2x-3y)^2$

【解】　(1) $(x-a)^2 = x^2-2\cdot x\cdot a+a^2$

$$= x^2-2ax+a^2$$

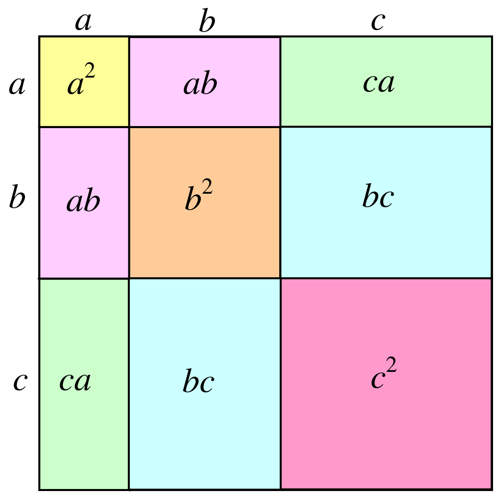
(2) $(2x-3y)^2 = (2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2$

$$= 4x^2-12xy+9y^2$$

我們也常用和或差的平方公式來簡化數的計算，例如：在求 109^2 時，可將 109 寫成 100＋9，再利用公式 2 即可求得：

$$\begin{aligned} 109^2 = (100+9)^2 &= 100^2 + 2\times100\times9 + 9^2 \\ &= 10000 + 1800 + 81 \\ &= 11881 \end{aligned}$$

接著來看三項和的平方公式。由下圖，



我們觀察到，邊長爲$(a+b+c)$的大正方形是由邊長分別爲 a、b、c 的三個正方形，和六個面積分別爲 ab、bc、ac 的長方形所組合而成，所以，大正方形的面積等於這九個區域的面積總和，也就是說

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

此外，我們知道 $a+b+c=(a+b)+c$，所以利用公式(2)即可得到：

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 \\ &= (a+b)^2 + 2\cdot(a+b)\cdot c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

因此，得到**三項和的完全平方公式**：

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \qquad 【公式 4】$$

【**範例 3**】利用公式 4 展開下列各式：

(1) $(x+y+3)^2$　　(2) $(a+2b-3c)^2$

【**解**】(1) $(x+y+3)^2 = x^2+y^2+3^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot 3+2\cdot 3\cdot x$

$$= x^2+y^2+9+2xy+6y+6x$$

$$= x^2+2xy+y^2+6x+6y+9$$

(2) $(a+2b-3c)^2 = [a+(2b)+(-3c)]^2$

$$= a^2+(2b)^2+(-3c)^2+2a(2b)+2(2b)(-3c)+2(-3c)a$$

$$= a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ca$$

【**類題練習 1**】試利用公式 4 展開下列各式：

(1) $(2x-y-3z)^2$　　(2) $(-3x+4y-5z)^2$

【平方差公式】

事實上，將公式 1 中的 c、d 分別以 a、$-b$取代，即可得：

$$(a+b)(a-b) = a\cdot a+\cancel{a\cdot(-b)}+\cancel{b\cdot a}+b\cdot(-b)$$

$$= a^2-b^2$$

因而得到**平方差公式**：

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$$ 【公式 5】

【**範例 4**】利用公式 5 展開下列各式：

(1) $(3x+4y)(3x-4y)$　　(2) $(a+b-c)(a-b+c)$

【**解**】(1) $(3x+4y)(3x-4y) = (3x)^2-(4y)^2$

$$= 9x^2-16y^2$$

(2) 由 $a+b-c=a+(b-c)$ 和 $a-b+c=a-(b-c)$，可以得到：

$$(a+b-c)(a-b+c) = [a+(b-c)][a-(b-c)]$$

$$= a^2-(b-c)^2$$

$$= a^2-(b^2-2bc+c^2)$$

$$= a^2-b^2+2bc-c^2$$

如同完全平方公式，我們也常利用平方差公式來簡化數的計算。例如：求788^2-212^2的值時，我們可得到下列算式：

$$\begin{aligned}788^2-212^2&=(788+212)(788-212)\\&=1000\times 576\\&=576000\end{aligned}$$

又如求 107×93 的值時，我們觀察到 $107=100+7$、$93=100-7$，所以可得到下列算式：

$$\begin{aligned}107\times 93&=(100+7)(100-7)\\&=100^2-7^2\\&=10000-49=9951\end{aligned}$$

【類題練習 2】求下列各式的展開式：

(1) $(x+3y+1)(x-3y-1)$ (2) $(x+y)^2(x-y)^2$

【重點整理】

1. 常用的平方公式有:

【乘法分配律】 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$

【和的平方公式】 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

【差的平方公式】 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

【平方差公式】 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

2. 做乘法運算時，有時候可以用平方公式來簡化運算過程。

【家庭作業】

基礎題

1. 展開下列各式：

① $(4x+3)^2$　② $(-5x+2y)^2$

③ $(\frac{2}{3}a+\frac{3}{2}b)^2$　④ $(x+3y+5)^2$

⑤ $(2x-y-3)^2$　⑥ $(\frac{2}{5}x-3y)(\frac{2}{5}x+3y)$

⑦ $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$　⑧ $(x-2)(x+2)(x^2+4)$

2. 回答下列各題：

① 求$\frac{176^2}{138^2-38^2}$。　② 求$(19\frac{19}{20})\times(20\frac{1}{20})$。

③ 求$2001\times2003-1998\times2006$。

④ 已知$(6825.5)^2=6825^2+x$，求x的值。

進階題

3. 展開下列各式：

① $(2a+3)^2(2a-3)^2$　② $(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)$

③ $(a-b-c)(a+b+c)$　④ $(a+2)^4$

4. 回答下列各題：

① 求$1994\times2006-1999^2$的值。

② 求$\frac{285^2-115^2}{285^2+230\times285+115^2}$的值。

5. 回答下列各題：

① 利用乘法公式展開$(x+\frac{1}{x})^2$。

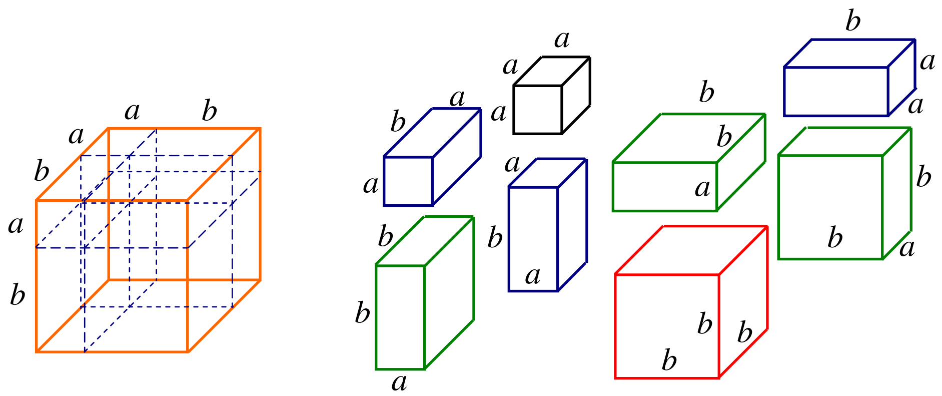
② 若$x+\frac{1}{x}=3$，求$x^2+\frac{1}{x^2}$的值。

1-3 立方公式

在國中時期，同學們較少接觸到立方的乘法運算，事實上，在多項式的乘法和因式分解的過程中，立方公式也經常被引用。

【完全立方公式】

如下圖，一個邊長為$(a+b)$的正立方體可切割成 2 個邊長分別為 a、b 的正立方體，3 個體積為a^2b的長方體和 3 個體積為ab^2的長方體，即 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 。



至於$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$圖形的切割，請同學自行試驗。

事實上，展開$(a+b)^3$時，可先將$(a+b)^3$寫成$(a+b)(a+b)^2$，再利用二項和的平方公式與分配律展開即可，也就是說：

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=(a+b)(a+b)^2\\&=(a+b)(a^2+2ab+b^2)\\&=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\&=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

由此，我們可得到**和的完全立方公式**：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \qquad 【公式 6】$$

同樣的，展開$(a-b)^3$的乘積，並經化簡後即可得到**差的完全立方公式**：

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad \text{【公式 7】}$$

其實，只要將公式 6 中的 b 以 $-b$ 代入，同樣可得公式 7。

【範例 1】展開下列各式：

(1) $(x+2)^3$　　(2) $(3x+2y)^3$　　(3) $(4a-5b)^3$

【解】

(1) $(x+2)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 + 2^3$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(2) $(3x+2y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 + (2y)^3$

$= 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$

(3) $(4a-5b)^3 = (4a)^3 - 3(4a)^2(5b) + 3(4a)(5b)^2 - (5b)^3$

$= 64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3$

【類題練習 1】展開下列各式：

(1) $(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y)^3$　　(2) $(4a^2-\frac{5}{2}b)^3$

【立方和與立方差】

我們可利用分配律來展開$(a+b)(a^2-ab+b^2)$即可得到：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

因此，得到**立方和公式**：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \qquad \text{【公式 8】}$$

【範例 2】利用公式 8 展開下列各式：

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$　　(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

【解】 (1) 由$(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$，與公式 8 比較可知，以 x 取代 a，以 2 取代 b，可得

$$(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3$$
$$=x^3+8 \text{。}$$

(2) $(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

$$=(2a+5b)[(2a)^2-(2a)(5b)+(5b)^2]$$
$$=(2a)^3+(5b)^3$$
$$=8a^3+125b^3$$

同樣的，我們可以展開$(a-b)(a^2+ab+b^2)$並經合併化簡後，而得到立方差公式：

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$ 【公式 9】

其實，只要把公式 8 中的 b 以 $-b$ 代入，即可得公式 9。

【範例 3】利用公式 9 展開下列各式：

(1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$ (2) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4})$

【解】 (1) $(2x-1)(4x^2+2x+1)=(2x-1)[(2x)^2+(2x)\cdot 1+1^2]$

$$=(2x)^3-1^3$$
$$=8x^3-1$$

(2) $(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})(\frac{a^2}{9}+\frac{ab}{6}+\frac{b^2}{4})=(\frac{a}{3}-\frac{b}{2})[(\frac{a}{3})^2+\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{2}+(\frac{b}{2})^2]$

$$=(\frac{a}{3})^3-(\frac{b}{2})^3$$
$$=\frac{a^3}{27}-\frac{b^3}{8}$$

【類題練習 2】(1) 試展開$(5a-\frac{b}{2})(25a^2+\frac{5ab}{2}+\frac{b^2}{4})$。

(2) 試展開$(x-3y)(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)(x^2+3xy+9y^2)$。

(3) 已知$x^3=2$，求$(x-3)(x^2+3x+9)$的值。

【重點整理】

1. 常用的立方公式有:

【和的立方公式】　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

【差的立方公式】　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

【立方和公式】　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

【立方差公式】　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

【家庭作業】

基礎題

1. 展開下列各式：

① $(-x-2)^3$　　② $(2a-3b)^3$

③ $(\frac{x}{3}+\frac{y}{2})(\frac{x^2}{9}-\frac{xy}{6}+\frac{y^2}{4})$　　④ $(2a-\frac{b}{2})(4a^2+ab+\frac{b^2}{4})$

⑤ $(a-3)(a+3)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$

2. 利用乘法公式回答下列各題：

① 已知$x^3=2$，求$(x^2-1)(x^4+x^2+1)$的值。

② 求$(5\frac{1}{3})^3+(4\frac{2}{3})^3$。

進階題

3. 回答下列各題：

① 展開$(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$。

② 設$a^3=8$，求$(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$的值。

③ 設$a^2=5$，求$(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$的值。

4. 回答下列各題：

① 已知$a+b=3$且$ab=2$，求(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3的值。

② 已知$a-b=-1$且$a^2+b^2=5$，求(1) ab (2) a^3-b^3的值。

二、因式分解

2-1 因式與倍式

如同因數與倍數的概念，如果代數式 **A** 可以寫成代數式 **B** 與代數式 **C** 的乘積，即

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}。$$

此時，我們說 **B** 與 **C** 是 **A** 的**因式**，而 **A** 是 **B** 與 **C** 的**倍式**。例如：由 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$，可知 $x+1$ 與 $x+2$ 皆為 x^2+3x+2 的因式，而 x^2+3x+2 為 $x+1$ 與 $x+2$ 的倍式；由 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，可知 $x+y$ 與 $x-y$ 皆為 x^2-y^2 的因式，而 x^2-y^2 為 $x+y$ 與 $x-y$ 的倍式。下面就讓我們先從多項式的除法來認識因式與倍式。

【多項式的除法】

在小學時，我們會以下列的長除法（直式算法）來求出 58 除以 13 的商數為 4，餘數 6：

$$\begin{array}{r} 4 \\ 13\,\overline{)\,58} \\ \underline{52} \\ 6 \end{array}$$

同時，我們也知道：

$$58=13\times 4+6$$

類似於自然數的除法，多項式的除法運算也有直式算法（長除法）；為了簡化計算，也常使用分離係數法。事實上，這兩種方法的差別在於計算過程中，有沒有將文字符號寫出來而已。

【範例 1】求 $(x^2+4x+2)\div(x+1)$ 的商式及餘式。

【解】　方法一：直式算法

$$
\begin{array}{rr@{\,}l}
 & & x+3 \\
 & x+1 & \overline{)\,x^2+4x+2} \\
x(x+1) \Rightarrow & & x^2+x \\
\hline
 & & \quad 3x+2 \\
3(x+1) \Rightarrow & & \quad 3x+3 \\
\hline
 & & \qquad -1
\end{array}
$$

答：商式為 $x+3$，餘式為 -1。

方法二：分離係數法

$$
\begin{array}{rl}
 & 1+3 \\
1+1 & \overline{)\,1+4+2} \\
 & 1+1 \\
\hline
 & \quad 3+2 \\
 & \quad 3+3 \\
\hline
 & \qquad -1
\end{array}
$$

在自然數的除法，我們有下列的規則：

被除數 ＝ 除數 × 商數＋餘數，

其中，商數和餘數為非負整數，且餘數小於除數。同樣的，在多項式的除法中，我們也有類似的規則：

被除式 ＝ 除式 × 商式＋餘式，

其中，除式不為零多項式，商式的次數等於被除式的次數減去除式的次數，且餘式的次數要小於除式的次數或為零多項式。

在完成多項式的除法後，為了驗證所得結果是否正確，除了重新檢視運算過程外，也常用上述「被除式 ＝ 除式 × 商式＋餘式」的概念來驗算。

例如：

$$
\begin{aligned}
&(x+1)(x+3)+(-1) && \text{（除式×商式＋餘式）}\\
&=x^2+4x+3-1 \\
&=x^2+4x+2 && \text{（被除式）}
\end{aligned}
$$

【範例 2】求 $(2x^3+5x^2+x+5)\div(x+2)$ 的商式及餘式。

【解】

$$
\begin{array}{rl}
 & 2+1-1 \\
1+2 & \overline{)\,2+5+1+5} \\
 & 2+4 \\
\hline
 & \quad 1+1 \\
 & \quad 1+2 \\
\hline
 & \qquad -1+5 \\
 & \qquad -1-2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 7
\end{array}
$$

答：商式為 $2x^2+x-1$，餘式為 7。

使用分離係數法時，當除式或被除式缺項時，需要補 0。

【範例 3】 求$(3x^2+2)\div(2x-1)$的商式及餘式。

【解】 因為$3x^2+2=3x^2+0\cdot x+2$，所以用 $3+0+2$ 來表示 $3x^2+2$。

$$
\begin{array}{r|l}
 & \dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4} \\
\hline
2-1 & 3+0+2 \\
 & 3-\dfrac{3}{2} \\
\hline
 & \quad\ \dfrac{3}{2}+2 \\
 & \quad\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{4} \\
\hline
 & \qquad\ 2\dfrac{3}{4}
\end{array}
$$

答：商式為$\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{4}$，餘式為$2\dfrac{3}{4}$。

【範例 4】 求$(6x^3-7x^2-4x+8)\div(3x^2+x-2)$的商式及餘式。

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2-3 \\
\hline
3+1-2 & 6-7-4+8 \\
 & 6+2-4 \\
\hline
 & \ \ -9+0+8 \\
 & \ \ -9-3+6 \\
\hline
 & \qquad\ \ 3+2
\end{array}
$$

答：商式為 $2x-3$，餘式為 $3x+2$。

【範例 5】 求$(3x^3+8x^2+7x+2)\div(x^2+2x+1)$的商式及餘式。

【解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3+2 \\
\hline
1+2+1 & 3+8+7+2 \\
 & 3+6+3 \\
\hline
 & \quad\ 2+4+2 \\
 & \quad\ 2+4+2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

答：商式為 $3x+2$，餘式為 0。

【類題練習 1】求下列各除法運算的商式及餘式：

(1) $(2x^2+x+5)\div(x+3)$ (2) $(-6x^2+5x+1)\div(2x-1)$

(3) $(x^4-1)\div(x-1)$ (4) $(2x^2+5x)\div(x+5)$

當餘式為零多項式時，我們稱**除式整除被除式**，例如：在範例 5 中，x^2+2x+1 整除 $3x^3+8x^2+7x+2$。這時，x^2+2x+1 與 $3x+2$ 為 $3x^3+8x^2+7x+2$ 的因式，而 $3x^3+8x^2+7x+2$ 為 x^2+2x+1 與 $3x+2$ 的倍式；而在範例 4 中，所得到的餘式 $3x+2$ 不為零多項式，所以 $3x^2+x-2$ 與 $2x-3$ 都不是 $6x^3-7x^2-4x+8$ 的因式。

我們知道兩個 x 的一次式乘積展開後成為 x 的二次多項式。反過來說，如果能將一個 x 的二次式寫成兩個 x 的一次式的乘積，我們稱這樣的過程為這個二次式的**因式分解**。

在高中的課程中，我們也會將一個多項式寫成幾個一次或二次的多項式的連乘積，這樣的過程也稱為這個多項式的因式分解。例如：

$$x^2-x-2 \underset{\text{乘積展開}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (x+1)(x-2)$$

$$x^3-6x^2+11x-6 \underset{\text{乘積展開}}{\overset{\text{因式分解}}{\rightleftarrows}} (x-1)(x-2)(x-3)$$

在國中階段做因式分解時，我們只考慮因式的係數為有理數（整數或分數）的情形。但從此以後，我們將不再要求因式的係數一定是有理數。在 2-2 至 2-4 節中，我們將介紹幾個常用的方法：**提公因式**、**分組分解**、**十字交乘**和**利用乘法公式**，並且在 2-5 節中補充利用配方法做因式分解。

【重點整理】

1. 判別兩多項式是否為因倍式關係時，可使用除法所得餘式是否為 0 來判斷。

【家庭作業】

基礎題

1. 求下列各除法運算的商式及餘式：

① $(9x^2+18x+8)\div(3x+4)$　　② $(7x^2+11x-3)\div(2x+3)$

③ $(x^3+1)\div(x-1)$　　④ $(x^3+2x-1)\div(x-5)$

⑤ $(x^4+2x^3-x+4)\div(x^2+3x-2)$　　⑥ $(x^4+1)\div(x^2-1)$

2. 已知$3x^3-6x+13=3(ax+b)(x^2-2x+2)+1$，求 a、b 的值。

3. 已知某多項式除以$(2x-1)$，可得商式(x^2-2x+1)，餘式 3，求此多項式。

4. 已知$4x^3-13x+k$可被$(2x+1)$整除，求 k 的值。

5. 已知一長方體的體積爲x^3+4x^2+x-6、長爲$x+3$且寬爲$x+2$，求此長方體的高。

進階題

6. 若多項式 A 除以$2x+1$得商式 B，餘式爲 3；多項式 B 除以$x-2$得餘式爲-2，求多項式 A 除以$(2x+1)(x-2)$所得的餘式。

7. 求以$x-1$除$(x^2-1)^{10}+x^2+x-1$所得的餘式。

2-2 提公因式作因式分解

【從各項提公因式】

如果發現多項式的每一項都有共同的因式時，我們可先將此公因式提出。

【範例 1】 因式分解下列多項式：

(1) x^2+5x　　(2) $(a-b)^2-2(a-b)$

(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3$

【解】

(1) $x^2+5x = x\cdot x+5\cdot x = x(x+5)$

(2) $(a-b)^2-2(a-b) = (a-b)(a-b)-2(a-b)$

$= (a-b)[(a-b)-2]$

$= (a-b)(a-b-2)$

(3) $(x-2y)^2+(2y-x)^3 = (x-2y)^2-(x-2y)^3$

$= (x-2y)^2[1-(x-2y)]$

$= (x-2y)^2(1-x+2y)$

【類題練習 1】 因式分解下列多項式：

(1) $4x^2+6x$　　(2) $7(a+b)^2-3(a+b)$

(3) $(x-y)^2+(y-x)^3$

【分組提公因式】

當各項沒有公因式時，可嘗試分組或去括號重新分組，使得每組之間有公因式。

【範例 2】 因式分解下列多項式：

(1) x^3+x^2+x+1　　(2) $2xy+5x+4y+10$

(3) $2ax^2-3x+2ax-3$　　(4) $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$

【解】

(1) $x^3+x^2+x+1 = x^2(x+1)+(x+1)$

$= (x+1)(x^2+1)$

(2) 方法一：

$$
\begin{aligned}
2xy+5x+4y+10 &= (2xy+5x)+(4y+10) \\
&= x(2y+5)+2(2y+5) \\
&= (2y+5)(x+2)
\end{aligned}
$$

方法二：

$$
\begin{aligned}
2xy+5x+4y+10 &= (2xy+4y)+(5x+10) \qquad \text{（交換律）} \\
&= 2y(x+2)+5(x+2) \\
&= (x+2)(2y+5)
\end{aligned}
$$

(3) 方法一：

$$
\begin{aligned}
2ax^2-3x+2ax-3 &= (2ax^2-3x)+(2ax-3) \\
&= x(2ax-3)+(2ax-3) \\
&= (2ax-3)(x+1)
\end{aligned}
$$

方法二：

$$
\begin{aligned}
2ax^2-3x+2ax-3 &= (2ax^2+2ax)-(3x+3) \\
&= 2ax(x+1)-3(x+1) \\
&= (x+1)(2ax-3)
\end{aligned}
$$

(4) 可嘗試去括號展開後，再重新分組。

$$
\begin{aligned}
xy(1+z^2)+z(x^2+y^2) &= xy+xyz^2+zx^2+zy^2 \\
&= (xy+zx^2)+(xyz^2+zy^2) \\
&= x(y+zx)+yz(xz+y) \\
&= x(y+xz)+yz(y+xz) \\
&= (y+xz)(x+yz)
\end{aligned}
$$

【類題練習 2】因式分解下列多項式：

(1) x^3-x^2+x-1 (2) $2xy-3x+4y-6$

(3) $5ax^2-2x+5ax-2$ (4) $ab(1-c^2)+c(a^2-b^2)$

從前面的例子我們可以看出，某些多項式可能有不只一種分組的方式來做因式分解。

【重點整理】

1. 若代數式各項有公因式時，先將此公因式提出來做因式分解。
2. 若代數式各項沒有公因式時，可嘗試分組或去括號重新分組，再提公因式來做因式分解。

【家庭作業】

基礎題

1. 因式分解下列多項式：

① $2x-ax$

② $3a^2b+6ab^2$

③ $x(x+2)-2x$

④ $(a-2)(b+3)+4(2-a)(3+b)$

⑤ $3(a-3)-(a^2-3a)$

⑥ $2ab-a+6b-3$

進階題

2. 因式分解下列多項式：

① $(x-2)^2+2x-4$

② $(x-2)^3+(2-x)(x^2-4x+1)$

③ $(ax-bx)^2-(b-a)^3x$

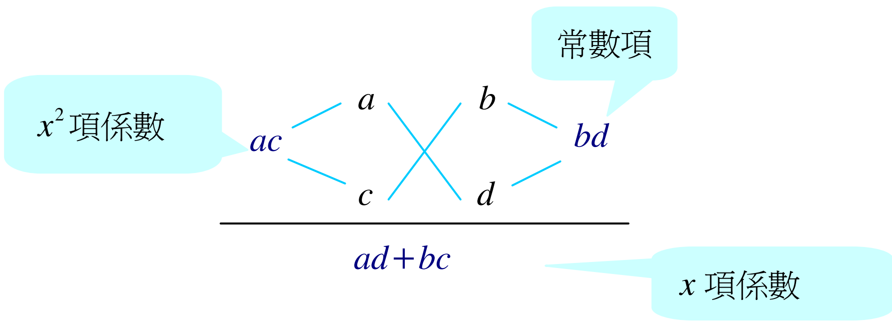
④ x^3+2x^2+2x+1

2-3 十字交乘法作因式分解

在多項式的乘法運算中，我們學過

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd \text{ ，}$$

其中各項的係數可以用十字交乘的方式來求得



因此，我們可以嘗試利用上面的方法來因式分解二次多項式。

【範例 1】 因式分解下列多項式：

(1) x^2-x-90　　　(2) $6x^2y^2+xy-15$

【解】 (1) $x^2-x-90=(x+9)(x-10)$

$$\begin{array}{ccc} x & & +9 \\ & \times & \\ x & & -10 \end{array}$$

(2) $6x^2y^2+xy-15=(3xy+5)(2xy-3)$

$$\begin{array}{ccc} 3xy & & +5 \\ & \times & \\ 2xy & & -3 \end{array}$$

【類題練習 1】 因式分解下列多項式：

(1) $5x^2+2x-51$　　　(2) $380-x-x^2$

【範例 2】 因式分解下列多項式：

(1) $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$　　　(2) $x^2+\frac{10}{3}x+1$

【解】 (1) 方法一: $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=x^2+(1+\frac{1}{3})x+(1\cdot\frac{1}{3})$

$=(x+1)(x+\frac{1}{3})$

$$\begin{array}{ccc} x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +1/3 \end{array}$$

方法二: $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x^2+4x+1)$

$=\frac{1}{3}(3x+1)(x+1)$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +1 \end{array}$$

(2) $x^2+\frac{10}{3}x+1=\frac{1}{3}(3x^2+10x+3)$

$=\frac{1}{3}(3x+1)(x+3)$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +3 \end{array}$$

在範例 2 第(1)題中，$(x+1)(x+\frac{1}{3})$ 和 $\frac{1}{3}(3x+1)(x+1)$ 都是 $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$ 的因式分解。事實上，在範例 2 第(2)題中，$\frac{1}{3}(3x+1)(x+3)$ 、$(x+\frac{1}{3})(x+3)$ 和 $(3x+1)(\frac{1}{3}x+1)$ 都是 $x^2+\frac{10}{3}x+1$ 的因式分解。換句話說，若多項式的係數有分數時，可將原多項式改寫成 $\frac{1}{d}(ax^2+bx+c)$ 的形式，其中 a、b、c、d 爲整數，再對 ax^2+bx+c 做因式分解。

【類題練習 2】因式分解下列多項式：

(1) $2x^2-\frac{5}{2}x-3$　　(2) $\frac{6}{5}x^2-\frac{13}{5}x-1$

【重點整理】

1. 我們可嘗試引用十字交乘

$$\begin{array}{cccc} & a & b & \\ ac & & & bd \\ & c & d & \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{ad+bc} & \end{array}$$

來做因式分解。

【家庭作業】

基礎題

1. 因式分解下列多項式：

① $x^2+14x+33$　　② $5x^2-5x-10$

③ $x^2+\frac{3}{2}x-10$　　④ $9x^2-35x-4$

⑤ $7a^2-14ab-105b^2$　　⑥ $2(x-y)^2+3(y-x)-5$

⑦ $x^2-(p-q)x-pq$　　⑧ $ax^2-(a-b)x-b$

進階題

2. 因式分解下列多項式：

① $4x^4-13x^2-12$　　② $(a+b)(a+b-4)-12$

③ $(x-4y)(x+4y)+6xy$　　④ $x^2-(a+\frac{1}{a})x+1$

⑤ $(x^2-x+1)^2-3(x^2-x)-7$　　⑥ $(x^2+3x+5)(x^2+3x+1)+3$

2-4 利用乘法公式做因式分解

對於某些多項式，我們可直接利用乘法公式來作因式分解。

【完全平方公式】

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

【範例 1】 利用完全平方公式，因式分解下列各式：

(1) a^2+6a+9　　(2) $4x^2-12xy+9y^2$

(3) $(x+2y)^2+6(x+2y)(y-x)+9(x-y)^2$

(4) $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

【解】

(1) $a^2+6a+9=a^2+2\cdot a\cdot 3+3^2=(a+3)^2$

(2) $4x^2-12xy+9y^2=(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2$

$=(2x-3y)^2$

(3) $(x+2y)^2+6(x+2y)(y-x)+9(x-y)^2$

$=(x+2y)^2-2\cdot(x+2y)\cdot[3(x-y)]+[3(x-y)]^2$

$=[(x+2y)-3(x-y)]^2$

$=(-2x+5y)^2$　　（或寫成 $(2x-5y)^2$ ）

(4) $a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

$=(a^2-2ab+b^2)+(2bc-2ca)+c^2$

$=(a-b)^2+2c(b-a)+c^2$

$=(a-b)^2-2c(a-b)+c^2$

$=(a-b-c)^2$

【類題練習 1】利用完全平方公式，因式分解下列各式：

(1) $a^2+10a+25$　　(2) $16x^2-40xy+25y^2$

(3) $(x+y)^2+10(x+y)(y-x)+25(x-y)^2$

(4) $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac$

【平方差公式】

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

【範例 2】利用平方差公式，因式分解下列各式：

(1) $x^2-(x+2y)^2$　　(2) $9-(a+2)^2$　　(3) $x^2-y^2+2yz-z^2$

【解】

(1) $$\begin{aligned} x^2-(x+2y)^2 &= [x+(x+2y)][x-(x+2y)] \\ &= (x+x+2y)(x-x-2y) \\ &= (2x+2y)(-2y) \\ &= 2(x+y)(-2y) \\ &= -4y(x+y) \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} 9-(a+2)^2 &= 3^2-(a+2)^2 \\ &= [3+(a+2)][3-(a+2)] \\ &= (3+a+2)(3-a-2) \\ &= (a+5)(1-a) \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} x^2-y^2+2yz-z^2 &= x^2-(y^2-2yz+z^2) \\ &= x^2-(y-z)^2 \\ &= [x+(y-z)][x-(y-z)] \\ &= (x+y-z)(x-y+z) \end{aligned}$$

【類題練習 2】利用平方公式，因式分解下列各式：

(1) a^4-2a^2+1　　(2) $(2x-1)^2+4(2x-1)+4$

(3) a^2-b^2+2b-1　　(4) x^4-y^4

【完全立方公式】

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

【範例 3】利用完全立方公式，因式分解下列各式：

(1) x^3+3x^2+3x+1　　(2) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

(3) $27-27x+9x^2-x^3$

【解】

(1) $x^3+3x^2+3x+1=x^3+3\cdot x^2\cdot 1+3\cdot x\cdot 1^2+1^3$

$=(x+1)^3$

(2) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot y+3\cdot(2x)\cdot y^2+y^3$

$=(2x+y)^3$

(3) $27-27x+9x^2-x^3=3^3-3\cdot 3^2\cdot x+3\cdot 3\cdot x^2-x^3$

$=(3-x)^3$

【類題練習 3】完全立方公式，因式分解下列各式：

(1) x^3-3x^2+3x-1　　(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$

(3) $27+27x+9x^2+x^3$　　(4) $27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$

【立方差與立方和】

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

【範例 4】 利用立方和或立方差公式，因式分解下列各式：

(1) x^3-1　　(2) a^3+8b^3　　(3) x^6-y^6

【解】 (1) $x^3-1=x^3-1^3$

$$=(x-1)(x^2+x\cdot 1+1^2)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)$$

(2) $a^3+8b^3=a^3+(2b)^3$

$$=[a+(2b)][a^2-a\cdot(2b)+(2b)^2]$$
$$=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$$

(3) $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2$

$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

【類題練習 4】 利用立方和或立方差公式，因式分解下列各式：

(1) $x^3+\dfrac{1}{27}$　　(2) $8a^3-125b^3$

(3) x^3+x^2-2　　(4) a^6-64b^6

在範例 4 的第(3)題中，也可以將 x^6-y^6 寫成 $(x^2)^3-(y^2)^3$，因此得到：

$$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$$
$$=(x^2-y^2)[(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2]$$
$$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$$

事實上，$x^4+x^2y^2+y^4$ 可以再分解，我們將在下一個單元裡，介紹它的分解方法。

【重點整理】

1. 我們可嘗試利用下列的乘法公式：

【完全平方公式】 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ ；

【平方差公式】 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ；

【完全立方公式】 $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ ；

【立方和、差公式】 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ ，

來做因式分解。

【家庭作業】

基礎題

1. 因式分解下列各式：

① $x^2 + 14x + 49$

② $3x^2 - 12x + 12$

③ $x^2 - 4x(b-a) + 4(a-b)^2$

④ $2x^2 - 18$

⑤ $\frac{1}{4} - (3+a)^2$

⑥ $a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4$

⑦ $2x^3 + 16y^3$

⑧ $-8 + 125x^3$

進階題

2. 因式分解下列各式：

① $x^2 - y^2 + 6yz - 9z^2$

② $(1-ab)^2 - (a-b)^2$

③ $(a^2-1)(b^2-1) - 4ab$

④ $\frac{1}{4}a^2 - \frac{2}{3}a + \frac{4}{9}$

⑤ $x^3 + x^2 - 36$

⑥ $x^4 - x^3 + 4x^2 - 3x + 3$

3. 已知 $a+b=3$ ， $ab=2$ ，求下列各式的值：

① $a^2 + b^2$

② $4a^2 - ab + 4b^2$

③ $a^3 + b^3$

2-5 利用配方法作因式分解

利用完全平方公式或完全立方公式，再配合平方差公式或前面介紹的方法，可以處理一些特殊多項式的因式分解，這裡需要一些拆項(分項)或補項(加減項)的技巧，要多練習。

【完全平方公式】 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

【平方差公式】 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

【完全立方公式】 $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

【立方和、差公式】 $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

【**範例 1**】因式分解下列多項式：

(1) $x^2 + 4x - 5$ (2) $3a^2 - 4a + 1$

(3) $a^4 + a^2 + 1$ (4) $9x^4 + 5x^2 + 1$

【**解**】 (1) $x^2 + 4x - 5 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 5$

$$= (x+2)^2 - 9$$

$$= (x+2)^2 - 3^2$$

$$= (x+5)(x-1)$$

(2) $3a^2 - 4a + 1 = (3a^2 + a^2) - a^2 - 4a + 1$

$$= 4a^2 - 4a + 1 - a^2$$

$$= (2a-1)^2 - a^2$$

$$= (3a-1)(a-1)$$

(3) $a^4 + a^2 + 1 = a^4 + (a^2 + a^2) - a^2 + 1$

$$= a^4 + 2a^2 + 1 - a^2$$

$$= (a^2+1)^2 - a^2$$

$$= (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a)$$

$$= (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

(4) $9x^4 + 5x^2 + 1 = 9x^4 + (5x^2 + x^2) - x^2 + 1$

$$= 9x^4 + 6x^2 + 1 - x^2$$

$$= (3x^2+1)^2 - x^2$$

$$=(3x^2+1+x)(3x^2+1-x)$$

$$=(3x^2+x+1)(3x^2-x+1)$$

事實上，在範例 1 的第(3)題中，所見到的

$$(a^2+a+1)(a^2-a+1)=a^4+a^2+1$$

也是一個常見的乘法公式。

【類題練習 1】 因式分解下列各式：

(1) x^2+2x-3　　(2) $5a^2-12a+4$

(3) $a^4+a^2b^2+b^4$　　(4) $9x^4+11x^2+4$

【範例 2】因式分解下列多項式：

(1) x^3-y^3　　(2) x^4+4

【解】 (1) 雖然可以直接引用立方差公式來因式分解，我們也可以用補項的概念來因式分解 x^3-y^3。

$$x^3-y^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+3x^2y-3xy^2$$

$$=(x-y)^3+3xy(x-y)$$

$$=(x-y)[(x-y)^2+3xy]$$

$$=(x-y)(x^2-2xy+y^2+3xy)$$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

(2) 很顯然，x^4+4無法直接使用平方差公式來分解。所以，我們嘗試用補項的方法來克服困難。

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2$$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

在國中時期，因爲我們要求因式分解後的各個因式的係數皆爲有理數，所以有些二次式無法分解。如果允許因式的係數可爲任意實數，那麼我們就可以用配方法來分解它。

【範例 3】 因式分解 x^2+4x+1。

【解】

$$\begin{aligned} x^2+4x+1 &= x^2+4x+4-4+1 \\ &= (x+2)^2-3 \\ &= (x+2)^2-(\sqrt{3})^2 \\ &= (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

【類題練習 2】 利用配方法的技巧，來因式分解下列各式：

(1) x^2+8x+9　　(2) x^3+y^3　　(3) x^4+64

【重點整理】

1. 我們可以用拆項或補項的概念將多項式配成某些乘法公式的形式來做因式分解。
2. 在配方法中，常引用的乘法公式有：

   【完全平方公式】 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$；

   【平方差公式】 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

   【完全立方公式】 $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$；

   【立方和、差公式】 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$。

【家庭作業】

基礎題

1. 利用配方法因式分解下列各式：

① x^2+6x+8　② $25a^4+6a^2+1$

③ x^4+324　④ $a^4-4a^2b+3b^2$

進階題

2. 因式分解下列各式：

① $x^2+10x+23$　② $a^2-b^2-c^2+2bc+a+b-c$

③ $8a^3-1$　④ $27x^3+8y^3$

3. 回答下列各題：

① 已知$a-b=5$，$b-c=3$，求$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$的值。

② 若$x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+38=(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2$，其中$a$、$b$、$c$爲整數，求$a$、$b$、$c$的值。

4. 回答下列各題：

① 因式分解$a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$。

② 設a、b爲兩正數，若$a^2-4b=b^2+4a$，求$a-b$的值。

③ 承②，求$a^2-2ab+b^2-2a+2b+1$的值。

三、平方根

在本章中，我們將介紹平方根及學習平方根的四則運算與根式中分母的有理化，並介紹雙重根式的化簡。

3-1 認識平方根

對於一個正數 a，如果 b 的平方等於 a，即 $b^2=a$，我們就稱 **b 是 a 的平方根**又稱**二次方根**。例如：3 的平方等於 9，所以稱 3 是 9 的平方根。另外，因為 $(-3)^2=9$，所以 -3 也是 9 的平方根。由此，我們知道 9 的平方根有 3 和 -3。

在國中階段，我們引進符號「$\sqrt{\ }$」，讀作「**二次根號**」，或簡讀作「**根號**」，來表示一個正數的平方根：對於任何一個正數 a，

$\sqrt{a}$ (讀作根號 a)表示 a 的正平方根；

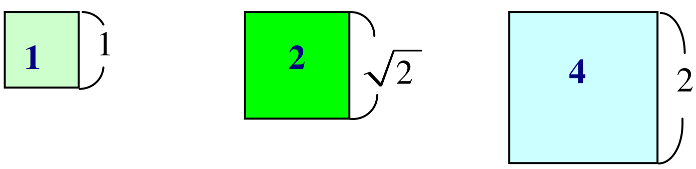
$-\sqrt{a}$ (讀作負根號 a)表示 a 的負平方根。

例如：4 的平方根記作 $\pm\sqrt{4}$，即 $\sqrt{4}=2$ 及 $-\sqrt{4}=-2$。也就是說，由平方根的定義，$(\sqrt{a})^2=a$、$(-\sqrt{a})^2=a$。當 $a=0$ 時，a 的兩個平方根都為 0。

此外，在 $\sqrt{a}$ 中，我們稱 a 為**被開方數**。例如：$\sqrt{1}$ 的被開方數為 1，而 $\sqrt{1}=1$；$\sqrt{9}$ 的被開方數為 9，而 $\sqrt{9}=3$。在本章中，除了在雙重根式的情形外，我們所討論的被開方數均為非負的有理數。

【平方根的近似值】

如果 a 不是某一個整數的平方時，如何求出它的平方根所表示的值呢？例如 2 不是某一個整數的平方，那麼，如何求出 $\sqrt{2}$ 的值呢？我們先由下列三個面積分別為 1、2 和 4 平方公分的正方形來說明：



我們可看出這三個正方形依其面積的大小，由小至大依序排列，因此，它們的邊長的大小順序也應相同。因爲這三個正方形的邊長分別爲 1 公分、$\sqrt{2}$ 公分和 2 公分，所以，$\sqrt{2}$ 的值應介於 1 和 2 之間，即 $1<\sqrt{2}<2$。

若想進一步知道 $\sqrt{2}$ 的值爲何，我們可以將 1 和 2 之間作十等分，依序可得 1.1，1.2，1.3，1.4，1.5，1.6，1.7，1.8 和 1.9，並分別計算其平方：

$1^2=1<2$ $(1.5)^2=2.25>2$

$(1.1)^2=1.21<2$ $(1.6)^2=2.56>2$

$(1.2)^2=1.44<2$ $(1.7)^2=2.89>2$

$(1.3)^2=1.69<2$ $(1.8)^2=3.24>2$

$(1.4)^2=1.96<2$ $(1.9)^2=3.61>2$

$2^2=4>2$

我們可看出 $(1.4)^2<2<(1.5)^2$，所以 $\sqrt{2}$ 介於 1.4 和 1.5 之間，即

$$1.4<\sqrt{2}<1.5\text{。}$$

若再將 1.4 和 1.5 之間作十等分得 1.41，1.42，1.43，1.44，1.45，1.46，1.47，1.48 和 1.49 等九個二位小數，那麼，$\sqrt{2}$ 又介於哪兩個小數之間呢？事實上，由

$$(1.41)^2=1.9881<2$$

$$(1.42)^2=2.0164>2$$

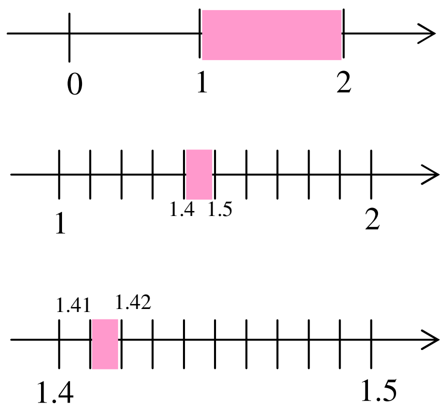
可看出 $(1.41)^2<2<(1.42)^2$，因此 $\sqrt{2}$ 介於 1.41 和 1.42 之間，即

$$1.41<\sqrt{2}<1.42\text{。}$$

依照上面的方法繼續做下去，我們知道 $1.414<\sqrt{2}<1.415$，…，進而算出 $1.4142135<\sqrt{2}<1.4142136$。

如果我們想用**四捨五入法**取 $\sqrt{2}$ 的**近似值**到小數第二位，那麼就依上

面的方法算到小數第三位，然後再用四捨五入法取捨即可。也就是說，因為 $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$，所以取到小數第二位時，$\sqrt{2}$ 的近似值為 1.41，記作 $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41$（讀作根號 2 約等於一點四一）。事實上，依這樣的步驟且取越多的小數位數時，我們所算出的近似值越接近 $\sqrt{2}$ 的值。



在上面求 $\sqrt{2}$ 的近似值的過程中，我們也可以用數線來說明。我們首先算出 $\sqrt{2}$ 介於兩個連續整數之間，即 $1 < \sqrt{2} < 2$，或者說，在數線上，$\sqrt{2}$ 的位置在 1 和 2 之間；接下來把 1 和 2 之間分成十等分，然後得出 $\sqrt{2}$ 在 1.4 和 1.5 之間；再把 1.4 和 1.5 之間分成十等分，並得出 $\sqrt{2}$ 介於 1.41 和 1.42 之間，⋯。

事實上，我們可將這樣逼近的過程看成是在數線上，利用「十等分」的方法逐漸接近 $\sqrt{2}$ 的位置，因此稱這樣的方法為**十分逼近法**。

【範例 1】 以十分逼近法求 $\sqrt{3}$ 的近似值(以四捨五入法取到小數第一位)。

【解】 由 $1^2 = 1$ 和 $2^2 = 4$，可得 $1^2 < 3 < 2^2$，因此 $1 < \sqrt{3} < 2$。

將 1 和 2 之間作十等分並計算 $(1.1)^2$，$(1.2)^2$，⋯，$(1.9)^2$ 的值如下：

$(1.1)^2 = 1.21 < 3$　　$(1.6)^2 = 2.56 < 3$

$(1.2)^2 = 1.44 < 3$　　$(1.7)^2 = 2.89 < 3$

$(1.3)^2 = 1.69 < 3$　　$(1.8)^2 = 3.24 > 3$

$(1.4)^2 = 1.96 < 3$　　$(1.9)^2 = 3.61 > 3$

$(1.5)^2 = 2.25 < 3$

因此，$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$。依題意，我們再將 1.7 和 1.8 之間作十等分，並計算 $(1.71)^2$、$(1.72)^2$、⋯的值如下：

$(1.71)^2 = 2.9241 < 3$，　　$(1.73)^2 = 2.9929 < 3$，

$(1.72)^2 = 2.9584 < 3$，　　$(1.74)^2 = 3.0276 > 3$，

所以，$1.73 < \sqrt{3} < 1.74$。因此，依題意取到小數第一位時，$\sqrt{3} \fallingdotseq 1.7$。

在範例 1 求$\sqrt{3}$的過程中，當已知$\sqrt{3}$介於 1 和 2 之間後，我們可先比較$(1.5)^2$和 3 的大小。因爲$(1.5)^2 = 2.25 < 3$，所以$\sqrt{3}$介於 1.5 和 2 之間。因此只須取$(1.6)^2$、$(1.7)^2$、$\cdots$、$(1.9)^2$的值來做比較即可。有時候，這樣的方式可省去一些不必要的計算。

【類題練習 1】試以十分逼近法求$\sqrt{5}$的近似值（以四捨五入法取到小數第一位）。

事實上，除了利用十分逼近法之外，我們也可以用開方表或計算器來求得正數的平方根較準確的近似值。

我們再來看畢氏定理（又稱商高定理）和平方根的關係。由畢氏定理，我們知道：

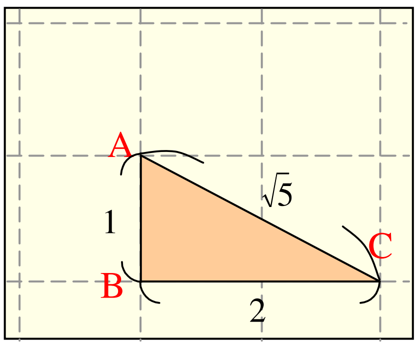
任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方。

也就是說，若直角三角形的兩股長分別爲 a、b，斜邊長爲 c，那麼

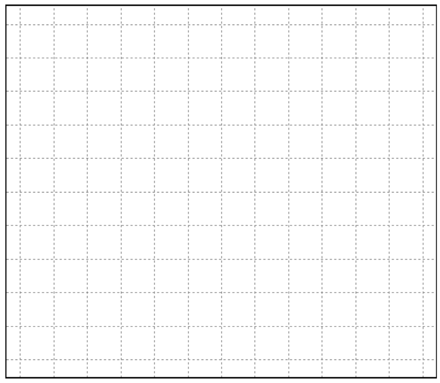
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{，或} c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{。}$$

【範例 2】 在方格紙上，利用直角三角形，畫出一條長爲$\sqrt{5}$單位的線段。

【解】 因爲$1^2 + 2^2 = (\sqrt{5})^2$，所以，兩股長分別爲 1、2 的直角三角形，它的斜邊長即爲$\sqrt{5}$。
因此我們只需在方格紙上畫出兩股長分別爲 1 和 2 個單位長的直角三角形 ΔABC，如右圖，那麼其斜邊$\overline{AC}$即爲$\sqrt{5}$個單位長的線段。



【類題練習 2】 在方格紙內，利用直角三角形畫出長度分別為 $\sqrt{10}$ 和 $\sqrt{13}$ 個單位長的線段。



【想想看】 給定一個正整數 n，如何利用尺規作圖畫出一條 $\sqrt{n}$ 個單位長的線段？

(提示：$1^2+1^2=2$，$1^2+(\sqrt{2})^2=3$，$1^2+(\sqrt{3})^2=4$，$\cdots$)

【範例 3】 (1) 已知某直角三角形中，兩股長分別為 5 和 12，求斜邊長。

(2) 已知直角三角形的一股長為 4，斜邊長為 7， 求另一股長。

【解】 (1) 由 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，設 $a=5$，$b=12$，所以斜邊長

$$c=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$$ 。

(2) 設一股長 a 為 4，斜邊長 c 為 7，由 $b=\sqrt{c^2-a^2}$，

可得另一股長 $b=\sqrt{7^2-4^2}=\sqrt{33}$ 。

【類題練習 3】 (1) 已知某直角三角形中，兩股分別為 2 和 5，求斜邊長。

(2) 已知直角三角形的一股長為 5，斜邊長為 8，求另一股長。

【重點整理】

1. 每一個正數有兩個平方根，負數沒有平方根，而 0 的平方根就 0。
2. 我們可以用十分逼近法來求出平方根的近似值。
3. 已知直角三角形任意二邊的邊長時，可以利用畢氏定理求得第三邊的邊長。

【家庭作業】

基礎題

1. $\sqrt{3}-2$ 是正數還是負數？
2. $\sqrt{7}$ 介於哪兩個連續整數之間？
3. 以十分逼近法求 $\sqrt{13}$ 的近似值（以四捨五入法取到小數第一位）。
4. 引用畢氏定理的概念，繪出一條 $\sqrt{11}$ 個單位長的線段。
5. ① 已知某直角三角形中，兩股分別爲 5 和 9，求斜邊長。

   ② 已知直角三角形的一股長爲 5，斜邊長爲 14，求另一股長。

3-2 平方根的運算

【平方根的乘法與除法】

我們首先來看如何做平方根之間的乘法及除法運算。假設 $a \geq 0$、$b \geq 0$。因爲

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b}) \\
&= (\sqrt{a}\times\sqrt{a})\times(\sqrt{b}\times\sqrt{b}) \\
&= (\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2 \\
&= ab，
\end{aligned}
$$

由定義我們知道 $(\sqrt{ab})^2 = ab$，所以

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}。$$

此外，假設 $b>0$，由 $(\frac{1}{\sqrt{b}})^2 = \frac{1}{\sqrt{b}}\times\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{(\sqrt{b})^2} = \frac{1}{b}$，且 $(\sqrt{\frac{1}{b}})^2 = \frac{1}{b}$，我們知道 $\frac{1}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{b}}$。同樣的，我們可以得到

$$\sqrt{a}\div\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}。$$

在數學上，我們稱含有根號的算式爲**根式**。例如：$\sqrt{2}\times\sqrt{3}$、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 都是根式。事實上，形如 $\sqrt{a}$ 的數也稱爲根式。

【範例 1】計算下列根式：

(1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\times\sqrt{\frac{45}{4}}$

(3) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$　　(4) $\sqrt{\frac{6}{5}}\div\sqrt{\frac{2}{15}}$

【解】 (1) $\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$

(2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\times\sqrt{\frac{45}{4}}=\sqrt{\frac{1}{5}\times\frac{45}{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$

(4) $\sqrt{\frac{6}{5}}\div\sqrt{\frac{2}{15}}=\sqrt{\frac{6}{5}\div\frac{2}{15}}=\sqrt{\frac{6}{5}\times\frac{15}{2}}=\sqrt{9}=3$

【類題練習 1】 計算下列根式：

(1) $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$　　(2) $\sqrt{\frac{27}{8}}\times\sqrt{\frac{2}{3}}$

(3) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$　　(4) $\sqrt{\frac{15}{4}}\div\sqrt{\frac{3}{5}}$

【最簡根式】

當一個整數 a 爲某個整數的平方時，我們就稱 a 爲**完全平方數**，也叫做**平方數**，例如：$81=9^2$，所以 81 爲完全平方數，因此$\sqrt{81}=9$。另外，當被開方數是整數，且不是一個完全平方數時，我們可利用數的標準分解式及平方根的乘法，來化簡根式。例如：化簡$\sqrt{360}$時，我們先把 360 寫成標準分解式：

$$360=2^3\times3^2\times5=(2\times3)^2\times2\times5，$$

再化簡得到

$$\sqrt{360}=\sqrt{(2\times3)^2\times2\times5}=6\sqrt{10}。$$

爲方便以後做同類根式的加減運算，當被開方數爲有理數時，我們通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如：我們會將平方根

$\sqrt{\dfrac{8}{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$改寫成下列的形式：

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}\ \text{（或}\frac{2}{3}\sqrt{6}\text{）}$$

也就是說，習慣上我們會將一個正有理數的平方根寫成$\dfrac{p}{q}\sqrt{n}$或$\dfrac{p\sqrt{n}}{q}$的形式，其中$\dfrac{p}{q}$爲最簡分數，n 爲大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的平方整除，我們稱這種形式的根式($\dfrac{p}{q}\sqrt{n}$或$\dfrac{p\sqrt{n}}{q}$)爲「**最簡根式**」。例如：$6\sqrt{10}$和$\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$都是最簡根式，但$\sqrt{360}$和$\sqrt{\dfrac{8}{3}}$就不是最簡根式。我們稱將平方根化成最簡根式的過程爲「**平方根化簡**」。

【範例 2】 將下列根式化爲最簡根式：

(1) $\sqrt{12}$　　(2) $\sqrt{63}$　　(3) $\sqrt{\dfrac{45}{2}}$

【解】 (1) $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

(2) $\sqrt{63}=\sqrt{9\times7}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{7}=3\sqrt{7}$

(3) $\sqrt{\dfrac{45}{2}}=\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3^2\times5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$

【類題練習 2】將下列根式化爲最簡根式：

(1) $\sqrt{24}$　　(2) $\sqrt{180}$　　(3) $\sqrt{\dfrac{27}{2}}$　　(4) $\sqrt{\dfrac{75}{7}}$

當兩個根式經過化簡後，如果在它們的最簡根式的根號內有相同的被開方數時，我們就稱這兩個平方根爲**同類方根**。例如：$2\sqrt{3}$ 、$\sqrt{\frac{1}{3}}$（可化簡爲$\frac{\sqrt{3}}{3}$）和$-\sqrt{3}$都是同類方根，但$\sqrt{3}$與$\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$就不是同類方根。

做根式的加減計算時，我們通常會將式中的每一項化爲最簡根式，再將同類方根合併。往後我們所稱的根式化簡是指將結果以最簡根式的形式表示。

【範例 3】化簡下列根式：

(1) $-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+7\sqrt{2}-6\sqrt{3}$　(2) $-\sqrt{12}+4\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{18}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{54}+\frac{1}{\sqrt{3}}$

【解】

(1) $-3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+7\sqrt{2}-6\sqrt{3}=(-3+7)\sqrt{2}+(2-6)\sqrt{3}$

$=4\sqrt{2}-4\sqrt{3}$

(2) $-\sqrt{12}+4\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{18}=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

$=7\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{54}+\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{7\sqrt{6}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{6}$

【類題練習 3】化簡下列根式：

(1) $4\sqrt{6}-8\sqrt{3}+7\sqrt{6}-4\sqrt{3}$　(2) $3\sqrt{5}+6\sqrt{3}-\sqrt{45}+\sqrt{75}$

(3) $\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{7}{16}}+\sqrt{60}+\frac{1}{\sqrt{7}}$

現在來看看如何做根式的乘積展開。事實上，我們常利用乘法公式

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

來展開形如

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}+\sqrt{d})$$

根式乘積的算式。

【範例 4】化簡下列根式：

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$　　　(2) $(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})$

【解】

(1)
$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})&=\sqrt{2}\times\sqrt{6}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{6}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}\\&=\sqrt{12}+\sqrt{6}+\sqrt{18}+3\\&=3+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{6}\end{aligned}$$

(2) 利用平方差公式，可得

$$\begin{aligned}(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})&=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2\\&=7-2=5\text{。}\end{aligned}$$

【類題練習 4】化簡下列根式：

(1) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{75})$　　　(2) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

【根式分母的有理化】

在根式中，如果分母含有根號，我們通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如：$\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\dfrac{3}{\sqrt{24}}=\dfrac{3\times\sqrt{24}}{\sqrt{24}\times\sqrt{24}}=\dfrac{3\times2\sqrt{6}}{24}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$。

如果根式的分母為兩項式且含有根號時，我們可以利用等值分數的概念和平方差公式，來將根式化成分母不含有根號的形式。例如；在$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$中，若對分子、分母同乘以$\sqrt{2}-1$，即可得到

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$=\sqrt{2}-1\text{。}$$

我們再用下面的例子來說明。

【範例 5】將下列各式化爲分母不含根號的根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}$　　　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

【解】　(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}=\dfrac{1\times(\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{2}+3)(\sqrt{2}-3)}$　　(同乘以$\sqrt{2}-3$)

$$=\frac{\sqrt{2}-3}{(\sqrt{2})^2-3^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-3}{2-9}$$

$$=\frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{1\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$　　(同乘以$\sqrt{3}+\sqrt{2}$)

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

我們稱將根式化爲分母不含根號的形式的過程爲**分母的有理化**。

【類題練習 5】 有理化下列各根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$　　　　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{15}-3}$

【範例 6】 有理化 $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ 。

【解】 因爲 $(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})=1-(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2=1-\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ ，

所以 $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1\times(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})}{(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2})(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})}=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=2(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2})=2+\sqrt{2}$ 。

在範例 6 中，我們也可以將分子、分母同乘以 2，來將原根式化爲 $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$ 後，再做有理化。

【類題練習 6】 有理化 $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ 。

【雙重根式的化簡】

有時候，算式中會有形如 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ 含有雙重根號的根式，我們稱這種形式的根式爲**雙重根式**。事實上，我們可以嘗試利用完全平方公式，來做雙重根式的化簡。我們先以下面的範例來說明，再加以延伸。

【範例 7】 展開下列各式：

(1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$　　　　(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

【解】 (1) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$$=a+2\sqrt{ab}+b$$

$$=(a+b)+2\sqrt{ab}$$

(2) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$$=a-2\sqrt{ab}+b$$

$$=(a+b)-2\sqrt{ab}$$

我們觀察到：如果設 $a=2$，$b=1$，那麼 $(\sqrt{2}+1)^2=(2+1)+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$ ，所以 $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ 。

事實上，由平方根的性質，我們知道 $\sqrt{a^2}=|a|$ ，而當 a 爲非負數時，$\sqrt{a^2}=a$ 。所以，我們先設 a、b 爲兩個非負的數，且 $a\geq b$ 來討論雙重根式的化簡過程：

由 $(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(a+b)\pm 2\sqrt{ab}$

可得 $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$

也就是說，如果 $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ，(其中 $a\geq b$)，則 $x=a+b$ ， $y=ab$ 。

我們可以利用這個規則，試著作以下雙重方根的化簡。

【範例 8】化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$　　(2) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$

(3) $\sqrt{14-8\sqrt{3}}$　　(4) $\sqrt{4-\sqrt{7}}$

【解】 (1) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5+2-2\sqrt{5\times 2}}$

$$=\sqrt{5}-\sqrt{2}$$

(2) 根式中雖然沒有 $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ 的形式，但是 $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ ，所以可以嘗試做化簡。

$$\sqrt{8+\sqrt{28}}=\sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$=\sqrt{7+1+2\sqrt{7\times 1}}$$

$$=\sqrt{7}+\sqrt{1}=\sqrt{7}+1$$

(3) $\sqrt{14-8\sqrt{3}}=\sqrt{14-2\sqrt{48}}$ (先將$8\sqrt{3}$化成$2\sqrt{48}$)

$$=\sqrt{8+6-2\sqrt{8\times 6}}$$

$$=\sqrt{8}-\sqrt{6}=2\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

(4) $\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{2}}=\dfrac{\sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{7}-1)}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$$

由範例 8，我們觀察到：做雙重根式化簡時，可嘗試先將根式化成 $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$ 的形式後，再做化簡。

【類題練習 7】化簡下列各式：

(1) $\sqrt{7+2\sqrt{12}}$ (2) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$

(3) $\sqrt{7+\sqrt{40}}$ (4) $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

【想想看】在$\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$中，爲什麼要假設$a\geq b\geq 0$？

【重點整理】

1. 假設 $a\geq 0$、$b\geq 0$，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。

2. 假設 $a\geq 0$、$b>0$，$\sqrt{a}\div\sqrt{b}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

3. 我們可以將一個正有理數的平方根改寫成形如 $\dfrac{p}{q}\sqrt{n}$ 或 $\dfrac{p\sqrt{n}}{q}$ 的最簡根式，其中 $\dfrac{p}{q}$ 爲最簡分數，n 爲大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的平方整除。

4. 如果 $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$，(其中 $a\geq b\geq 0$)，則 $x=a+b$， $y=ab$。

【家庭作業】

基礎題

1. 化簡下列各式：

① $\sqrt{162}$　② $\sqrt{250}$　③ $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$　④ $\sqrt{\dfrac{5}{6}}$

2. 化簡下列各式：

① $\sqrt{3}\times\sqrt{18}$　② $\sqrt{\dfrac{7}{12}}\times\sqrt{\dfrac{10}{21}}$　③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{50}}\times\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$

④ $\sqrt{\dfrac{3}{5}}\div\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{\dfrac{7}{11}}\div\sqrt{\dfrac{21}{44}}$

3. 化簡下列各式：

① $\sqrt{6}(\sqrt{18}-\sqrt{15})$　② $-4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+\sqrt{5}-3\sqrt{3}$

③ $\sqrt{84}-\sqrt{54}-\sqrt{32}-\sqrt{18}$　④ $(\sqrt{95}+\sqrt{35})(\sqrt{95}-\sqrt{35})$

⑤ $(\sqrt{67}+7)(\sqrt{67}-7)$　　⑥ $(2\sqrt{5}+3)(2\sqrt{5}-3)$

4. 化簡下列各式：

① $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$　　② $\sqrt{8-2\sqrt{12}}$

③ $\sqrt{5-\sqrt{24}}$　　④ $\sqrt{18-8\sqrt{5}}$

⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{11}}$　　⑥ $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$

⑦ $\dfrac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$　　⑧ $\dfrac{29}{\sqrt{7}-6}$

進階題

5. 化簡下列各式：

① $\sqrt{\dfrac{14-2\sqrt{48}}{2}}$　　② $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

③ $\sqrt{1+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}}$　　④ $\dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

⑤ $\dfrac{1}{2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

6. 已知$\sqrt{11}$的小數部份爲 a，求$\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{2}$的值。

四、一元二次方程式

就一般而言，凡是使得方程式等號成立的數稱之爲方程式的**解**；而使得多項式的值爲零的數稱之爲多項式的**根**。因此，一元二次方程式的解就是所對應的二次多項式的根。所以，我們也稱此類方程式的解爲根。

我們將先介紹常見的一元二次方程式的三種解法：**因式分解法**、**配方法**和**公式解**，然後在 4-2 節中利用判別式來探討兩根的特性，至於根與係數之間的關係，則在附錄 A2 中討論。

4-1 一元二次方程式的解法

【因式分解法】

因爲一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$（a、b 和 c 爲實數且 $a\neq 0$）的左式爲二次多項式，如果我們能將這個多項式因式分解成兩個一次多項式的乘積，就很容易求得方程式的解。我們以下面的例子來說明這種解法。

【範例 1】 求$2x^2+1=5x-1$的解。

【解】 利用移項可把原方程式改寫爲 $2x^2-5x+2=0$。

由因式分解，可得 $2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

因此，原方程式改寫爲 $(2x-1)(x-2)=0$

所以，可得 $2x-1=0$或$x-2=0$

即 $x=\dfrac{1}{2}$或$x=2$。

【類題練習 1】 求$3x^2+10x+3=0$的解。

【配方法】

我們也可以利用配方及平方根的概念來解方程式，例如將 $x^2-4x+2=0$ 改寫為 $(x-2)^2-2=0$ 的形式，進而解得 $x=2\pm\sqrt{2}$。其過程如下：

配方 $\quad x^2-4x+2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+2=0$

即 $\quad \Rightarrow (x-2)^2-2=0$

左式可寫成完全平方式 $\quad \Rightarrow (x-2)^2=2$

∵右式為正，兩邊開平方 $\quad \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{2}$

$\quad \Rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

上面的例子是先利用配成完全平方式的方法，將方程式改寫成 $(x-h)^2=k$ 的形式。當 $k\geq 0$ 時，我們就可以利用平方根的概念來解題：

$$(x-h)^2-k=0$$

即 $\quad (x-h)^2=k\geq 0$

兩邊同時開方 $\quad \Rightarrow x-h=\pm\sqrt{k}$

移項 $\quad \Rightarrow x=h\pm\sqrt{k}$

註：$x=h\pm\sqrt{k}$ 表示 $x=h+\sqrt{k}$ 或 $x=h-\sqrt{k}$。

我們將這個方法稱為配方法，也就是配成完全平方的意思。

【範例 2】求下列各方程式的解：

(1) $x^2-6x+8=0$ $\qquad$ (2) $2x^2+4x-6=0$

【解】 (1) $x^2-6x+8=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+8=0$

$\Rightarrow (x-3)^2-1=0$

$\Rightarrow (x-3)^2=1$

$\Rightarrow x-3=\pm 1$

$\Rightarrow x-3=1$ 或 $x-3=-1$

$\Rightarrow x=4$ 或 $x=2$

(2) $2x^2+4x-6=0 \Rightarrow x^2+2x-3=0$

$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot 1+1-1-3=0$

$\Rightarrow (x+1)^2-4=0$

$\Rightarrow (x+1)^2=4$

$\Rightarrow x+1=\pm 2$

$\Rightarrow x+1=2$ 或 $x+1=-2$

$\Rightarrow x=1$ 或 $x=-3$

在上例中，我們當然也可用十字交乘法來做因式分解。但下面的例題，因不易做因式分解，所以配方法會成爲一個很好用的解法。

【範例 3】求下列各方程式的根：

(1) $x^2-6x+2=0$ (2) $3x^2+5x-4=0$

【解】 (1) $x^2-6x+2=0 \Rightarrow x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+2=0$

$\Rightarrow (x-3)^2-7=0$

$\Rightarrow (x-3)^2=7$

$\Rightarrow x-3=\pm\sqrt{7}$

$\Rightarrow x-3=\sqrt{7}$ 或 $x-3=-\sqrt{7}$

$\Rightarrow x=3+\sqrt{7}$ 或 $x=3-\sqrt{7}$

註：我們常以 $x=3\pm\sqrt{7}$ 來表示 $x=3+\sqrt{7}$ 或 $x=3-\sqrt{7}$ 。

(2) $3x^2+5x-4=0 \Rightarrow x^2+\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}=0$

$\Rightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{6}+(\frac{5}{6})^2-(\frac{5}{6})^2-\frac{4}{3}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{6})^2-\frac{73}{36}=0$

$\Rightarrow (x+\frac{5}{6})^2=\frac{73}{36}$

$\Rightarrow x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{73}}{6}$

$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{73}}{6}$

【類題練習 2】利用配方法求下列各式的解：

(1) $x^2-3x-1=0$　　(2) $4x^2-3x-2=0$

【想想看】在範例 3 第(1)題中，

兩個根的和為 $(3+\sqrt{7})+(3-\sqrt{7})=6$，

兩個根的積為 $(3+\sqrt{7})\times(3-\sqrt{7})=3^2-(\sqrt{7})^2=9-7=2$。

在範例 3 第(2)題中，

兩個根的和為 $\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}+\dfrac{-5-\sqrt{73}}{6}=-\dfrac{5}{3}$，

兩個根的積為 $\dfrac{-5+\sqrt{73}}{6}\times\dfrac{-5-\sqrt{73}}{6}=\dfrac{5^2-(\sqrt{73})^2}{6^2}$

$=-\dfrac{48}{36}=-\dfrac{4}{3}$。

同學們能看出這兩個方程式的兩根和與積似乎和方程式的係數之間有著某種關係嗎？

【公式解】

將配方法運用在一般式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ 的求解時，其步驟如下：

方程式	$ax^2+bx+c=0$	$(a\neq 0)$
兩邊同除以 a	$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$	
配方	$x^2+2\cdot x\cdot\dfrac{b}{2a}+(\dfrac{b}{2a})^2-(\dfrac{b}{2a})^2+\dfrac{c}{a}=0$	
化簡	$(x+\dfrac{b}{2a})^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}=0$	
左式可化為完全平方	$(x+\dfrac{b}{2a})^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$	

這個結果與前面 $(x-h)^2=k$ 的形式相同，因為 $(x+\dfrac{b}{2a})^2$ 恆為正數或 0，所以當 $b^2-4ac\geq 0$ 時，我們得到

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\text{ ，}$$

即

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ （或寫成 }x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ ）。}$$

也就是說，當$b^2-4ac\geq 0$時，方程式$ax^2+bx+c=0$的解爲：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 或 }x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 。}$$

雖然利用配方法解一元二次方程式的程序較爲複雜，但觀察其過程，每一步驟都有跡可循。若避開繁複的運算過程，直接將方程式的係數代入這個解的通式，即可得到方程式的解。因此，我們利用上面的通式求解，稱爲**公式解**。

雖然我們將在下一節中，才會完整的討論如何由b^2-4ac的符號來了解方程式$ax^2+bx+c=0$兩個根的特性，在這裡仍先稱b^2-4ac爲方程式**根的判別式**。

【範例 4】用公式解求$x^2-6x+2=0$的解。

【解】 先檢驗判別式是否大於 0 或等於 0。因爲$b^2-4ac=28>0$，所以方程式有實數解。由公式解得知：

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{28}}{2\times 1}$$

$$=\frac{6\pm 2\sqrt{7}}{2}$$

$$=3\pm\sqrt{7}$$

【類題練習 3】利用公式解下列方程式：

(1) $x^2-3x-1=0$ (2) $4x^2-3x-2=0$

我們可以利用一元二次方程式的解法，來解某些特殊類型的方程式，現在來看下面的例子。

【範例 5】已知一個正數比其倒數的兩倍多 1，求此數。

【解】 設此正數爲 x。

依題意列式 $x-2\cdot\frac{1}{x}=1$

兩邊同乘以 x，得 $x^2-2=x$

移項得一元二次方程式 $x^2-x-2=0$

$\because\ x^2-x-2=(x+1)(x-2)=0$

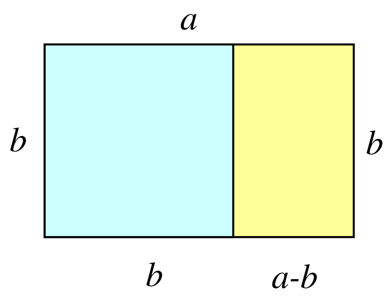
$\therefore\ x=2$ 或 $x=-1$（不合題意）

所以，此正數爲 2。

【類題練習 4】解方程式 $3x+\frac{2}{x}=6$。

【範例 6】一個長爲 a，寬爲 b 的矩形，如果它的長與寬滿足 $\frac{b}{a}=\frac{a-b}{b}$ 的關係，我們稱之爲「**黃金矩形**」。求黃金矩形的長與寬的比值爲何？

【解】 令 $\frac{a}{b}=x$。



$\because\ \frac{b}{a}=\frac{a-b}{b}=\frac{a}{b}-\frac{b}{b}=\frac{a}{b}-1$

$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{a}{b}-1\Rightarrow\frac{1}{x}=x-1$

再來解分式方程式 $\frac{1}{x}=x-1$。

兩邊同乘以 x，得 $1=x^2-x$

移項得 $x^2-x-1=0$

利用根的公式，可得

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$$

所以，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$(負的不合)。

因此，長與寬的比值爲 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$(約爲 1.6)。

【類題練習 5】 解方程式 $\dfrac{x}{x^2-1}+\dfrac{x^2-1}{x}=\dfrac{13}{6}$ 。

【重點整理】

1. 一元二次方程式的解法中常用的有因式分解法、配方法及公式法。
2. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式爲 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 。
3. 形如 $ax+\dfrac{b}{x-c}=d$ 的分式方程式，可用通分或去分母化成一元二次方程式來求解，但須注意求得的解應檢驗是否使分母爲 0。

【家庭作業】

基礎題

1. 解下列各方程式：

① $\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{7}{6}x-1=0$　　② $(x-3)^2-2(x-3)-3=0$

③ $x^2+3=6x$　　④ $-0.5x-0.1x^2=0.5$

2. ① 已知$3x^2-6x-21$可化爲$3(x+p)^2+q$的形式，求p、q的值。

② 利用①求方程式$3x^2-6x-21=0$的兩根。

進階題

3. 已知$-\frac{1}{2}$爲$ax^2+3x-a=0$的一根，求a的值及另一根。

4. 設$\frac{-1+\sqrt{2}}{2}$爲方程式$4x^2+4x+c=0$的一根，求c的值。

5. 解下列各方程式：

① $\frac{x+5}{7}=\frac{1}{x-1}$　② $x+\frac{2}{x-2}=5$　③ $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$

6. 若x滿足$x+\frac{1}{x}=-4$，求$x-\frac{1}{x}$的值。

7. 已知某水果商人以 6000 元買進芒果一批。淘汰賣相不佳的芒果 30 公斤，其餘的以每公斤按成本價加 10 元賣出，商人共得款 8100 元。問此商人原先買進芒果多少公斤？

4-2 根的判別

在前一節中，我們利用配方法將方程式 $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$改寫為 $(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$。因為 $(x+\frac{b}{2a})^2$ 恆為正數或 0，所以右式 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ 中的分子 b^2-4ac 必須為正數或 0 時，此方程式才會有實數解。當 $b^2-4ac<0$ 時，我們不可能找到一個實數 x 使得 $(x+\frac{b}{2a})^2$ 等於 $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，所以此方程式沒有實數解。因此，一個一元二次方程式有沒有實數解，便可由 $b^2-4ac\geq 0$，或 $b^2-4ac<0$ 來判別，故稱 b^2-4ac 為「**根的判別式**」或簡稱為「**判別式**」。

現在將方程式 $ax^2+bx+c=0$ 根的判別規則整理如下：

(1) 若 $b^2-4ac>0$，則方程式的兩根為：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ 或 } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

因為兩根均為實數且不相等，所以稱此方程式有**兩個相異實根**。

(2) 若 $b^2-4ac=0$，則兩根為相等實數。所以稱此方程式有**兩個相等實根**，或稱此方程式有一個**二重根**，並常以 $x=-\frac{b}{2a}$ (**重根**)來表示。

(3) 若 $b^2-4ac<0$，則此方程式**無實根**。

【範例 1】 判別下列方程式是否有兩個相異實根，一個二重根或沒有實數根：

(1) $x^2+3x-5=0$　　(2) $2x^2-5x+6=0$　　(3) $-x^2+6x-9=0$

【解】 (1) $\because$ 判別式 $b^2-4ac=3^2-4\times1\times(-5)=29>0$

$\therefore$ 方程式有兩個相異實根：

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-5)}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

(2) $\because$ 判別式 $b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times6=-23<0$

$\therefore$ 方程式沒有實數根

(3) $\because$ 判別式$b^2-4ac=6^2-4\times(-1)\times(-9)=0$

$\therefore$ 方程式有一個二重根：

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times(-1)\times(-9)}}{2\times(-1)}$$

$$=\frac{-6\pm\sqrt{0}}{-2}=3(\text{重根})$$

【類題練習 1】判別下列方程式是否有兩個相異實根，一個二重根或沒有實數根：

(1) $2x^2-4x+1=0$ (2) $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2=0$

(3) $(a+1)x^2+4x+2=0$，其中 $a>1$。

【範例 2】已知一元二次方程式$ax^2+ax+2=0$有一個二重根，求 a 的值。

【解】 原方程式有一個二重根$\Rightarrow$判別式等於 0

即 $a^2-4\cdot a\cdot 2=0\Rightarrow a(a-8)=0$

$\Rightarrow a=0$或$a=8$

因爲二次項係數 a 不能爲 0，所以 $a=8$。

【類題練習 2】已知 a 爲正整數且方程式$x^2-ax+3=0$有兩個相異根，求 a 的最小值。

在高一上的第一章中，同學們會學習複數(complex number)的記法 $a+bi$，其中 a、b 爲實數，且$i^2=-1$，也就是說，$\sqrt{-1}=i$。所以，範例 1 第(2)題中的方程式$2x^2-5x+6=0$沒有實數根，但是 $x=\frac{5\pm\sqrt{23}i}{4}$是這個方程式的複數根。

【重點整理】

1. $ax^2+bx+c=0$的根有下列性質：

   (1) 若$b^2-4ac>0$，兩根爲相異實根；

   (2) 若$b^2-4ac=0$，兩根爲重根；

   (3) 若$b^2-4ac<0$，無實根。

【家庭作業】

基礎題

1. 判別下列方程式兩根的性質：

① $x^2-8x-20=0$　　② $6x^2-7x+3=0$

③ $16x^2+8x+1=0$　　④ $x^2+3=0$

⑤ $\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{16}=0$　　⑥ $2x^2-2\sqrt{3}x+3=0$

進階題

2. 設 a 爲任意實數，請問 $x^2+2ax+a=1$ 兩根的性質爲何？

3. 設 m、n 爲相異兩數，請判別 $(m^2+n^2)x^2+2(m+n)x+2=0$ 兩根的性質。

4. 若方程式 $3x^2+4x+2(k-1)=0$ 有實根，則最大的整數 k 值爲何？

5. 已知 $3x^2+(k-24)x+k=0$ 有一個二重根，求 k 的值。

6. 已知一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的係數滿足 $ac<0$，則此方程式有幾個實根？

五、數列與級數

5-1 等差數列

將一些(通常為有限個)數排成一列，稱為(有限)數列。在一數列中，我們稱第一個數為**第一項**或**首項**(通常記為a_1)，第二個數為**第二項**(通常記為a_2)，⋯。當數列只有有限個項時，最後一個數則稱為**末項**。例如：在數列20，30，40，50，60，70中，首項為20，第二項為30，末項為70。

如果在一數列中，任意相鄰兩項的後面的項減去前面的項所得的差都是一樣，就稱此數列為**等差數列**，並稱所得的差為**公差**。通常以d代表公差，a_1代表首項，a_n代表第n項。

例如：在數列20，30，40，50，60，70中，

$$20 \xrightarrow{10} 30 \xrightarrow{10} 40 \xrightarrow{10} 50 \xrightarrow{10} 60 \xrightarrow{10} 70$$

首項$a_1=20$，末項$a_6=70$，又因為後面的項減去前面的項所得的差都是10，所以這是一個公差為10的等差數列。

又如：在數列7，4，1，-2，-5，-8，-11中，

$$7 \xrightarrow{-3} 4 \xrightarrow{-3} 1 \xrightarrow{-3} -2 \xrightarrow{-3} -5 \xrightarrow{-3} -8 \xrightarrow{-3} -11$$

首項$a_1=7$，末項$a_7=-11$，又因為後面的項減去前面的項所得的差都是-3，所以這是一個公差為-3的等差數列。

【範例1】在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成為等差數列：

(1)　5，8，______，______。

(2)　3，-1，______，______。

【解】　(1) 因為公差$d=8-5=3$，所以此數列為

5，8，$\underline{11}$，$\underline{14}$。

(2) 因為公差 $d=-1-3=-4$，所以此數列為

3，-1，$\underline{-5}$，$\underline{-9}$。

【類題練習1】在下列空格中填入適當的數，使得每個數列成為等差數列：

(1) 5，11，_____，_____，_____。

(2) -2，-9，_____，_____。

如果一個等差數列的首項為 a_1，公差為 d，則由等差數列的定義可知：

第二項　$a_2=a_1+d=a_1+(2-1)d$；

第三項　$a_3=a_1+2d=a_1+(3-1)d$；

第四項　$a_4=a_1+3d=a_1+(4-1)d$；

$\vdots$

第 n 項　$a_n=a_1+(n-1)d$

【範例 2】(1) 已知一個等差數列的首項為 18 且公差為 $\frac{1}{2}$，求第十二項。

(2) 求等差數列 90，77，64，…的公差及第十三項。

(3) 已知某等差數列的首項為 6 且第四項為 18。求其公差並寫出此數列的前五項。

【解】

(1) $a_{12}=a_1+(12-1)d=18+(12-1)\times\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$

(2) $\because$ 首項為 90，公差為 $77-90=-13$

$\therefore$ $a_{13}=90+(13-1)\times(-13)=-66$

(3) 假設公差為 d。

$\because$ $a_1=6$，$a_4=18$ 且 $a_4=a_1+(4-1)d$

$\therefore$ $18=6+3d$

$\Rightarrow$ $d=4$

所以公差為 4，且前五項為 6，10，14，18，22。

【類題練習 2】(1) 已知某等差數列的首項爲 16 且公差爲 3，求第二十項。

(2) 求等差數列 -35，-29，…的公差及第十項。

(3) 已知某等差數列的首項爲 2 且第三項爲 -8，求其公差並寫出此數列的前六項。

事實上，由 $a_m=a_1+(m-1)d$，$a_n=a_1+(n-1)d$，可得

$$a_n-a_m=(n-m)d，$$

也就是說，

$$a_n=a_m+(n-m)d。$$

【範例 3】(1) 已知某等差數列的第五項爲 11，且公差爲 3，求第十四項。

(2) 已知某等差數列的第三項爲 9，且第六項爲 21，求首項、公差及第十項。

【解】 (1) $\because\ a_{14}=a_5+(14-5)\,d$

$\therefore\ a_{14}=a_5+9d$

$\Rightarrow\ a_{14}=11+9\times3=38$

答：第十四項爲 38。

(2) $\because\ a_6=a_3+(6-3)\,d$

$\therefore\ 21=9+3d$

$\Rightarrow\ d=4$

又 $a_3=a_1+(3-1)\,d$

$9=a_1+2\times4$

$\Rightarrow\ a_1=1$

$a_{10}=a_1+(10-1)\,d$

$=1+9\times4$

$=37$

答：首項爲 1，公差爲 4，第十項爲 37。

【類題練習 3】已知某等差數列的第三項爲 10 且公差爲 5，求首項及第二十項。

【範例 4】已知-243，-237，-231，$\cdots$ 爲一等差數列。請問第幾項開始爲正數？

【解】 設第n項開始爲正數。

$\because$ $a_1=-243$，公差$d=-237-(-243)=6$

$\therefore$ $a_n=-243+(n-1)\times 6>0$

$\Rightarrow$ $6n-249>0$

$\Rightarrow$ $n>41\frac{1}{2}$

因爲 n 必須爲正整數，所以 n 最小爲 42。

答：第 42 項開始爲正數。

【類題練習 4】已知 241，215，$\cdots$ 爲一等差數列。請問第幾項開始爲負數？

若 a，b，c 三數爲一等差數列，則稱 b 爲 a 與 c 的**等差中項**(或**算術中項**或**算術平均數**)。例如：9 是 5 與 13 的等差中項。換句話說，當 a，b，c 三數成等差數列時，由 $b-a=c-b$ 可知 $2b=a+c$，所以 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

【範例 5】找出適當的 m 值使得-1，m 和 5 三數爲一等差數列。

【解】 $\because$ $2m=-1+5=4$

$\therefore$ $m=2$

【類題練習 5】找出適當的 n 值使得 8，n，2 三數成等差數列。

【重點整理】

1. 在一數列中，如果任意相鄰兩項的後面的項減去前面的項所得的差都是一樣，就稱此數列爲等差數列，並稱所得的差爲公差。通常以 d 代表公差，a_1 代表首項，a_n 代表第 n 項。
2. 如果一個等差數列的首項爲 a_1，公差爲 d，則第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$。
3. 等差數列第 n 項 a_n 與第 m 項 a_m 的關係式爲 $a_n=a_m+(n-m)d$。
4. 若 a，b，c 三數成等差數列，則稱 b 爲 a 與 c 的等差中項，且 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

【家庭作業】

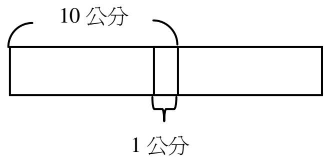
基礎題

1. 在下列各空格中填入適當的數，使得每個數列成爲等差數列：
   ① 6，10，_____，_____。　　② -5，-1，_____，_____。
2. 已知一個等差數列的首項爲 20 且公差爲 $\frac{1}{4}$，求第十三項。
3. 求等差數列 -25，-23，…的公差及第十一項。
4. 已知某等差數列的首項爲 4，且第三項爲 -10，求其公差並寫出此數列的前六項。
5. 已知某等差數列的第三項爲 12，且公差爲 3，求第十八項。
6. 已知某等差數列第二項爲 9，且第七項爲 24，求首項、公差及第九項。
7. 請問等差數列 -141，-132，…從第幾項開始爲正數？
8. 已知 2，7，m 三數爲一等差數列，求 m 的值。

進階題

9. 請問在 2 與 11 之間插入哪兩個數後，可以成爲等差數列？
10. 在 6 與 30 之間插入 5 個數後，成爲等差數列，請問公差爲多少？

11. 某人將寬 10 公分的白紙黏貼起來，如右圖，已知接縫重合處寬度 1 公分。試回答下列問題：



（1）全長 82 公分是幾張白紙黏貼成的？

（2）20 張白紙黏貼成全長幾公分？

5-2 等差級數

一個級數就是將一個數列的各項依次用「＋」號連接。例如：1，5，25，125，625為一個數列，而$1+5+25+125+625$就是一個級數。因此，一個等差級數就是將一個等差數列的各項依次用「＋」號連接。例如：$1+4+7+10$為一個等差級數。

如果一個等差級數共有n項，其首項為a_1，末項為a_n，公差為d，則這個等差級數的和通常以S_n表示，即

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n 。$$

由

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [a_1 + (n-1)d] \qquad ①$$

將①式等號右邊各項的順序重新排列成為

$$S_n = [a_1 + (n-1)d] + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 , \qquad ②$$

再將①、②兩式相加，即可得到：

$$2S_n = \underbrace{[2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \cdots + [2a_1 + (n-1)d]}_{\text{共 } n \text{ 組}}$$

$$2S_n = n[2a_1 + (n-1)d] \;\Rightarrow\; S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

$$\Rightarrow\; S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

如果已經知道等差級數的首項，公差和項數，就可用下列的公式來求等差級數的和：

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

當然，如果已經知道等差級數的首項，末項和項數，就可用下列的公式來求等差級數的和：

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

【範例1】(1) 已知一等差級數的首項為3且公差5，求前20項的和。

(2) 求等差級數$-16+(-13)+(-10)+\cdots+$第十五項的和。

(3) 求等差級數$18+21+24+\cdots+45$的和。

【解】 (1) $\because$ 首項$a_1=3$，公差$d=5$，項數$n=20$

$$\therefore\ S_{20}=\frac{20\left[2a_1+(20-1)d\right]}{2}=\frac{20\left[2\times3+(20-1)5\right]}{2}=1010$$

(2) $\because$ 首項$a_1=-16$，公差$d=-13-(-16)=3$

$$\therefore\ S_{15}=\frac{15\left[2a_1+(15-1)d\right]}{2}=\frac{15\left[2\times(-16)+(15-1)\times3\right]}{2}=75$$

(3) 假設此數列共有n項。

$\because$ 首項$a_1=18$，公差$d=21-18=3$

$\therefore$ 末項 $a_n=18+(n-1)\times3=45$

$\Rightarrow$ 項數 $n=10$

$$\therefore\ S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(18+45)}{2}=315$$

【類題練習 1】(1) 求等差級數 $217+225+233+\cdots+$第九項的和。

(2) 求等差數列-1，-4，-7，…的前10項的和。

(3) 求等差級數 $7+14+21+\cdots+196$的和。

【範例2】(1) 已知一等差級數的首項為8，前十項和為200，求公差及第十項。

(2) 設一等差級數的首項為15，末項為-42，和為-270，求此等差級數的項數及公差。

(3) 已知等差級數$(-6)+(-2)+2+\cdots+$第n項的和為64。求n的值。

【解】 (1) 設公差為d。

$\because$ 首項$a_1=8$，項數$n=10$

$$\therefore\ S_{10}=\frac{10\left[2\times8+(10-1)d\right]}{2}=200$$

$\Rightarrow\ d=\dfrac{8}{3}$

$\Rightarrow\ a_{10}=8+9\times\dfrac{8}{3}=32$

(2) 假設數列共有n項，公差d。

$\because$ 首項$a_1=15$，末項$a_n=-42$

$\therefore\ S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n[15+(-42)]}{2}=-270\ \Rightarrow\ n=20$

$\because\ a_{20}=-42=15+(20-1)\times d$

$\therefore\ d=-3$

(3) $\because\ a_1=-6$，$d=(-2)-(-6)=4$

$\therefore\ S_n=\dfrac{n[2\times(-6)+(n-1)\times 4]}{2}=64$

$\Rightarrow\ \dfrac{n(-12+4n-4)}{2}=64$

$\Rightarrow\ \dfrac{4n^2-16n}{2}=64$

$\Rightarrow\ 4n^2-16n-128=0$

$\Rightarrow\ n^2-4n-32=0$

$\Rightarrow\ (n+4)(n-8)=0$

$\Rightarrow\ n=8$或$n=-4$(不合，因爲項數必須爲正數。)

【類題練習2】(1) 設一等差級數的首項爲4，前十項和爲100，求公差及第十項。

(2) 設一等差級數的首項爲20，末項爲92，和爲616，求此等差級數的項數及公差。

(3) 已知等差級數$11+14+17+\cdots+$第n項的和爲245，求n的值。

【範例 3】 已知某戲院共有 30 排座位，依次每一排比前一排多 2 個座位，且最後一排有 82 個座位，請問這家戲院共有多少個座位？

【解】 假設第一排有 a_1 個座位。

$\because$ $n=30$，$d=2$，$a_{30}=82$

$\therefore$ $a_{30}=a_1+(30-1)\times 2=82$

$\Rightarrow$ $a_1=24$

$$\Rightarrow\ S_{30}=\frac{30(24+82)}{2}=1590$$

答：共有 1590 個座位。

【類題練習 3】 已知某戲院共有 20 排座位，依次每一排比前一排多 4 個座位，且最後一排有 92 個座位，請問這家戲院共有多少個座位？

【範例 4】 100 到 300 的整數中，所有 7 的倍數的和等於多少？

【解】 $\because$ 在 100 到 300 的整數中，7 的倍數中最小的爲 105，7 的倍數中最大的爲 294。

$\therefore$ $a_1=105$，$a_n=294$，$d=7$

$\Rightarrow$ $294=105+(n-1)\times 7$

$\Rightarrow$ $n=28$

$$\Rightarrow\ S_{28}=\frac{28(105+294)}{2}=5586$$

【範例 5】 有一凸 n 邊形，內角度數依次成等差數列，公差爲 10°，角度最小的爲 99°，則 n 爲多少？

【解】 依題意列式 $180(n-2)=\dfrac{n\left[2\times 99+(n-1)\times 10\right]}{2}$

$$\Rightarrow\ 180(n-2)=\frac{n\left[10n+188\right]}{2}$$

$\Rightarrow$ $5n^2-86n+360=0$

$\Rightarrow\ n=10$ 或 $\dfrac{36}{5}$（不合）

答：$n=10$

【類題練習 4】 200 到 400 的整數中，能被 3 整除的所有數的和等於多少？

【重點整理】

1. 若一個等差級數共有 n 項，且其首項爲 a_1，末項爲 a_n，公差爲 d，則此級數的和爲 S_n ，其中 $S_n=\dfrac{n\left[2a_1+(n-1)d\right]}{2}$ 或 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 。

【家庭作業】

基礎題

1. 求等差級數 $17+25+33+\cdots+$ 第十項的和。
2. 求等差數列 -2，-5，-8，$\cdots$ 的前 20 項的和。
3. 求等差級數 $3+6+9+\cdots+210$ 的和。
4. 設一等差級數的首項爲 5，前十一項和爲 440，求公差及第十項。
5. 已知等差級數 $(-10)+(-4)+2+\cdots+$ 第 n 項的和爲 170，求 n 的值。
6. 設某一三角形的三個角的度數成等差數列，若已知最大的角是 105 度，則最小的角是幾度？
7. 假設一等差數列的前十項和爲 120，前九項和爲 99，求公差。

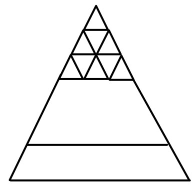
進階題

8. 從 100 到 500 的整數中，試回答下列問題:

 ① 除以 5 餘 2 的整數共有多少個？

 ② 承①，所得整數的總和是多少？

9. 如右圖：第一排有一個三角形，第二排有 3 個三角形，第三排有 5 個三角形，依此類推，共有 11 排。試回答下列問題：



（1）第 11 排有幾個三角形？

（2）全部共有幾個三角形？

10. 在 4 與 28 之間插入 5 個數後，成爲等差數列，請問這 5 個數和爲多少？

11. 在 1 與 49 之間，插入 m 個數，使其成爲一等差數列，且其總和爲 250，則 m 爲多少？

12. 等差級數共有 15 項，且知第 8 項爲 5，求此級數和。

13. 自 1 到 50 的正整數中，2 或 3 的倍數共有幾個？它們的和爲多少？

5-3 等比數列

觀察數列：2，6，18，54，162，⋯，我們發現：$\frac{6}{2}=\frac{18}{6}=\frac{162}{54}=\cdots=3$。

如果一個數列，任意相鄰兩項的後面一項與前面一項的比值相等時，則稱此數列爲**等比數列**。我們稱其比值爲**公比**，且通常以 r 表示公比。

如果一個等比數列的首項爲 a_1，公比爲 r，則由等比數列的定義可知：

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_4}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r，$$

即

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1r\ ；\\
a_3 &= a_2r=a_1r\cdot r=a_1r^2=a_1r^{3-1}\ ；\\
a_4 &= a_3r=a_2r\cdot r=a_1r\cdot r\cdot r=a_1r^3=a_1r^{4-1}\ ；\\
&\ \ \vdots\\
a_n &= a_{n-1}r=a_{n-2}r\cdot r=\cdots=a_1r^{n-1}\ 。
\end{aligned}$$

【範例 1】在下列各空格填入適當的數，使得每個數列成爲等比數列：

(1) 5，10，_____，_____。

(2) -5，15，_____，_____。

【解】 (1) 因爲公比 $r=10\div5=2$，所以此數列爲

5，10，<u>20</u>，<u>40</u>。

(2) 因爲公比 $r=15\div(-5)=-3$，所以此數列爲

-5，15，<u>-45</u>，<u>135</u>。

【類題練習 1】在下列空格中填入適當的數，使得每個數列成爲等比數列：

(1) 2，10，_____，____。

(2) 3，-15，_____，_____。

事實上，由$a_n=a_1r^{n-1}$，$a_m=a_1r^{m-1}$可知

$$a_n\div a_m=a_1r^{n-1}\div(a_1r^{m-1})=r^{(n-1)-(m-1)}=r^{n-m}，$$

也就是說，

$$a_n=a_mr^{n-m}。$$

【**範例 2**】(1) 已知某一等比數列的首項爲 10，公比爲 2，求第四項。

(2) 已知某一等比數列的首項爲 16，第四項爲 2。寫出此數列的前五項。

(3) 已知某一等比數列第三項爲－12，第六項爲 96，求首項及公比。

(4) 已知某一等比數列第四項爲 24，公比爲－2，求第八項。

【**解**】 (1) $a_4=a_1r^{4-1}=10\times2^{4-1}=80$

(2) 設公比爲 r。

$\because$ 首項 $a_1=16$，第四項 $a_4=2$

$\therefore$ $a_4=a_1r^3=16r^3=2$

$\Rightarrow$ $r^3=\frac{1}{8}$，$r=\frac{1}{2}$

所以，前五項爲 16，8，4，2，1。

(3) 由 $a_6=a_3r^{6-3}$

可得 $96=-12r^3$

$\Rightarrow$ $r=-2$

由 $a_3=a_1r^{3-1}$

可得 $-12=a_1(-2)^2$

$\Rightarrow$ $a_1=-3$

所以，首項爲－3，公比爲－2。

(4) $a_8=a_4r^{8-4}$

$=24\times(-2)^4$

$=384$

【類題練習 2】 (1) 已知某一等比數列的首項為 2，公比為 3，求第五項。

(2) 已知某一等比數列的首項為 4，第四項為 32。寫出此數列的前五項。

(3) 已知某一等比數列第二項為8，第五項為1，求首項及公比。

(4) 已知某一等比數列第七項為 64，公比為 2，求第十項。

【範例3】 籃球自1.5公尺處落下，每次反彈的高度為上次落下高度的$\frac{4}{5}$，求籃球落地後第三次反彈高度。

【解】 因為每次反彈的高度為上次落下高度的$\frac{4}{5}$，所以，第三次反彈高度為 $1.5\times(0.8)^3=0.768$(公尺)。

答：0.768公尺

【範例 4】 假設某鎮每年的人口數逐年成長且成一等比數列，已知此鎮十年前約有 10 萬人，現在約有 20 萬人，那麼二十年後，此鎮人口約有多少人？

【解】 因為十年前人口為 10 萬人，若設每年人口成長率為 r，所以經過 10 年此鎮人口成長為 $10r^{10}$ 萬人。也就是說，

$$10r^{10}=20$$

即 $$r^{10}=2$$

再經過 20 年，人口成長為：

$$\begin{aligned}20\times r^{20}&=20\times(r^{10})^2\\&=20\times(2)^2\\&=80\text{（萬人）}\end{aligned}$$

答：80萬人

【類題練習3】 假設某發卡銀行開辦信用卡業務，第一年的辦卡總張數爲10000張，第二年的新辦卡總張數爲20000張，預計逐年的新辦卡張數成一等比數列。那麼第五年新辦卡總張數爲幾張？

【比例中項】

當 a，b，c 三數爲一等比數列時，稱 b 爲 a 與 c 的**等比中項**(或者稱爲或**比例中項**)。例如：10 是 5 與 20 的等比中項。

如果 a，b，c 三數爲一等比數列，由 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ 可知 $b^2=ac$，所以 $b=\pm\sqrt{ac}$。

【範例 5】 已知 -2，m，-8 三數成等比數列，求 m 的值。

【解】 $\because m^2=(-2)(-8)=16$

$\therefore m=\pm 4$

【類題練習4】 已知5，m，20三數成等比數列，求m的值。

【重點整理】

1. 在一個數列中，如果任意相鄰兩項的後項與前項的比值相等時，則稱此數列爲等比數列。我們稱其比值爲公比，且通常以r表示之。
2. 如果等比數列首項爲 a_1 時，那麼第 n 項 $a_n=a_1r^{n-1}$。
3. 等比數列中，第 n 項 a_n 與第 m 項 a_m 的關係式爲 $a_n=a_mr^{n-m}$。
4. 當a、b、c三數成等比數列時，我們稱b爲a與c的等比中項，且$b=\pm\sqrt{ac}$。

【家庭作業】

基礎題

1. 在下列各空格填入適當的數，使得每個數列成爲等比數列：

 ① 3，18，______，______。 ② -8，2，______，______。

2. 已知某一等比數列的首項爲 4，公比爲 2，求第五項。
3. 已知某一等比數列的首項爲8，第四項爲1，寫出此數列的前五項。
4. 已知某一等比數列第三項爲 24，第六項爲 3，求首項及公比。
5. 已知某一等比數列第五項爲 24，公比爲 2，求第十項。
6. 已知 2，m，18 三數成等比數列，求 m 的值。
7. 已知放射性同位素碳 14 之半衰期約爲 6000 年，今有此元素 6×10^{23} 個原子，請問 24000 年後原子個數多少個？(說明：半衰期指放射性原子衰變成原來數量的一半所需的時間。)

進階題

8. 已知 a、b、c、d 四正數成等比數列，且 $a+b=8$，$c+d=72$。求此四個數。
9. 已知四整數 a，b，c，d，其中 a，b，c 爲等比數列，b，c，d 爲等差數列，且 $a+d=7$，$b+c=6$，則此四數爲何？
10. 已知三正數成等差數列，其和爲 30。若各數依次加 1，5，29 後成爲等比數列，則此三數爲何？

5-4 等比級數

如同等差級數，一個**等比級數**就是將一個等比數列的每一項依次用「＋」號連接，例如：若a_1，a_2，a_3，…，a_n為一等比數列，則$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$就是一個等比級數。

如果一個等比級數的公比為r，怎麼計算這個等比級數的和呢？

(1) 當 $r=1$ 時， $S_n=\overbrace{a_1+a_1+a_1+\cdots+a_1}^{\text{共 } n \text{ 項}}=na_1$。

(2) 當 $r\neq 1$ 時， $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$。

所以 $S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\cdots+a_1r^{n-2}+a_1r^{n-1}$ ①

各項乘以 r， $rS_n=a_1r+a_1r^2+a_1r^3+\cdots+a_1r^{n-1}+a_1r^n$ ②

將①、②兩式相減即可得到：

$$rS_n-S_n=(r-1)S_n$$

$$=(\cancel{a_1r}-a_1)+(\cancel{a_1r^2}-\cancel{a_1r})+(\cancel{a_1r^3}-\cancel{a_1r^2})+\cdots+(\cancel{a_1r^{n-1}}-\cancel{a_1r^{n-2}})$$

$$+(a_1r^n-\cancel{a_1r^{n-1}})$$

$\Rightarrow$ $(r-1)S_n=a_1r^n-a_1=a_1(r^n-1)$

因此，

$$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}\ \ (\text{或寫成 } S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r})\text{。}$$

※特別說明：當 $a_1=1$，$n=3$ 時，$S_3=1+r+r^2=\dfrac{1-r^3}{1-r}$ ③

由③式可得$(1+r+r^2)(1-r)=1-r^3$，此與立方差公式

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ 中，$a=1$、$b=r$ 代入的結果相同。

【範例 1】(1) 已知某一等比級數的首項為 7，公比為 3，且有 10 項，求此級數的和。

(2) 已知一等比級數，首項為 4，公比為 2，和為 1020，求項數。

【解】 (1) 因為 $S_{10}=\dfrac{7(3^{10}-1)}{3-1}=\dfrac{7}{2}(3^{10}-1)$，

所以，此等比級數的和為 $\dfrac{7}{2}(3^{10}-1)$。

(2) 假設級數有 n 項。

$\because\ S_n=\dfrac{4(2^n-1)}{2-1}=1020$

$\therefore\ 2^n-1=255 \Rightarrow 2^n=256=2^8 \Rightarrow n=8$

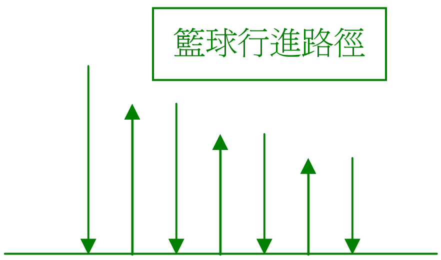
所以，項數為 8。

【類題練習 1】 (1) 已知某一等比級數的首項為 5，公比為 2，且有 5 項，求此級數的和。

(2) 已知某一等比級數的首項為 3，公比為 2，且和為 93。求此級數的項數。

【範例2】 籃球自 $1\dfrac{1}{2}$ 公尺處落下，每次反彈的高度為上次落下高度的 $\dfrac{4}{5}$，求籃球開始落下至第四次著地所經過的總路程共有幾公尺？

【解】 因為每次反彈的高度為上次落下高度的 $\dfrac{4}{5}$，所以，我們知道：



第一次反彈高度為 $1\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}$ 公尺，因此由第一次落地反彈後再落地時，所經過的總路程為 $2\times(1\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5})$ 公尺；

第二次反彈高度為 $1\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{4}{5})^2$ 公尺，因此由第二次落地反彈後再落地時，所經過的總路程為 $2\times[1\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{4}{5})^2]$ 公尺；依此類推，籃球開始落下至第四次著地所經過的總路程為

$$1\frac{1}{2}+2\times1\frac{1}{2}\times[\frac{4}{5}+(\frac{4}{5})^2+(\frac{4}{5})^3]$$

$$=1\frac{1}{2}+3\times\frac{\frac{4}{5}\left[1-(\frac{4}{5})^3\right]}{1-\frac{4}{5}}=\frac{1839}{250}\text{公尺。}$$

答：$\frac{1839}{250}$公尺。

【類題練習 2】 一個籃球從 12 公尺自由落下，每次著地後又跳回原高度的 $\frac{3}{4}$再落下，籃球開始落下至第三次著地，共經過多少公尺？

【範例 3】 小華想要開始儲蓄，並計畫每天的存款為前一天的兩倍。第一天存 1 元，請問至少幾天後，儲蓄總金額超過 1000 元？

【解】 我們知道，第一天存 1 元，第二天存 2 元，第三天存 4 元，所以第 n 天需要存 2^{n-1} 元。因此，n 天共存了

$$1+2+4+\cdots+2^{n-1}=\frac{(1-2^n)}{1-2}=(2^n-1)\text{元。}$$

$\because 2^n-1>1000$，即 $2^n>1001$

$\therefore\ n\geq 10\quad(2^9=512\text{，}2^{10}=1024)$

所以，n 最小為 10。

答：10 天後。

【類題練習 3】 小華想要開始儲蓄，並計畫每天的存款為前一天的兩倍。第一天存 1 元，請問至少幾天後，儲蓄總金額超過 500 元？

【範例 4】 將十萬元以定期儲蓄存款方式存入銀行十年，年利率爲 5%，按複利計息，則十年期滿可得本利和多少元？
（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.05^{10} \approx 1.629$）

【解】 由本利和=本金×$(1+\text{利率})^{\text{期數}}$，若令本金 P，利率 r 和期數 n，

可知: 1 期後本利和 $S=P(1+r)$；

2 期後本利和 $S=P(1+r)(1+r)=P(1+r)^2$；

3 期後本利和 $S=P(1+r)^2(1+r)=P(1+r)^3$；

$\vdots$

n 期後本利和 $S=P(1+r)^n$。

因此，10 年期滿可得本利和爲

$$100000\times(1+0.05)^{10}\approx 162900。$$

答：162900 元。

【類題練習 4】 將二十萬元以定期儲蓄存款方式存入銀行三年，年利率爲 2%，按每年複利計息，則三年期滿可得本利和多少元？
（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.02^3 \approx 1.061$）

【範例 5】 某人每年年初在銀行存入 1 萬元，年利率 5%，若按每年複利計算，則十年期滿可得本利和多少元？
（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.05^{10} \approx 1.629$）

【解】 我們知道：

第一年年初存入的 1 萬元，十年後的本利和爲 10000×1.05^{10} 元；

第二年年初存入的 1 萬元，九年後的本利和爲 10000×1.05^{9} 元；

依此類推，

第十年年初存入的 1 萬元，一年後的本利和爲 10000×1.05 元。

因此，十年期滿可得本利和爲

$$\begin{aligned} &10000\times 1.05+10000\times 1.05^2+\cdots+10000\times 1.05^{10} \\ &=10000\times 1.05(1+1.05+\cdots+1.05^9) \\ &=10000\times 1.05\times\frac{1-1.05^{10}}{1-1.05}\approx 132090 \text{ 元} \end{aligned}$$

答：132090 元。

【類題練習 5】銀行優惠存款利率，月息為 1%。每月月初存入 5000 元，按每月複利計算，請問 4 個月期滿本利和為多少元？（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.01^4 \approx 1.0406$）

【範例 6】某人向銀行貸款 100000 元，月利率 0.3% ，每月複利計息，分三個月償還本金及利息。請問每月平均需付多少元？（假設借貸期間利率不變，未滿 1 元以 1 元計，且 $1.003^3 \approx 1.00903$）

【解】 我們知道借款與還款在期滿時的本利和應相等，也就是說，期滿時應還款的總額為 $100000(1+\frac{3}{1000})^3$ 元。

假設每月平均需付 x 元。那麼，

第一個月所還的 x 元，經過 2 個月後的本利和為 $x(1+\frac{3}{1000})^2$ 元；

第二個月所還的 x 元，經過 1 個月後的本利和為 $x(1+\frac{3}{1000})$ 元；

第三個月還 x 元；

期滿時還款的總金額為 $x+x(1+\frac{3}{1000})+x(1+\frac{3}{1000})^2$ 元。

因此，

$$\begin{aligned} 100000(1+\frac{3}{1000})^3 &= x+x(1+\frac{3}{1000})+x(1+\frac{3}{1000})^2 \\ &= x+1.003x+(1.003)^2x \\ &= \frac{1.003^3-1}{1.003-1}x \\ &= 3.01x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 100903 = 3.01x$$

$$\Rightarrow \quad x \approx 33523$$

答：每月需付 33523 元。

【類題練習 6】 某人向銀行貸款 100000 元，月利率 0.2% ，按每月複利計息，分三個月償還本金及利息。請問每月需付多少元？（假設借貸期間利率不變，未滿 1 元以 1 元計，且 $1.002^3 \approx 1.006$ 。）

【重點整理】

1. 如果一個等比級數有 n 項，其中首項爲 a_1，公比爲 r，並以 S_n 表示級數和時，那麼
   (1) 當 $r=1$ 時，$S_n=na_1$；
   (2) 當 $r\neq 1$ 時，$S_n=\dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$ 。

【家庭作業】

基礎題

1. 已知某一等比級數的首項爲 5，公比爲 4，且共有 5 項。求此級數的和。
2. 已知某一等比級數的首項爲 4，公比爲 2，且和爲 508。求項數。
3. 已知有 5 個桶子。在第一個桶子放入一個球，第 2 個桶子放入 3 個球，第 3 個桶子放入 9 個球，以此類推，也就是說，後一桶放入的球數爲前一桶放入球數的 3 倍。請問這 5 個桶子共有幾個球？
4. 已知某一等比級數的和爲 1820，公比爲 3，且共有 6 項，求首項。
5. 某發卡銀行的信用卡循環利息爲每月 1.5%，某人刷卡 10000 元，逾繳費期限三個月未繳款，請問此人信用卡債務爲多少元？（未滿 1 元以 1 元計，且 $1.015^3\approx 1.0457$）

進階題

6. 求 $9+99+999+\cdots+9999999$ 的和。
7. 某人每年年初在銀行存入 1 萬元，年利率 1%，按每年複利計算，則三年期滿可得本利和多少元？(元以下四捨五入)

六、函數

6-1 函數的概念

在國中的課程裡，我們學過二元一次方程式，例如：$2x-y=6$，在沒有限制範圍下，(x, y)有無限多組解，如下表。換句話說，若先設定 x 的值，便可由 $y=2x-6$ 得到對應的 y 值。

x	1	2	3	$\cdots$
y	-4	-2	0	$\cdots$

再以二次多項式 x^2-3x+2 爲例，如果我們以 y 代表這個多項式，即 $y=x^2-3x+2$，由下表，我們也可以由先設定 x 的值，而得到對應的 y 值。

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	$\cdots$
y	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\cdots$

綜合上面的說明，我們看到：如果令 y 爲某一個 x 的代數式，那麼給定一個 x 值就可能會有一個 y 值與它對應。也就是 x 和 y 都代表變量，而這兩個變量之間存在某種對應關係。

事實上，在規定的範圍內，若給定一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應。像這種 x 與 y 的對應關係，在數學上稱爲「**y 是 x 的函數**」或簡稱爲「**函數**」（**function**）。

因此，對於一個 y 是 x 的函數而言，我們知道：

任意給定的一個 x 值，都恰有一個（有一個且只有一個）y 值與它對應。

我們常將 x 的函數記作 $\boldsymbol{f(x)}$(讀作「$\boldsymbol{f}$ **of** $\boldsymbol{x}$」)，且以 $\boldsymbol{y=f(x)}$ 表示此一函數或對應關係。為了方便，我們也可以用其它文字符號來表示 x 的函數，如 $g(x)$、$h(x)$、⋯等。

就一般情形而言，當 x 值變化時，y 值可能隨著變化。所以，我們稱 x 為此函數的**自變數**，而 y 稱為**應變數**。

$$x \xrightarrow{\quad f \quad} y=f(x)$$

自變數 **應變數**

當變數 x 等於 a 時，我們稱其所對應的 y 值為這個函數在 $x=a$ 時的**函數值**，且記作 $\boldsymbol{f(a)}$。最常見的函數是由代數式所定義出的數量關係，如 $y=x^2$、$g(x)=2x^2-1$、⋯。注意 $f(x)=x^2$、$y=x^2$ 和 $y=f(x)=x^2$ 這些數學式都是同一個函數的不同記法。對於函數 $g(x)=2x^2-1$ 而言，如果我們要找 $x=4$ 所對應的值（即 $g(4)$）時，我們只需把 4 代入 g 的定義公式（也就是多項式 $2x^2-1$）裡，並算出 $2(4)^2-1=2\times16-1=31$ 即可，因此 $g(4)=31$。同理，我們可以把任意的多項式當作一個函數，並稱它為**多項式函數**。

【類題練習 1】 (1) 設 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$，求 $f(0)$ 和 $f(-\dfrac{2}{5})$。

(2) 設 $f(x)=2x^2-1$，求 $f(5)$。

當以數學式來描述函數時，那麼式子中的數學運算必須有意義。以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 為例，我們知道當 $x=1$ 時，數學式 $\dfrac{1}{x-1}$ 的分母為 0，因此沒有它所對應的值。所以自變數 x 不可以為 1；也就是說，當 $x=1$ 時，函數 $f(x)$ 沒有意義（或稱為沒有定義）；事實上，函數 $f(x)$ 在 x 等於 1 以外的數，都有其對應的值。通常，若非特別規定，自變數的變動範圍，是泛指使函數對應的值存在的任何數。又如 $g(x)=\sqrt{x-1}$，對於任何大於 1 或等於 1 的數，都有其所對應的值，而且 x 也只有等於這些數時，$g(x)$ 才有定義。

當自變數 x 不論為何值時，函數值 y 永遠不變，像這樣的函數稱為**常數函數**(「常」是永恆的意思)，並以 $f(x)=c$ 或 $y=c$ 的形式表示，其中 c 是一個確定的數（或稱為**常數**），這是最簡單的函數。

接著來看看另外一種較為簡單的函數。首先，令 a、b 為兩個常數，並且 $a\neq 0$。我們稱形如 $f(x)=ax+b$ 的函數為**一次函數**，並稱 ax 為 $f(x)$ 的**一次項**，a 為 x 的**係數**，而 b 為 $f(x)$的**常數項**。

【類題練習 2】 (1) 設 $f(x)=-4x+5$，x 項的係數為________，常數項為________。

(2) 設 $f(x)=5x^2-2x+1$，x^2 的係數為________，x 項的係數為________，常數項為________。

是不是所有的函數都可以用代數式來表示呢？我們以民國 94 年每個月份與它的天數（見下表），來說明另一種呈現函數的形式。

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
天數	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31

如果想要找一個簡單的代數式，使得它在每個月份的值等於上表中相對應的值，是一件不容易的工作。像這樣的函數，與其找出這個代數式，還不如用表列的方式陳述函數關係方便。

【想想看】在上表中，月份是天數的函數嗎？

【重點整理】

1. 對於一個函數 $y=f(x)$ 而言，任意給定的一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應。當變數 x 等於 a 時，我們稱其所對應的 y 值為這個函數在 $x=a$ 時的函數值，且記作 $f(a)$。
2. 當自變數 x 不論為何值時，函數值 y 永遠不變，像這樣的函數稱為常數函數。

【家庭作業】

基礎題

1. (　　) 已知 x、y 兩變數之間的對應關係表列如下，哪一組<u>無法</u>表示 y 是 x 的函數？

(A)

x	1	2	3	4
y	5	5	5	5

(B)

x	1	2	3	2
y	-1	4	3	2

(C)

x	-2	-1	0	1
y	-1	0	1	2

(D)

x	1	2	3	4
y	3	4	5	6

2. (　　) 下列各式中，哪一個<u>不是</u> x 的函數？

(A) $y=3x-1$　(B) $y=\dfrac{2}{x}$　(C) $y^2=3x-11$　(D) $y=x^2$

3. 設 $f(x)=4x^2+2x-3$，求 $f(2)$。
4. 設 $f(x)=\sqrt{x^2-16}$，求 $f(5)$。
5. 設 $f(x)=34x-5$，x 項的係數為________，常數項為________。
6. 設 $f(x)=-12x^2+2x-31$，x^2 的係數為________，

   x 項的係數為________，常數項為________。

進階題

7. 設函數 $f(x)=\dfrac{100}{x-2}$ ，則當 $x=$_____時，沒有對應的函數值。

8. 已知 $\dfrac{1}{7}=0.142857142857\cdots$，設 $f(n)$ 表「$\dfrac{1}{7}$ 化成小數，小數點後第 n 位的數字」。試回答下列問題：

① 求 $f(1)+f(5)-f(9)$。

② 求 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$。

6-2 線型函數

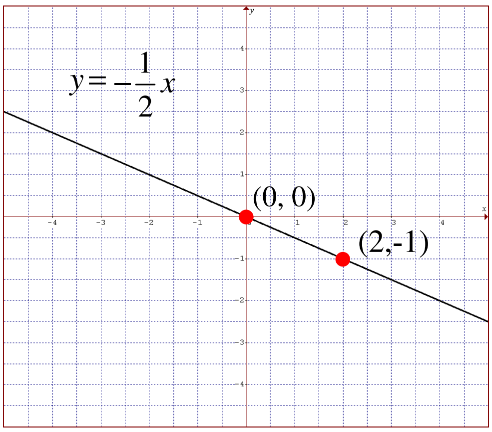
在坐標平面上，描繪滿足 $y=f(x)$函數關係的所有點$(x, f(x))$所得到的圖形，就稱爲函數 $f(x)$的圖形。我們如何描繪一次函數 $f(x)$的圖形呢？首先將 $y=ax+b$ 改寫成 $ax-y+b=0$ 的形式，其中 a、b 分別爲給定的數(常數)而且 $a\neq 0$。因此在圖形上的點，其 x 坐標與 y 坐標滿足二元一次方程式 $ax-y+b=0$。所以我們可使用描繪二元一次方程式解的圖形所用的方法來畫 $y=ax+b$ 的圖形。當然我們也可用列表再描點的方式來畫圖。

【範例 1】在坐標平面上畫出函數 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x$的圖形。

【解】 這個函數可以記為 $y=f(x)=-\dfrac{1}{2}x$，因此 $y+\dfrac{1}{2}x=0$。

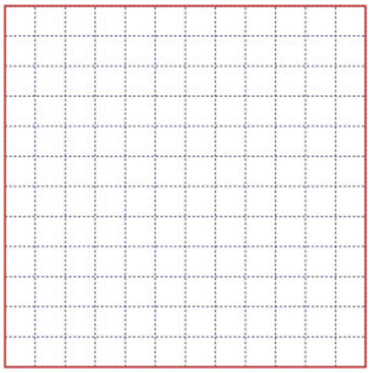
x	-2	0	2
y	1	0	-1

因爲二元一次方程式解的圖形爲直線，所以只要找此二元一次方程式的兩個相異解，並在坐標平面上找到解所對應的兩個點，再繪出通過此兩點的直線。因此函數的圖形爲通過$(0,0)$及$(2,-1)$的直線（如下圖）：



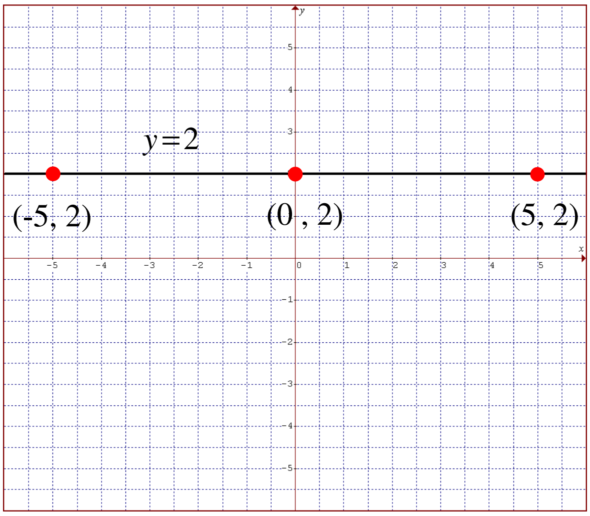
事實上，對於任何一個二元一次方程式 $ax+by+c=0$，其中 $b\neq 0$，我們都可以把它改寫成 $by=-ax-c$ 或 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$。因此這個二元一次方程式解的 y 坐標可看成 x 坐標的函數。

【類題練習 1】在坐標平面上畫出函數 $f(x)=x+3$ 的圖形。

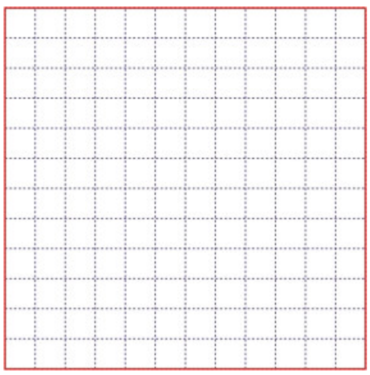


【範例 2】在坐標平面上畫出函數 $g(x)=2$ 的圖形。

【解】 由於 $g(x)=2$，我們知道 $y=2$，也就是 $y-2=0$。所以其圖形為通過(0, 2)且與 x 軸平行的直線。



【類題練習 2】在坐標平面上畫出函數 $h(x)=-2$ 的圖形。



由範例 1 及範例 2 的討論，我們知道：

在函數 $f(x)=ax+b$ 中，當 $a=0$ 時，$f(x)$爲常數函數；

當 $a\neq 0$時，$f(x)$爲一次函數。

因爲常數函數與一次函數的圖形都是一條**直線**，因此，我們通稱它們爲**線型函數**。

【重點整理】

1. 於任何一個二元一次方程式 $ax+by+c=0$，其中 $b\neq 0$，都可以把它改寫成 $by=-ax-c$ 或 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$。因此這個二元一次方程式解的 y 坐標可看成 x 坐標的函數。
2. 在函數 $f(x)=ax+b$ 中，當 $a=0$ 時，$f(x)$爲常數函數；
   當 $a\neq 0$ 時，$f(x)$爲一次函數。
3. 因爲常數函數與一次函數的圖形都是一條直線，因此統稱爲線型函數。

【家庭作業】

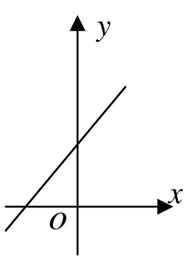
基礎題

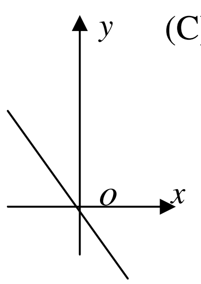
1. (　　) 下列何者不是線型函數？

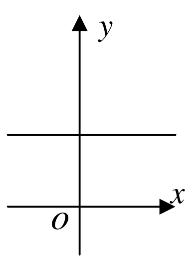
　(A) $f(x)=2x+3$　　(B) $f(x)=x^2$

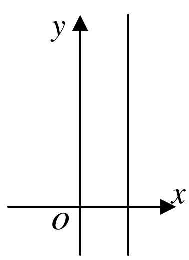
　(C) $f(x)=-3x+2$　　(D) $f(x)=5$

2. (　　) 下列何者不是線型函數的圖形？

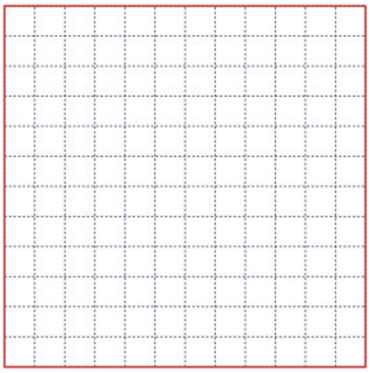
(A)


(B)


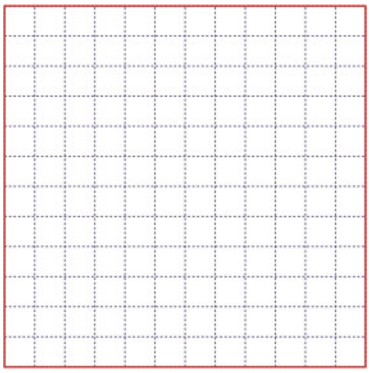
(C)


(D)


3. 在坐標平面上畫出函數 $f(x)=2x+5$ 的圖形。



4. 在坐標平面上畫出函數 $h(x)=4$ 的圖形。



進階題

5. 在坐標平面上畫出函數 $f(x)=-3$ 的圖形，其中 $x\geq 0$。

6. 在坐標平面上畫出函數 $g(x)=\dfrac{6-2x}{3}$ 的圖形。

7. 在坐標平面上畫出函數 $h(x)=-|x-1|$ 的圖形。

8. 已知由地面每升高 100 公尺，氣溫就下降 0.6℃。假設地面上的溫度是 20℃，而離地面 x 公尺處的溫度是 y℃，試回答下列問題：

   ① x、y 之間的函數關係式為何？

   ② 離地面 3000 公尺處的溫度是多少？

9. 已知長 20 公分的蠟燭，每 3 分鐘燃燒 0.2 公分。若燃燒 x 分鐘後，蠟燭的長度剩下 $f(x)$公分，試回答下列問題：

   ① 求 x 與 $f(x)$的函數關係。

   ② 求 $f(6)$和 $f(8)$。

   ③ 求 $f(301)$。

6-3 二次函數及其圖形

從 6-2 節中，我們知道可以將任意一個多項式當作一個函數，並稱它爲多項式函數。例如，對於 a、b、c 三個常數，其中 $a \neq 0$，我們知道 ax^2+bx+c 爲一個二次多項式，因此，我們稱形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的函數爲**二次函數**，並稱 ax^2 爲 $f(x)$的**二次項**，a 爲二次項的係數，bx 爲**一次項**，b 爲一次項的係數，而 c 爲這個函數的**常數項**。

我們學過利用配方法來解一元二次方程式，同樣的，也可以利用配方法將 ax^2+bx+c 改寫成

$$a(x-h)^2+k$$

的形式，其中

$$h=-\frac{b}{2a} \text{、} k=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{。}$$

因此，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 都可以改寫成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

對於二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 而言，我們觀察到：

(1) 當 $a>0$ 時，因爲 $a(x-h)^2 \geq 0$，所以函數的值永遠不小於 k，並且當 $x=h$ 時，函數的值爲 k，因此，函數的**最小值**爲 k。這表示函數圖形中最低點的 y 坐標爲 k，所以其圖形必定不會在水平線 $y=k$ 的下方。

(2) 當 $a<0$ 時，因爲 $a(x-h)^2 \leq 0$，函數的值永遠不大於 k，並且當 $x=h$ 時，函數的值爲 k，因此，函數的**最大值**爲 k。這表示函數圖形中最高點的 y 坐標爲 k，所以其圖形必定不會在水平線 $y=k$ 的上方。

不論在那一種情形下，函數圖形都會與水平線 $y=k$ 交於(h, k)，我們就稱(h, k)爲圖形的**頂點**。

【範例 1】寫出下列函數圖形的頂點：

(1) $y=3(x-1)^2+2$　　(2) $y=-3(x+1)^2+1$

(3) $y=2(x-3)^2-1$　　(4) $y=-2(x+3)^2-2$

【解】 上列各函數圖形的頂點分別爲：

(1) $(1, 2)$　(2) $(-1, 1)$　(3) $(3, -1)$　(4) $(-3, -2)$

【類題練習 1】寫出下列函數圖形的頂點：

(1) $y=4(x+1)^2+3$　　(2) $y=-5(x-1)^2-2$

我們也觀察到另一個有助於描繪二次函數圖形的事實：對於任何一個數 c，函數 $y=a(x-h)^2+k$ 在 $x=h+c$ 及 $x=h-c$ 所得到的函數值都為 ac^2+k。因此，$(h+c, ac^2+k)$與$(h-c, ac^2+k)$兩點都在函數圖形上，並且在直線 $x=h$ 的**左右兩側對稱**，因此稱直線 $x=h$ 為圖形的**對稱軸**。

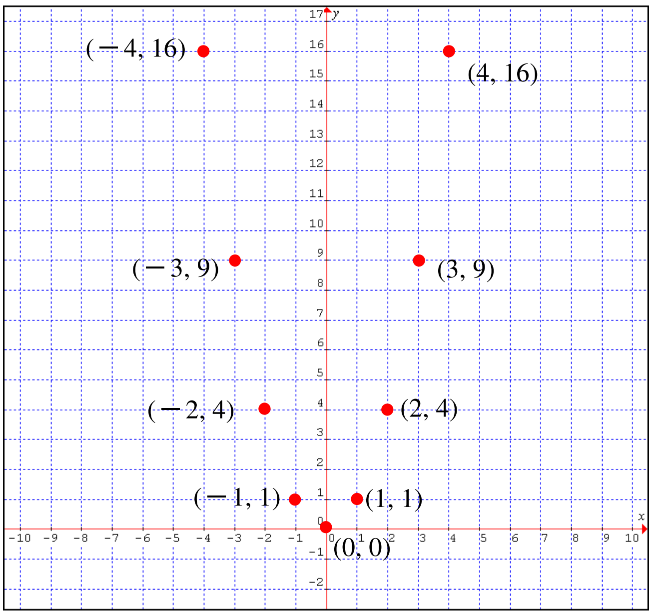
在描繪圖形時，可用配方法將任何一個二次函數改寫成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。所以，我們首先畫形如 $y=ax^2$ 的函數圖形，其次再來畫形如 $y=ax^2+k$ 及 $y=a(x-h)^2$ 的圖形，並比較這些函數圖形之間的異同。最後，總結如何從 $y=ax^2$ 的圖形來畫出 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。

【範例 2】在坐標平面上畫出 $y=x^2$ 的函數圖形。

【解】　我們先將對應的函數值列表如下：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

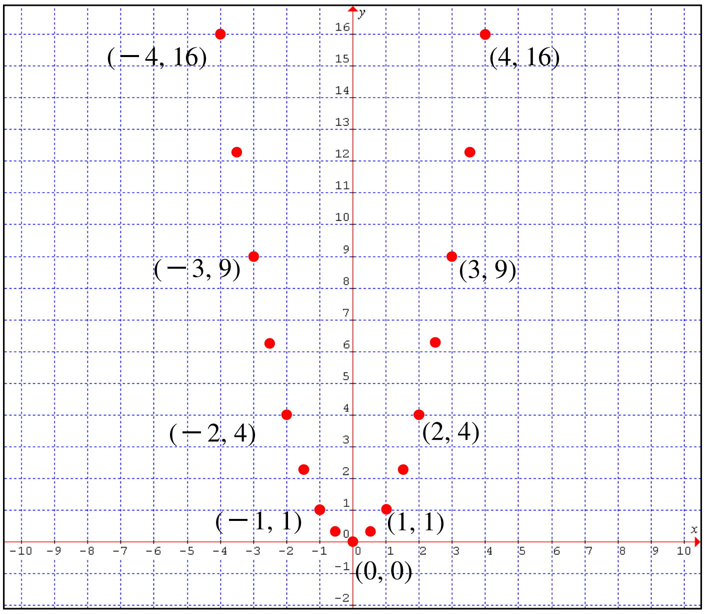
在坐標平面上，將表中所列的點一一描繪出，得到下圖：



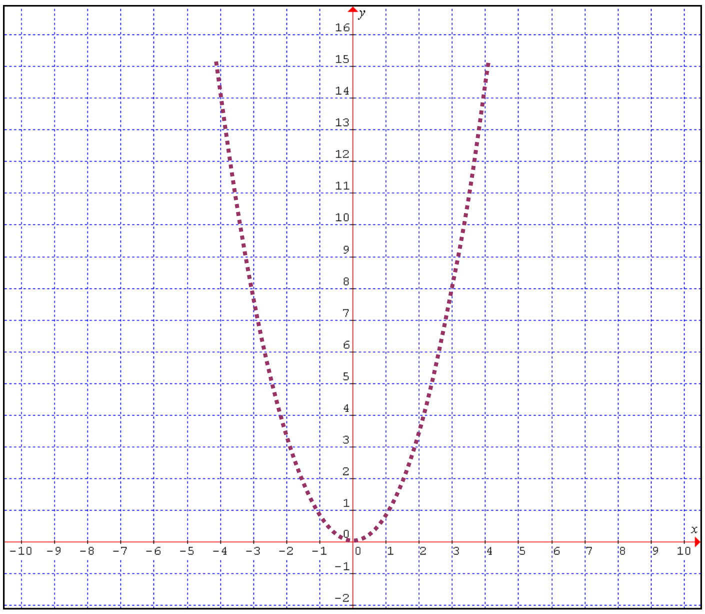
如果在－4 和 4 之間多取一些 x 值，可得下表：

x	-4	$-\frac{7}{2}$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4
y	16	$\frac{49}{4}$	9	$\frac{25}{4}$	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	$\frac{25}{4}$	9	$\frac{49}{4}$	16

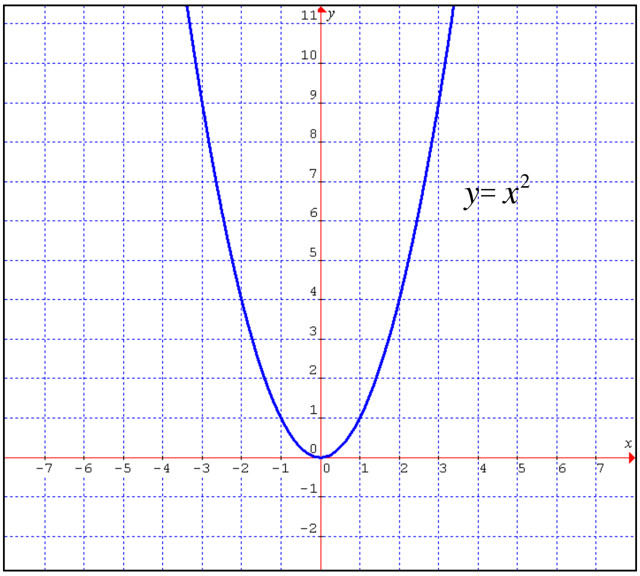
然後再將這些數所對應的點描到同一坐標平面上，得到下圖：



同樣的，在－4 和 4 之間取更多的 x 值，然後再將這些數所對應的點描到同一坐標平面上，得到下圖。

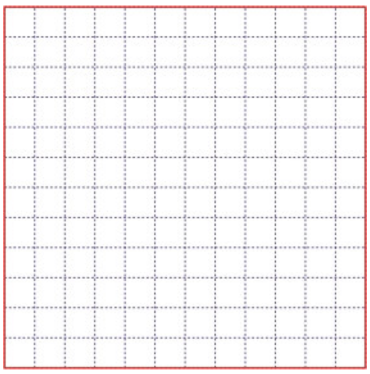


事實上，如果我們在單位長度內所取的數對越多，則描到坐標平面上的對應點就越密，不難看出這些點可以連接成一條平滑的曲線。將這些數對所代表的點描出來，然後以平滑曲線，將這些點連接起來，如下圖所示就是函數 $f(x)$的圖形。



因爲上面的圖形可以向上無限延伸，因此稱這種圖形爲**開口向上**。我們也觀察到圖形的對稱性：$y=x^2$ 的圖形以直線 $x=0$ 爲對稱軸。同時，也觀察到只要描繪幾個適當的點，並以平滑的曲線連接這些點，即可得到函數圖形。

【類題練習 2】試描繪 $y=2x^2$的圖形。



如果將範例 2 中的 x^2 改成 $-x^2$，圖形會有什麼改變呢？讓我們來看以下的例子。

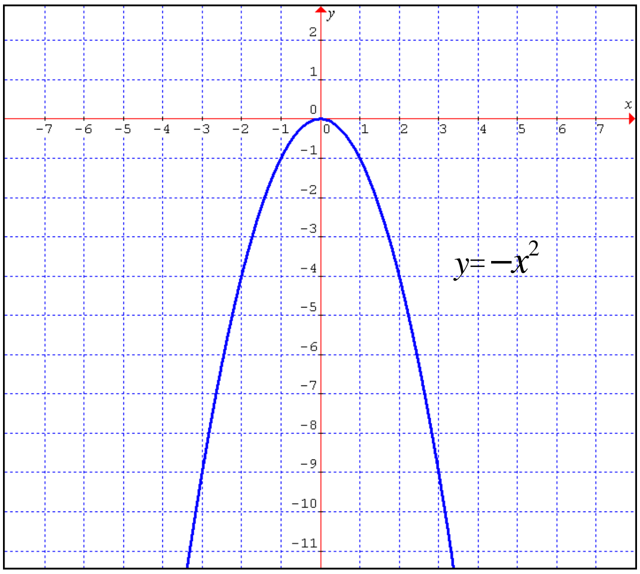
【範例 3】 仿照畫出 $f(x)=x^2$的圖形，來畫 $f(x)=-x^2$的圖形。

【解】 圖形的頂點位置在（0, 0），且以直線 $x=0$ 爲對稱軸。將對應

的函數值列表如下：

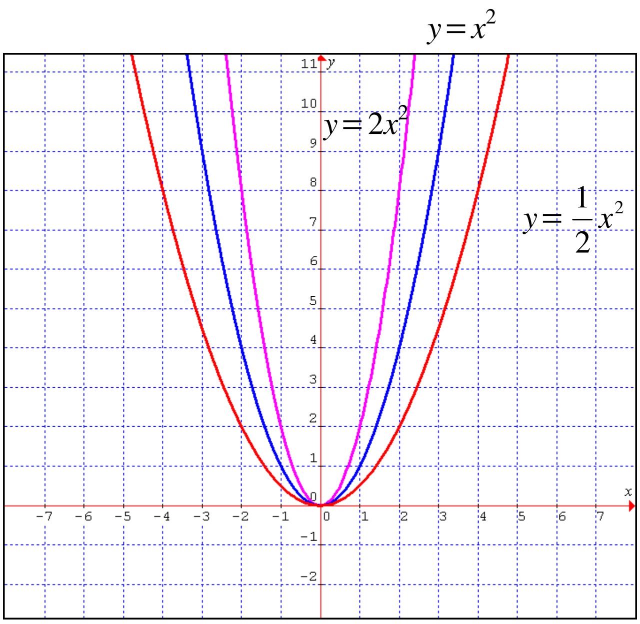
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9

然後再描點並以平滑的曲線連接這些點（如下圖）。



我們觀察到形如範例 3 的圖形**開口向下**，並且與向上斜拋一物體落下的路徑相似，因此稱它爲開口向下的**拋物線**；從圖中我們也觀察到 $y=-x^2$ 與 $y=x^2$ 的函數圖形在 x 軸的上下對稱。

接下來，我們在同一坐標平面上，來比較 $y=x^2$ 、$y=2x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形之間的關係。



由上圖，我們也觀察到 $y=x^2$ 、$y=2x^2$ 和 $y=\frac{1}{2}x^2$ 這些函數的 x^2 項係數都是正數，並且它們的圖形都是開口向上而且以直線 $x=0$ 爲對稱軸。因此，x^2 項係數的正負號決定了開口的方向：

若 x^2 項係數爲正數時的開口向上，爲負數則是開口向下。

另一方面，x^2 項係數的絕對值大小會影響開口的大小：

若 x^2 項係數的絕對值越大，則開口越小。

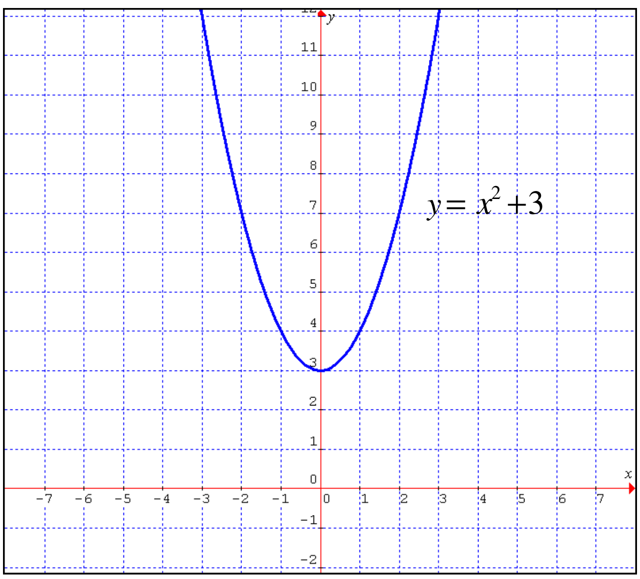
【類題練習 3】在同一坐標平面上，比較 $y=-x^2$ 、$y=-2x^2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 開口的大小。

接下來我們來畫形如 $y=ax^2+k$ 的圖形。顯然的，我們知道它的頂點在$(0,k)$ 且以直線 $x=0$ 爲對稱軸。

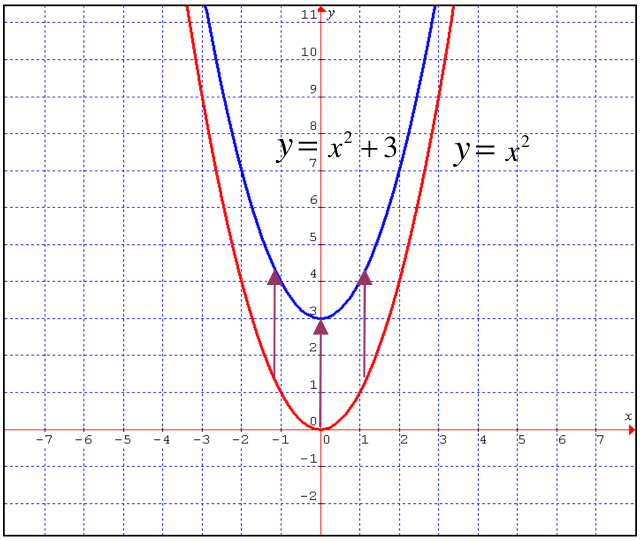
【範例 4】試描繪 $y=x^2+3$ 的圖形。

【解】 $y=x^2+3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(0,\ 3)$，且以直線 $x=0$ 爲對稱軸。將函數的對應值列表如右，然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。

x	-2	-1	0	1	2
y	7	4	3	4	7



如果我們將 $y=x^2$ 及 $y=x^2+3$ 的圖形同時畫在坐標平面上，它們會有什麼關係呢？



由上圖可知，它們的圖形的形狀及開口大小都一樣。同時，我們也發現只要將 $y=x^2$ 的圖形(沿 y 軸)**向上移動 3 個單位長**，即可以得到 $y=x^2+3$ 的圖形。

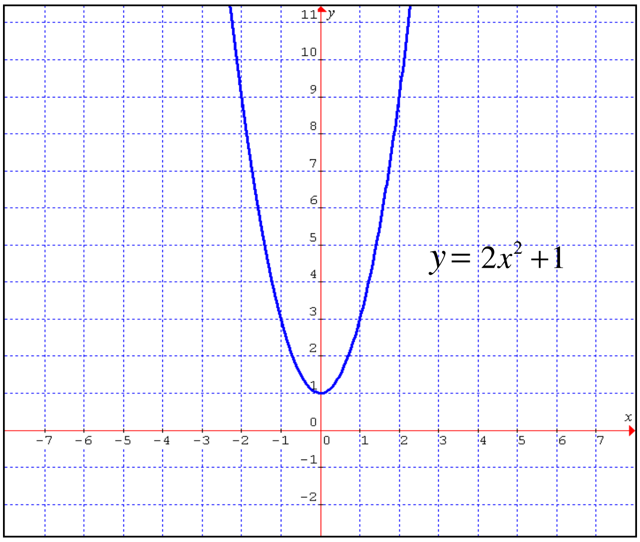
【類題練習 4】 將 $y=x^2$ 的圖形(沿 y 軸)向____移動____ 個單位長，即可以得到 $y=x^2-2$ 的圖形。

【範例 5】 試描繪 $y=2x^2+1$ 的圖形。

【解】 $y=2x^2+1$ 的圖形是開口向上的拋物線，其頂點位置在(0, 1)，且以直線 $x=0$ 為對稱軸。將對應的函數值列表如下，

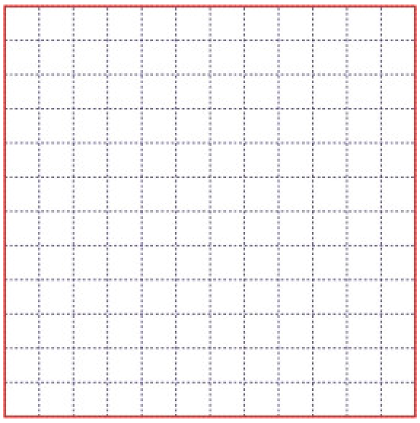
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	19	9	3	1	3	9	19

然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



如範例 4，我們也發現只要將類題練習 2 中 $y=2x^2$ 的圖形(沿 y 軸)**向上移動一個單位長**，即可以得到 $y=2x^2+1$ 的圖形。

【類題練習 5】 試描繪 $y=-2x^2+3$ 的圖形，並寫出頂點坐標。



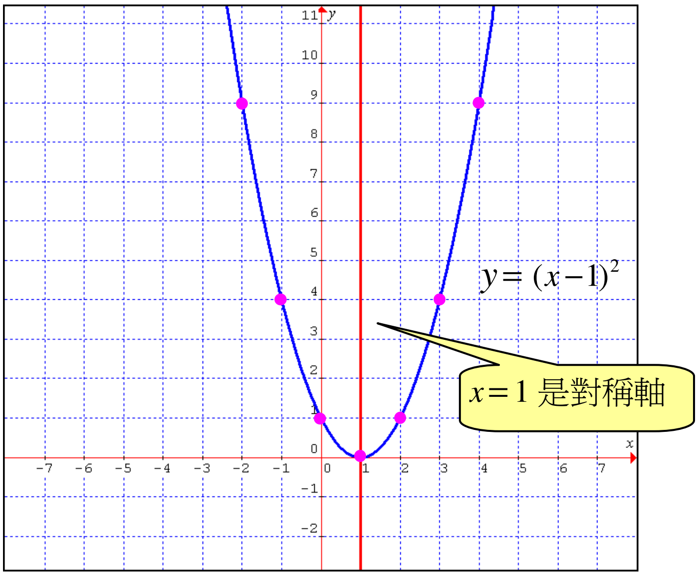
現在我們來畫形如 $y=a(x-h)^2$ 的圖形。我們知道它的頂點在 $(h, 0)$ 及其對稱軸為直線 $x=h$。

【範例 6】 試描繪 $y=(x-1)^2$ 的圖形。

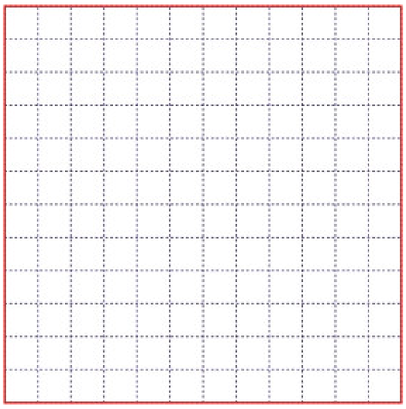
【解】 $y=(x-1)^2$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(1, 0)$，且以直線 $x=1$ 為對稱軸。將函數的對應值列表如下，

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

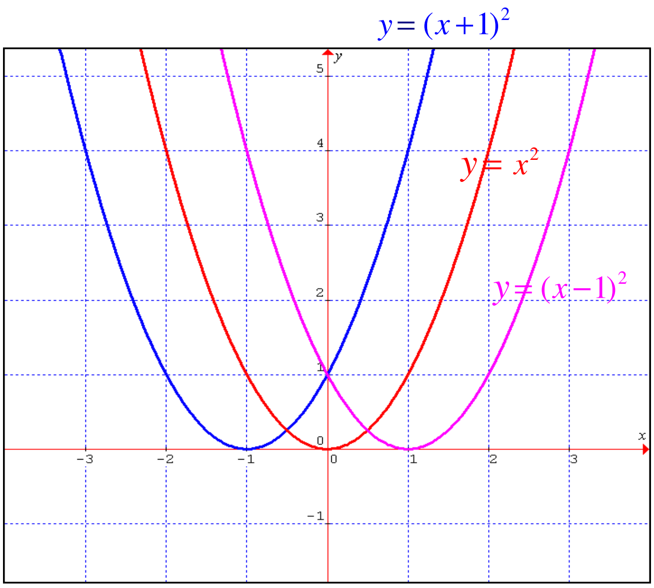
然後再描點並以平滑的曲線連接這些點。



【類題練習 6】 試描繪 $y=(x+1)^2$ 的圖形。



我們再來比較 $y=x^2$ 、$y=(x-1)^2$ 及 $y=(x+1)^2$ 圖形之間的異同。



由上圖可知，$y=x^2$ 、 $y=(x-1)^2$ 及 $y=(x+1)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。我們也發現：若將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向右移動**一個單位長，即可得到 $y=(x-1)^2$ 的圖形；反之，若將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)**向左移動**一個單位長，便可得到 $y=(x+1)^2$ 的圖形。

我們也知道 $y=-x^2$ 、 $y=-(x-1)^2$ 及 $y=-(x+1)^2$ 的圖形的形狀及開口大小都一樣。但是，它們頂點的位置分別在(0, 0)、(1, 0)及(−1, 0)。如同前面的說明，如果將 $y=-x^2$ 的圖形**向右移動**一個單位長，就可以得到 $y=-(x-1)^2$ 的圖形；反之，若將 $y=-x^2$ 的圖形**向左移動**一個單位長，便可得到 $y=-(x+1)^2$ 的圖形。我們稱將圖形左右或上下移動的過程爲**平移**。

【類題練習 7】（1） $y=(x-2)^2$ 的圖形是將 $y=x^2$ 的圖形(沿 x 軸)
向____移動____ 個單位長，即可以得到。

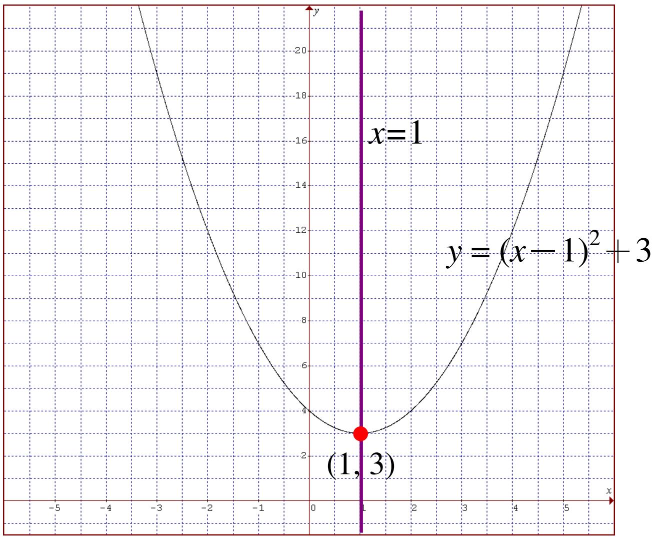
（2） $y=-(x+3)^2$ 的圖形是將 $y=-x^2$ 的圖形(沿 x 軸)
向____移動____ 個單位長，即可以得到。

現在我們來畫 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形。我們知道它的頂點在(h, k)且對稱軸爲 $x=h$。

【範例 7】 試描繪 $y=(x-1)^2+3$ 的圖形。

【解】 $y=(x-1)^2+3$ 的圖形是開口向上的拋物線，它的頂點位置在 $(1, 3)$，且以直線 $x=1$ 爲對稱軸。

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12	7	4	3	4	7	12



【範例 8】試描繪 $y=2x^2+4x+3$ 的圖形。

【解】 由 $y=2x^2+4x+3=2\left(x^2+2x+1\right)+3-2$

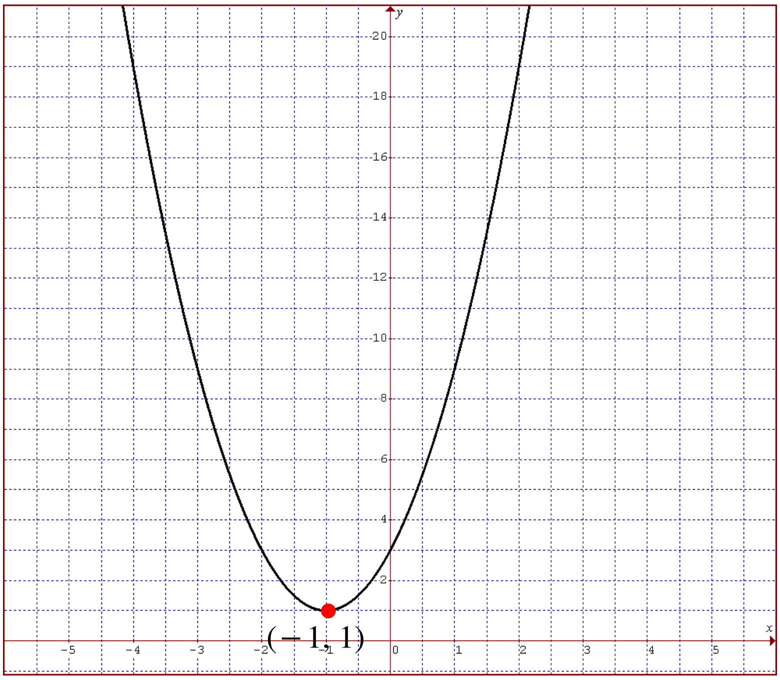
$$=2(x+1)^2+1，$$

可知其圖形爲開口向上的拋物線，頂點位置在 $(-1, 1)$，且以直線 $x=-1$ 爲對稱軸。

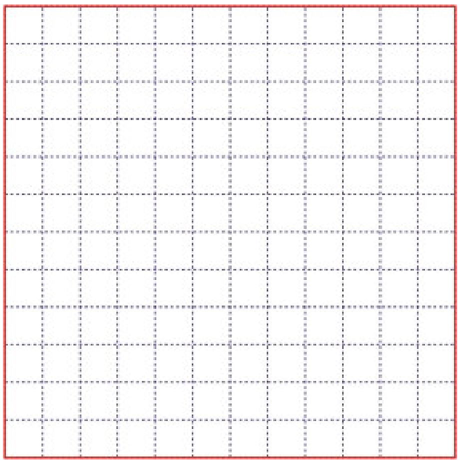
由下表：

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	19	9	3	1	3	9	19

我們可以繪製出 $y=2x^2+4x+3$ 的圖形如下：



【類題練習 8】 試描繪 $y=2x^2-12x+23$ 的圖形。



【範例 9】 試描繪 $y=-2x^2+8x-5$ 的圖形。

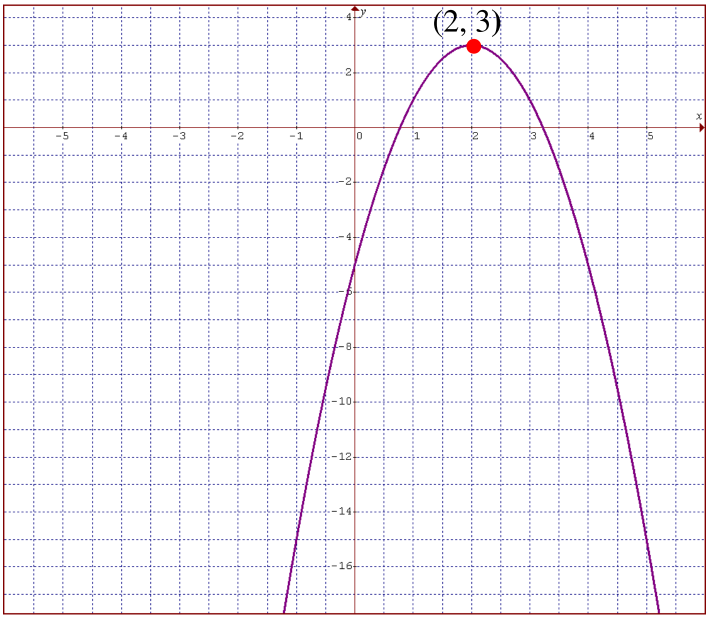
【解】 $y=-2x^2+8x-5=-2\left(x^2-4x+4\right)-5+8$

$$=-2(x-2)^2+3$$

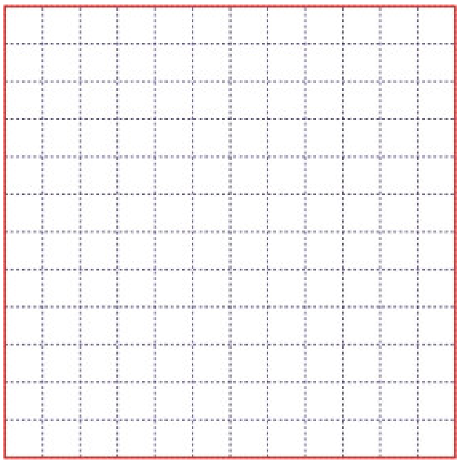
圖形是開口向下的拋物線，其頂點位置在(2, 3)，且以直線 $x=2$ 爲對稱軸。由下表：

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-15	-5	1	3	1	-5	-15

我們可以繪製出 $y=-2x^2+8x-5$的圖形如下：



【類題練習 9】描繪 $y=-x^2+6x-5$的圖形。



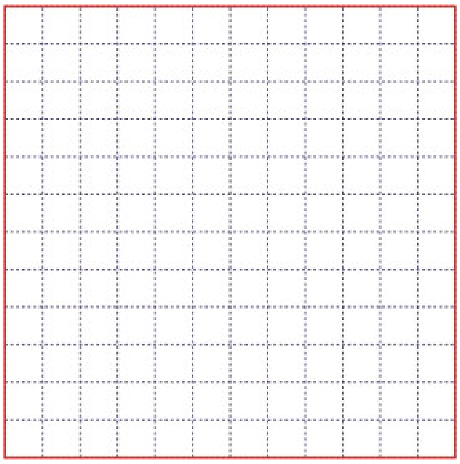
【重點整理】

1. 對於 a、b、c 三個常數，其中 $a\neq 0$ ，我們稱形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的函數爲二次函數。
2. 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 可以用配方法改來寫成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，其中 $h=-\dfrac{b}{2a}$ 、$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 。
3. 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形爲拋物線，頂點坐標爲 $(h,\ k)$；對稱軸方程式爲 $x=h$。
4. 對二次函數 $y=ax^2+bx+c$ ，
   (1) 若 x^2 項的係數大於 0，則拋物線的開口向上；若 x^2 項的係數小於 0，則拋物線的開口向下；
   (2) 若 x^2 項的係數絕對值越大，則開口越小；若 x^2 項的係數絕對值越小，則開口越大。

【家庭作業】

基礎題

1. 在坐標平面上畫出 $y=-3(x-1)^2+1$ 的圖形。



2. 求 $y=-2x^2-4x$ 的頂點坐標及它對稱軸方程式。

3. 求 $y=5x^2-10x+2$ 的頂點坐標及它對稱軸方程式。

進階題

4. 將 $y=-2(x-1)^2+3$ 的圖形沿鉛直方向向下移動多少個單位長，圖形可與 x 軸相切？

5. 將 $y=-3(x-2)^2+1$ 的圖形沿水平方向向右移動 3 個單位長；並沿鉛直方向向下移動 2 個單位長，所得的圖形爲哪一個函數的圖形？

6. 固定函數 $y=-2x^2+6x-3$ 的圖形頂點，將圖形旋轉 180°，所得的圖形爲哪一個函數的圖形？

6-4 二次函數的最大值與最小值

由 6-3 節的說明，我們知道：(1)當 $a>0$ 時，$a(x-h)^2+k\geq k$，所以函數的值永遠不小於 k。並且當 $x=h$ 時，函數的值爲 k。因此，函數的**最小值**爲 k；同理，(2)當 $a<0$ 時，$a(x-h)^2+k\leq k$，函數的值永遠不大於 k。並且當 $x=h$ 時，函數的值爲 k。因此，函數的**最大值**爲 k。

讓我們來看下面幾個例子。

【範例 1】 有一農夫用 100 公尺的籬笆圍成一個矩形的菜園。試問如何圍成面積最大的菜園？

【解】 設菜園的某一邊長爲 x 公尺。因此另一邊長爲$(50-x)$公尺。
我們若以 y 平方公尺來表示此菜園的面積，則依題意可列式

$$\begin{aligned} y &= x(50-x)=50x-x^2 \\ &= -(x^2-50x+625)+625 \\ &= -(x-25)^2+625 \end{aligned}$$

當 $x=25$ 時，$y=625$ 爲最大值，即
當菜園一邊的邊長爲 25 公尺，而另一邊也爲 $50-25=25$ 公尺時，能圍出面積最大的菜園。換句話說，所圍出面積最大的菜園是一個邊長爲 25 公尺的正方形。

因爲菜園的邊長必爲正數，所以 $x>0$ 且 $50-x>0$，得 x 值的範圍爲 $0<x<50$，而長度大於 0 是很自然的事，所以，以 $x<50$ 表示 x 值的範圍即可，並且範例 1 中的答案發生在 $x=25$，符合 x 的範圍限制，因此，

矩形菜園面積≤ 625 平方公尺

【類題練習 1】 某人想用一條 200 公尺的繩子圍成一個矩形的停車場，請問如何圍出面積最大的停車場，並求出此停車場的面積。

【**範例 2**】已知兩數和為 50。試問兩數乘積的範圍。

【**解**】 假設其中一數為 x，且以 y 表示兩數的乘積。因為兩數和為 50，所以另一數為 $50-x$。

依題意可列式： $y=x(50-x)=-(x-25)^2+625$

在本題中 x 可以為任意實數，

因此，兩數乘積的範圍為所有小於或等於 625 的數。

由範例 1 和範例 2，我們觀察到：依題意所列出的式子都是

$$y=x(50-x)=50x-x^2 \text{ 。}$$

但是隨著題意情境的不同，變數 x 的範圍及 y 值的範圍也會隨著變化。所以討論函數時，要注意 x 的範圍及 y 值的範圍。

在高中課程中，我們稱自變數 x 的範圍為函數的定義域，且其所對應的 y 值範圍為函數的值域。在範例 1 中的定義域為大於 0，且小於 50 的數，也可以集合$\{x \mid 0<x<50\}$表示；而值域為大於 0，且小於或等於 625 的數，也可以集合$\{y \mid 0<y\leq 625\}$表示。在範例 2 中的定義域為任意實數，也可以集合$\{x \mid x$ 為任意實數$\}$表示；而值域為小於或等於 625 的數，也可以集合$\{y \mid y\leq 625\}$表示。

【**範例 3**】如何把 12 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？

【**解**】 設其中一數為 x，則另一數為 $12-x$。若以 y 表示這兩數的平方和，可得

$$\begin{aligned} y &= x^2+(12-x)^2 \\ &= x^2+144-24x+x^2 \\ &= 2x^2-24x+144 \\ &= 2(x^2-12x+36)-72+144 \\ &= 2(x-6)^2+72 \text{ 。} \end{aligned}$$

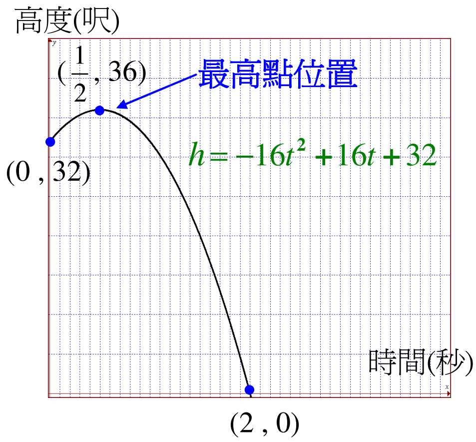
當 $x=6$ 時，另一數為 $12-6=6$，即是把 12 分成 6 和 6 時，兩數的平方和為最小，且其值為 72。

【類題練習 2】(1) 如何把 20 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？

(2) 如何把 20 分成兩數，使得這兩數的乘積最大？

我們再引下面的例子來探討二次函數圖形在物理學上的應用。

【範例 4】 在時間 $t=0$ 秒時，某位跳水選手從高為 32 呎的平台跳下(如右圖)。已知在時間為 t 秒時高度為 $h=-16t^2+16t+32$ (呎)，請問什麼時候達到最高點，並求出最高點位置。



【解】 由 $h=-16t^2+16t+32$

$$=-16(t-\frac{1}{2})^2+36 \text{，}$$

可知，當 $t=\frac{1}{2}$ 時，$h=36$ 為最大值。

所以，在起跳後 $\frac{1}{2}$ 秒時，達到最高點位置：高為 36 呎的地方。

在範例 4 中，h 的最大值為 36，也就是說，最高點位置在高為 36 呎的地方。於是，我們知道，若沒有規範自變數的範圍，則函數的極大值或極小值為頂點的 y 坐標。

有時候，我們需要判斷函數值是否恆為正或恆為負，例如，在前面的單元提到，當 $x\geq 1$ 時，函數 $g(x)=\sqrt{x-1}$ 有意義。同樣的，若要討論 $h(x)=\sqrt{x^2-3x+4}$ 必須有意義，則 x 的範圍為何？當然，我們可以利用配方法將 x^2-3x+4 化成 $(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$，所以 x^2-3x+4 恆大於或等於 $\frac{7}{4}$。因此，對任意實數 x，$h(x)=\sqrt{x^2-3x+4}$ 都有意義。

另外，我們也可以利用拋物線的圖形來理解二次函數值恆為正或恆為

負的性質，例如 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a\neq 0$，的圖形爲拋物線，$y=0$ 的圖形爲 x 軸，若將兩個式子聯立求解，並以代入消去法得到式子 $ax^2+bx+c=0$，所得的解即爲拋物線與 x 軸的交點，倘若二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的判別式 $b^2-4ac<0$，則表示拋物線與 x 軸沒有交點。因此我們得到下列的結論：

> 對於二次函數 $y=ax^2+bx+c$，
>
> 若 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸上方，且
>
> $y=ax^2+bx+c$ 恆大於 0；
>
> 若 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸下方，且
>
> $y=ax^2+bx+c$ 恆小於 0。

【範例 5】判斷下列二次函數的值是否恆爲正或恆爲負。

（1）$f(x)=2x^2-3x+4$　　（2）$g(x)=-2x^2+x-4$

【解】

（1）$f(x)=2x^2-3x+4$，$a=2>0$，$b=-3$，$c=4$。

判別式 $b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(4)=-23<0$，

所以 $f(x)=2x^2-3x+4$ 恆爲正。

（2）$g(x)=-2x^2+x-4$，$a=-2<0$，$b=1$，$c=-4$。

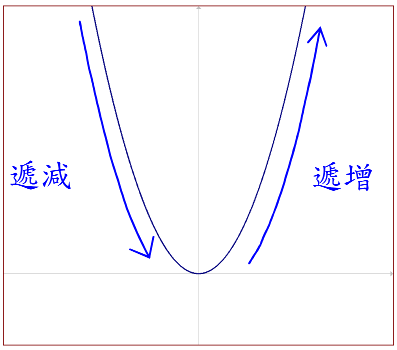
判別式 $b^2-4ac=1^2-4(-2)(-4)=-31<0$，

所以 $f(x)=2x^2-3x+4$ 恆爲負。

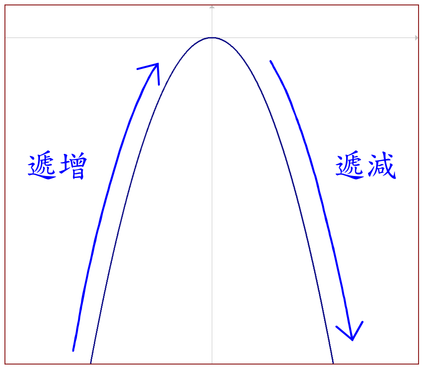
【類題練習 3】判斷下列二次函數的值是否恆爲正或恆爲負。

(1) $f(x)=2x^2+4x-3$　　(2) $g(x)=-x^2+3x-5$

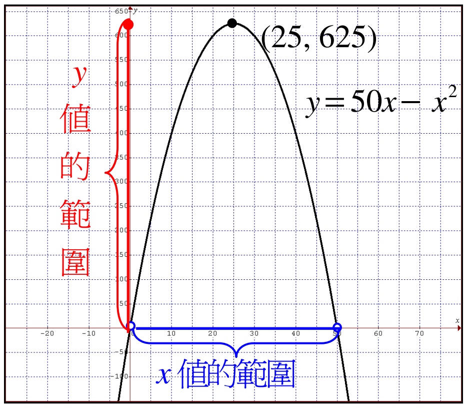
在二次函數的圖形中，對稱軸將拋物線分割成兩個全等的圖形，由圖形我們觀察出，無論圖形凹向上或凹向下，隨著 x 值增加，對稱軸兩側的的函數值會隨之增加或減少，而函數值固定增加與減少的分野正是拋物



線的頂點。我們稱隨著 x 值增加，函數值會隨之增加者為**遞增**函數；反之，稱隨著 x 值增加，函數值會隨之減少者則為**遞減**函數。



在前面的內容中，我們數度提到定義域與值域的範圍，例如，在範例 1 中，函數的定義域為 $\{x \mid 0<x<50\}$，值域為 $\{y \mid 0<y\leq 625\}$，極大值發生在拋物線的頂點。但是，有時候函數的極大值卻不發生在拋物線的頂點，我們來看下面的例子。



【範例 6】某旅行社以限乘 35 人的巴士，招攬國內旅遊團，目前已有 30 名旅客報名參加，每人須繳交旅費 1000 元，若以每增加一名旅客，則每一名旅客減收 20 元旅費的方式，繼續招攬旅客，則旅行社最多可收取多少團費？

【解】 假設增加 x 名旅客，旅行社收取團費共 y 元，

則 $y=(30+x)(1000-20x)$

$=-20x^2+400x+30000$

$=-20(x-10)^2+32000$

若 $x=10$， $y=32000$，也就是說增加 10 名旅客，團費為 32000 元，但巴士限乘 35 人，所以最多只能再增加 5 名旅客，因此，當 $x=5$ 時，能使 $-20(x-10)^2+32000$ 為符合題意的最大值，

即 $y=-20(5-10)^2+32000=31500$。

所以，旅行社最多可收取團費 31500 元。

【類題練習 4】二次函數 $y=x^2-4x+3$，若 $-5\le x\le 1$，求此函數的最大值和最小值。

【重點整理】

1. 對於二次函數 $y=a(x-h)^2+k$，
   (1) 當 $a>0$ 時，$a(x-h)^2+k\ge k$，函數的最小值爲 k；
   (2) 當 $a<0$ 時，$a(x-h)^2+k\le k$，函數的最大值爲 k。
2. 對於二次函數 $y=ax^2+bx+c$，
   (1) 若 $a>0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸上方，$y=ax^2+bx+c$ 恆大於 0；
   (2) 若 $a<0$，且 $b^2-4ac<0$，則拋物線的圖形在 x 軸下方，$y=ax^2+bx+c$ 恆小於 0。
3. 當函數值 y 隨著 x 值增加而增加者，稱爲遞增函數；反之，當函數值 y 隨著 x 值增加而減少者則稱爲遞減函數。

【家庭作業】

基礎題

1. 某人想用一條 300 公尺的繩子圍成一個矩形的停車場，請問如何圍出最大面積的停車場，並求出此停車場的面積。
2. 如何把 30 分成兩數，使得這兩數的平方和最小？
3. 如何把 30 分成兩數，使得這兩數的乘積最大？
4. 在時間 $t=0$ 秒時，某位跳水選手從高爲 36 呎的平台跳下。已知時間爲 t 秒時的高度爲 $h=-18t^2+18t+36$（呎），請問什麼時候達到最高點，並求出最高點的位置。
5. 二次函數 $y=2x^2-4x+6$，若 $2\le x\le 5$，求函數的最大值和最小值。

進階題

6. 已知 $y=-x^2+x+m$ 的最大值爲 $\frac{7}{4}$，求 m 的值。

7. 已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形通過(0, 1)，且當 $x=3$ 時，$f(x)$ 的最小值爲 -2，求 $a+b-c$ 的值。

8. 求 $x^2+2y^2+z^2-6x+4y-10z+13$ 的最小值。

9. 在數線上，已知兩點 $A(2)$、$B(8)$，若 P 點代表的數爲 x。

   試回答下列各問題：

   ① 將 $y=2\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 表成 x 的二次式。

   ② 將 y 化成 $a(x-h)^2+k$ 的形式。

   ③ 若 x 爲整數，求 y 的最小值。

附錄

A1 立方根與高次方根

在本單元裡，我們除了討論立方根的性質和運算規則以外，也要介紹高次方根。

當實數 a 為某個實數 b 的三次方時，$a=b^3$，我們就稱 b 為 a 的**立方根**，並記作 $\sqrt[3]{a}=b$，其中 $\sqrt[3]{a}$ 讀作「**三次根號 *a***」，並稱 a 為「**被開方數**」。例如：$27=3^3$ 及 $-8=(-2)^3$，所以 $\sqrt[3]{27}=3$ 及 $\sqrt[3]{-8}=-2$。不同於平方根的被開方數必須是非負的數，立方根的被開方數可以是任意實數。顯然的，被開方數與它的立方根同號。

在本單元中，我們只討論被開方數為有理數的立方根或高次方根。

【立方根的乘法與除法】

兩個立方根之間的乘法與除法運算類似於平方根的情形，有下列的規則：

(1) $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$ ；

(2) $\sqrt[3]{a}\div\sqrt[3]{b}=\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ ，其中 $b\neq 0$ 。

【範例 1】計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3}$　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt[3]{4}$

(3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{2}$　　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}$

【解】

(1) $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\times 5}=\sqrt[3]{15}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}\times 4}=\sqrt[3]{2}$

(3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{4\div 2}=\sqrt[3]{2}$

(4) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}\div\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}\div\dfrac{9}{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}\times\dfrac{2}{9}}=\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}=\dfrac{2}{3}$

【類題練習 1】計算下列各式：

(1) $\sqrt[3]{25}\times\sqrt[3]{5}$　　(2) $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{3}$

(3) $\sqrt[3]{15}\div\sqrt[3]{5}$　　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}\div\sqrt[3]{\dfrac{5}{16}}$

由規則(1)我們知道，$\sqrt[3]{-5}=\sqrt[3]{(-1)^3\times5}=(-1)\times\sqrt[3]{5}=-\sqrt[3]{5}$。因此，習慣上，常將 $\sqrt[3]{-a}$ 改寫成 $-\sqrt[3]{a}$，其中 a 爲正數。

【最簡根式】

如同平方根的情形，當被開方數爲整數且不是一個完全立方數時，我們可以利用數的標準分解式及立方根的乘法，來化簡根式。例如：化簡 $\sqrt[3]{720}$ 時，我們先將 720 寫成 $2^4\times3^2\times5=2^3\times2\times3^2\times5$，再化簡求得

$$\sqrt[3]{720}=\sqrt[3]{2^3\times2\times3^2\times5}=2\sqrt[3]{90}\text{ 。}$$

當被開方數爲有理數時，通常會將運算結果寫成分母不含有根號的形式。例如，我們會將 $\sqrt[3]{\dfrac{8}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}$ 改寫成

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}}=\frac{2\times\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}}=\frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}\text{（或}\frac{2}{5}\sqrt[3]{25}\text{）。}$$

類似平方根的化簡，我們將立方根寫成「**最簡根式**」$\dfrac{p}{q}\sqrt[3]{n}$（或 $\dfrac{p\sqrt[3]{n}}{q}$）的形式，其中 $\dfrac{p}{q}$ 爲最簡分數，n 爲大於 1 的整數，並且不能被任何大於 1 的整數的立方整除，我們稱這樣的過程爲「**立方根化簡**」。例如：$2\sqrt[3]{90}$ 及 $\dfrac{2}{5}\sqrt[3]{25}$ 都是最簡根式。

【範例 2】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{270}$　　(2) $\sqrt[3]{-432}$　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$

【解】　(1) $\sqrt[3]{270}=\sqrt[3]{3^3\times 10}=3\sqrt[3]{10}$

(2) 因為$-432=-2^4\times 3^3=-(2\times 3)^3\times 2$，

所以$\sqrt[3]{-432}=-\sqrt[3]{(2\times 3)^3}\times\sqrt[3]{2}=-6\sqrt[3]{2}$。

(3) 我們可先將$\dfrac{2}{3}$的分子、分母同乘於3^2後再做化簡，即

$\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{2\times 3^2}{3\times 3^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{\sqrt[3]{3^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{18}}{3}$。

【類題練習 2】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{135}$　　(2) $\sqrt[3]{-3000}$　　(3) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$

當兩個立方根化為最簡根式後，如果在它們的最簡根式的立方根號內有相同的被開方數時，我們就稱這兩個立方根為**同類方根**。例如，$\sqrt[3]{2}$、$\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$（可化為$\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$）和$-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$都是同類方根，但是$\sqrt[3]{2}$與$\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$（可化為$\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$）就不是同類方根。

在化簡根式時，我們可以利用同類方根的合併來簡化數學式。

【範例 3】化簡下列各式：

(1) $-2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}$　　(2) $4\sqrt{7}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{\dfrac{7}{27}}-\sqrt[3]{\dfrac{81}{2}}$

【解】 (1) $-2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}=(-2+6)\sqrt[3]{2}+(3-5)\sqrt[3]{3}$

$$=4\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$$

(2) $4\sqrt{7}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{\frac{7}{27}}-\sqrt[3]{\frac{81}{2}}=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}}$

$$=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{3\times2\times2}}{\sqrt[3]{2\times2\times2}}$$

$$=4\sqrt{7}+2\sqrt[3]{12}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{12}}{2}$$

$$=4\sqrt{7}+\frac{\sqrt[3]{12}}{2}+\frac{\sqrt[3]{7}}{3}$$

註：$\sqrt{7}$和$\sqrt[3]{7}$不是同類方根。

【類題練習 3】化簡下列各式：

(1) $-4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{2}-6\sqrt[3]{3}$ (2) $\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{\frac{2}{27}}+\sqrt{8}-\sqrt[3]{\frac{125}{2}}$

對於某些較爲特殊的根式，可嘗試利用乘法公式來求乘積。我們先複習兩個常用的立方公式：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

【範例 4】利用立方公式化簡$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$。

【解】 我們可以利用$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$來化簡。

令 $a=\sqrt[3]{3}$、$b=\sqrt[3]{2}$，即可得到：

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=(\sqrt[3]{3})^3+(\sqrt[3]{2})^3$$

$$=3+2=5$$

【類題練習 4】利用立方公式化簡$(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$。

【根式分母的有理化】

如同平方根的有理化技巧，我們也可利用立方乘法公式來做分母含有立方根的根式的有理化。

【範例 5】有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$

【解】 (1) 由立方公式，我們知道

$$(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2})^3+1^3=2+1=3。$$

所以，若想將分母的根號去掉，可對分子與分母同乘以$(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)$即可。因此得到：

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}=\frac{1\times(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}{(\sqrt[3]{2}+1)(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1)}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}{3}$$

(2) 我們對分子與分母同乘以$\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$，即得

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\frac{1\times(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3}$$
$$=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}。$$

【類題練習 5】 有理化下列各根式的分母：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$

【認識高次方根】

除了 a 的立方根記為 $\sqrt[3]{a}$ 以外，其實平方根 $\sqrt{a}$ 即為 $\sqrt[2]{a}$ 讀作「**二次根號 a**」，但是 **2 可以省略不寫**。在高中數學的指數單元中，還會出現 $\sqrt[4]{a}$ (讀作「**四次根號 a**」)、$\sqrt[5]{a}$ (讀作「**五次根號 a**」)、…等高次方根。因此，若 n 為正整數，且 $a=b^n$ 時，我們就稱 b 為 a 的 **n 次方根**，並記作 $\sqrt[n]{a}=b$，其中 $\sqrt[n]{a}$ 讀作「**n 次根號 a**」，並稱 a 為「**被開方數**」。在這裡，我們假設 $\sqrt[n]{a}$ 有意義，例如當 n 為偶數時，被開方數 a 必須為非負數；當 n 為奇數時，a 可以為任意實數。

事實上，兩個 n 次方根之間的乘法與除法，也類似於平方根及立方根的運算規則：當 $\sqrt[n]{a}$ 、$\sqrt[n]{b}$ 有意義時，

(1) $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(2) $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$，其中 $n\geq 2$，$b\neq 0$。

如同平方根及立方根的情形，我們可以利用數的標準分解式來化簡高次根式。

【範例 6】 化簡下列各式：

(1) $\sqrt[4]{16}$ (2) $\sqrt[5]{-243}$ (3) $\sqrt[6]{192}$ (4) $\sqrt[9]{-1024}$ (5) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$

【解】 (1) 因為 $16=2^4$，所以 $\sqrt[4]{16}=2$。

(2) 因為 $-243=(-1)^5\times 3^5=(-3)^5$，所以 $\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$。

(3) $\sqrt[6]{192}=\sqrt[6]{2^6\times 3}=\sqrt[6]{2^6}\times\sqrt[6]{3}=2\sqrt[6]{3}$

(4) $\sqrt[9]{-1024}=\sqrt[9]{-2^{10}}=\sqrt[9]{(-2)^9\times 2}=\sqrt[9]{(-2)^9}\times\sqrt[9]{2}=-2\sqrt[9]{2}$

(5) 因爲$\dfrac{16}{81}=\dfrac{2^4}{3^4}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$，所以$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}=\dfrac{2}{3}$。

因爲實數的偶次方必爲正數或 0，所以偶次方根的被開方數如同平方根必須爲非負數,如範例 6 中的(1)、(3)和(5)；而奇次方根的被開方數如同立方根可爲任意實數，如範例 6 中的(2)和(4)。事實上，遇到奇次方根且被開方數爲負數時，可先將負號寫在根號外，例如：在範例 6(2)中，$\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-\sqrt[5]{3^5}=-3$。

【類題練習 6】化簡下列各式：

(1) $\sqrt[4]{81}$　(2) $\sqrt[6]{64}$　(3) $\sqrt[7]{-128}$　(4) $\sqrt[5]{-\dfrac{32}{243}}$

在國中階段，我們學過指數爲整數的指數律。事實上，n 次方根也可以用指數的形式來表示。例如：a 的二次方根可以記爲$a^{1/2}$(讀作 a 的二分之一次方)，即$\sqrt{a}=a^{1/2}$；a 的三次方根可以記爲$a^{1/3}$ (讀作 a 的三分之一次方) ，即$\sqrt[3]{a}=a^{1/3}$。所以，a 的 n 次方根可以記爲$a^{1/n}$(讀作 a 的 n 分之一次方)，即$\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$。

由方根的乘法與除法，我們知道：

$3^{1/2}\times 3^{1/2}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{3\times 3}=3^1$；　$2^{1/2}\times 3^{1/2}=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{2\times 3}=(2\times 3)^{1/2}$；

$(2^3)^{1/2}=\sqrt{8}=\sqrt{2\times 2\times 2}=(\sqrt{2})^3=2^{1/2}\times 2^{1/2}\times 2^{1/2}=2^{1/2+1/2+1/2}=2^{3\times(1/2)}$；

$$(2^{1/2})^3=(\sqrt{2})^3=\sqrt{2^3}=2^{(1/2)\times 3}\text{；}2^{1/2}\div 3^{1/2}=\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=(\frac{2}{3})^{1/2}\text{等。}$$

也就是說，在高中的課程中，指數律的學習將由指數爲整數延伸到有理數：

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\text{；}\qquad a^m\times b^m=(ab)^m\text{；}$$

$$(a^m)^n=(a^n)^m=a^{mn}\text{；}\qquad a^m\div b^m=(\frac{a}{b})^m\text{，其中}b\neq 0\text{。}$$

【家庭作業】

1. 求下列各數的立方根：

   ① 64　　② -729

2. 將下列各數化簡成最簡根式：

   ① $\sqrt[3]{128}$　　② $\sqrt[3]{-4000}$

3. 化簡下列各式：

   ① $\sqrt[3]{36}\times\sqrt[3]{6}$　　② $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{45}$

4. 化簡 $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ 。

5. 化簡下列各式：

   ① $-6\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{3}+8\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$　　② $10\sqrt{2}+\sqrt[3]{8}+\sqrt{18}+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

6. 化簡 $(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)$ 。

7. 有理化下列各根式的分母：

   ① $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}$　　② $\frac{1}{\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{4}}$

8. 化簡下列各式：

   ① $\sqrt[5]{32}$　　② $\sqrt[4]{48}$　　③ $\sqrt[5]{-6250}$　　④ $\sqrt[5]{-\frac{1024}{3125}}$

A2　一元二次方程式的根與係數的關係

在 4-1 節的想想看中，我們請同學觀察兩根的和、兩根的積與原方程式的係數之間的關係。現在，我們來對這些關係做說明。

設α、β為方程式$ax^2+bx+c=0$的兩個根，因此$ax^2+bx+c=0$可化成$a(x-\alpha)(x-\beta)=0$。我們知道

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$\Rightarrow \quad x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$$

經由比較係數，得到兩根的和$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$及兩根的積$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$。因此，一元二次方程式的根與係數間有以下的關係：

若$ax^2+bx+c=0$的兩根為α、β，則$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$及$\alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}$。

事實上，由公式解也可以得到：

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

和

$$\alpha\cdot\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

【範例 1】 設α、β爲$x^2+3x-8=0$的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ (3) $\alpha-\beta$

【解】 $\because\ \alpha$、β爲$x^2+3x-8=0$的兩根

$\therefore\ \alpha+\beta=-\dfrac{3}{1}=-3$、$\alpha\beta=\dfrac{-8}{1}=-8$

(1) $\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2(-8)=25$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{-3}{-8}=\dfrac{3}{8}$

(3) $(\alpha-\beta)^2=\ \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$=\ (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=\ (-3)^2-4(-8)=41$

所以$\alpha-\beta=\pm\sqrt{41}$。

若知道某一元二次方程式的兩根，我們能不能反推而求得這個一元二次方程式呢？

設α、β爲所求方程式$ax^2+bx+c=0$的兩根。

等號兩邊同除以 a，得 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

由根與係數的關係得知： $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$、$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

因此，方程式可以改寫成$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$。

【範例 2】 設α、β爲$x^2+10x-50=0$的兩根。求以$\dfrac{1}{\alpha}$、$\dfrac{1}{\beta}$爲兩根的方程式。

【解】 以$\dfrac{1}{\alpha}$及$\dfrac{1}{\beta}$爲兩根的方程式可寫爲：

$$x^2-(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})x+\frac{1}{\alpha\beta}=0 \qquad (1)$$

$\because\ \alpha$、β為$x^2+10x-50=0$的兩根

$\therefore\ \alpha+\beta=-10$、$\alpha\beta=-50$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{-10}{-50}=\frac{1}{5} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{-50}=-\frac{1}{50} \qquad (3)$$

將(2)、(3)的結果代入(1)中得到

$$x^2-\frac{1}{5}x-\frac{1}{50}=0\text{。}$$

因此，該方程式可表爲$x^2-\frac{1}{5}x-\frac{1}{50}=0$。

【類題練習】 1. 設α、β爲$x^2+4x-9=0$的兩根，求下列各式的值：

(1) $\alpha+\beta$　(2) $\alpha\beta$　(3) $\alpha^2+\beta^2$　(4) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$

2. 設α、β爲$x^2+4x+2=0$的兩根，求以α^2、β^2爲兩根的方程式。

【範例 3】 甲、乙兩生同解一個一元二次方程式。甲因爲看錯一次項係數，而解得兩根爲 2 與 7；乙因爲看錯常數項，而解得兩根爲 1 與 -10；除此以外無其它錯誤。試求正確的兩根爲何？

【解】 我們可設此一元二次方程式爲$x^2+bx+c=0$。

以 2 與 7 爲兩根的一元二次方程式爲

$$x^2-(2+7)x+2\times7==0\Rightarrow x^2-9x+14=0\text{。}$$

因爲甲看錯一次項係數，所以常數項$c=14$是正確的。

以 1 與-10爲兩根的一元二次方程式爲

$$x^2-(-10+1)x+(-10)\times1=0\Rightarrow x^2+9x-10=0\text{。}$$

因爲乙看錯常數項，所以一次項係數$b=9$是正確的。

綜合以上的討論得知，原方程式可表爲$x^2+9x+14=0$，也就是

$(x+2)(x+7)=0$，所以正確的兩根爲-2或-7。

【家庭作業】

1. 設α、β爲$x^2-2x-7=0$的兩根，求下列各式的值：

   ① $|\alpha-\beta|$　　② $\alpha^2+\beta^2$　　③ $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$

   ④ $(\alpha-1)(\beta-1)$　　⑤ $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

2. 甲、乙兩生同解一元二次方程式。甲看錯常數項而得到兩根-1和-3，而乙看錯一次項係數得到兩根 4 和-3，求正確的兩根。

3. 已知方程式的兩根爲$\dfrac{-1\pm 5\sqrt{2}}{4}$，求此方程式。

A3　不等式與集合

A3-1 不等式的解與集合

什麼是不等式的解？

凡是使得不等式成立的數，都是這個不等式的解。

以一元一次不等式為例，凡是小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的數都能使得不等式$2x-1\leq 0$成立，而且也只有這些小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的數才能滿足此不等式。此時要注意，當我們提到不等式的解時，並不是對某個單一特定的解而言，而是指它所有的解。所以，不等式$2x-1\leq 0$的解就是指所有「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的數」。在國中時，我們把原不等式$2x-1\leq 0$化為$x\leq\frac{1}{2}$的形式，並以它來表示$2x-1\leq 0$的解，並賦予數學式$x\leq\frac{1}{2}$兩層涵意：它除了表示一個不等式外，又代表這個不等式的所有解。

在某些情境之下，我們可能會進一步的要求這些解必為整數，因此必須用「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數」來表述這些解。在此，不難發現只用文字來敘述不等式的解會有其不便性。當然也可以把不等式的所有解一一列出：0、-1、-2、-3、-4、$\cdots$。這種表示法有點混淆不清，這是因為每個人對其中的「$\cdots$」可能有著不同解讀方式。所以，我們應避免這一種方式，儘管大家都可能看出這些已列出的數字所要表達出的規律。另一方面，並不是所有的東西都可以用一一列出的形式來呈現。

除了用文字敘述之外，在數學上是否有其它較為簡便的方式來描述它呢?

在高中階段，我們所要學習的數學概念及對象已經不再侷限於數字。因此，在陳述新的概念及對象時，我們為了避免冗長的敘述和語意的混

淆不清，我們將逐步引用康托（Cantor）所建立的集合概念。根據康托的說法，當我們能把一些清晰可分的、客觀的世界中，或我們思想中的事物看成「一體」時，這個整體便稱爲「**集合**」(Set)。我們稱集合中的事物爲它的「**元素**」，如果 x 是集合 S 的元素，便用符號 $x\in S$（讀作 x **屬於** S）表示；若 x 不是 S 的元素，則以 $x\notin S$（讀作 x **不屬於** S）表示；不包含任何元素的集合稱爲「**空集合**」，並記作$\varnothing$。例如，我們可以把「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數」這些數當成一個集合 S。集合 S 的元素就是 0，-1，-2，-3，-4、…這些數字。當然，我們也可以符號 $0\in S$、$-1\in S$、$-2\in S$、$-3\in S$、…來陳述這一件事；另一方面，可以用 $1\notin S$、$2\notin S$、$3\notin S$、$4\notin S$、…來表示所有的自然數並不在集合 S 裡面。

【類題練習 1】已知 $A=\{1, 2, 5\}$，下列何者正確？

(1) $2\in A$ (2) $3\notin A$ (3) $5\in A$

現在來看如何以集合的語言，來敘述「小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數」呢？

(1) $\{\,0,-1,-2,-3,-4,\cdots\,\}$；

(2) $\{\,x \mid x$ 爲小於$\frac{1}{2}$或等於$\frac{1}{2}$的整數$\}$；

(3) $\{\,x \mid x\le\frac{1}{2}$ 且 x 爲整數$\}$、$\{\,x \mid x\le\frac{1}{2}$ 且 $x\in Z\}$或$\{\,x\in Z \mid x\le\frac{1}{2}\,\}$。

首先，來看這幾種表示法的差異。將所有的元素以(1)的形式在括弧$\{\quad\}$中表列出來，並稱此方法爲集合的**表列法**。當使用表列法列舉元素時，元素之間並沒有一定的排序，而且元素也可以重複列舉。例如，由 a、b 和 c 所構成的集合可以用$\{a, b, c\}$、$\{b, c, a\}$、$\{a, b, c, c, a\}$等來表示。我們已在前面說明了(1)中的$\{\,0,-1,-2,-3,-4,\cdots\,\}$這種表示法的缺失。倘若，一個集合有很多元素（或甚至有無窮多個元素）時，我們不方便或者甚至根本

無法全數列舉時，則可採用如(2)或(3)的方式，以集合中元素的共同的特性來表示（稱爲**構造法**）。(3)中的表示法是使用較多的數學符號來陳述，例如，用 $x\le\frac{1}{2}$ 來取代文字敘述 x 爲小於 $\frac{1}{2}$ 或等於 $\frac{1}{2}$，並用 $x\in Z$ 來取代文字敘述 x 爲整數。

【類題練習 2】已知 $A=\{\, x \mid x\le 2$，且 $x\in Z\,\}$，下列何者正確？

(1) $2\in A$ (2) $-3\notin A$ (3) $0.5\in A$

在此，不難看出使用集合符號的便利性。在解方程式或不等式時，除了可用集合的語言來表示方程式或不等式的解外，也可以用集合的概念來輔助解題。我們將舉一些例子來說明這一概念。如果集合 A 中的每一個元素都屬於集合 B，我們就稱 A 是 B 的「**子集**」，並記作 $A\subset B$（讀作 A **包含於** B）或 $B\supset A$（讀作 B **包含** A）。如果進一步，我們又知道 B 中的每一個元素也都屬於 A，也就是說 A 與 B 兩集合由相同的元素所構成，那麼我們就說 A、B 兩集合相同(或相等)，並記作 $A=B$。例如，

$$\{\,0,-1,-2,-3,-4,\cdots\}=\{\, x \mid x \text{ 爲小於}\frac{1}{2}\text{或等於}\frac{1}{2}\text{的整數}\}。$$

【想想看】對集合 A，我們能說 $A\subset A$ 嗎？

如果所探討的集合都爲某個給定集合 $\boldsymbol{U}$ 的子集，則稱集合 $\boldsymbol{U}$ 爲**宇集**。一般來說，在解方程式或不等式時，我們會考慮所有的實數解，此時就可以取所有的實數 $\boldsymbol{R}$ 爲宇集；如果我們只考慮整數解時，那麼就可以取所有的整數 $\boldsymbol{Z}$ 爲宇集。

注意，我們要仔細區分 $1\in A$ 及 $\{1\}\subset A$ 兩個符號的差異。前者是說 1 是集合 A 的一個元素，而後面者是指集合 $\{1\}$ 是集合 A 的一個子集合。當然這兩個概念是可以互推的。值得一提的是：$1\subset A$ 是一個錯誤的表示法，這是因爲 1 不是一個集合，所以它不能是集合 A 的子集；另一方面，可能會看到 $\{1\}\in A$ 這一個表示法，但是在高中的數學課程裡並不討論此一情形。

【重點整理】

1. 當我們能把一些事物看成「一體」時，這個整體稱爲集合，且稱集合中的事物爲它的元素。
2. 若 a 是集合 A 的元素，稱 a 屬於 A，記作 $a\in A$；反之，就稱 a 不屬於 A，記作 $a\notin A$。
3. 如果集合 A 中的每一個元素都屬於集合 B，我們就稱 A 是 B 的子集，且說 A 包含於 B，並記作 $A\subset B$，或者說 B 包含 A，並記作 $B\supset A$。
4. 集合可以用表列法或構造法來表示。

【家庭作業】

基礎題

1. 已知 $T=\{1,3,4,6\}$，下列何者正確？

   ① $2\in T$　② $3\notin T$　③ $4\in T$　　答案爲_______

2. 請依據集合的定義，將 N、R、Q、Z 填入下列空格：

   ① _______$=\{$所有的自然數$\}$　② _______$=\{$所有的整數$\}$

   ③ _______$=\{$所有的有理數$\}$　④ _______$=\{$所有的實數$\}$

3. 已知 $A=\{\,x\mid x^2-3x+2=0\,\}$，請將集合 A 以表列法表示。

4. 已知 $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$B=\{1, 3, 5\}$，$C=\{1, 3, 5, 6\}$，以包含於 $\subset$、或包含 $\supset$ 符號表示下列集合之間的包含關係：

   ① A _____ B　② B _____ A

   ③ C _____ A　④ B _____ C

進階題

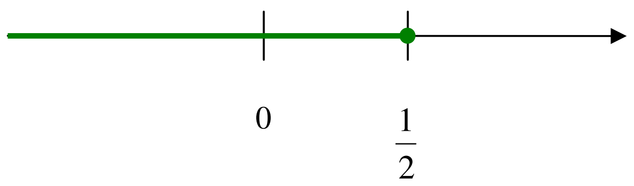
5. 已知 $\{1, 2, 3\}\subset A\subset\{1, 2, 3, 4, 5\}$，請寫出所有滿足這個包含關係的集合 A。

A3-2　一元一次不等式

在本單元裡，我們將學習如何解形如下列的不等式

$$3x-2>4、3x-1\geq 5x-3、$$
$$2x<3x-5<13、|x-1|<5 \text{ 或 } |2x-1|>3。$$

在學習解不等式之前，我們以 $2x-1\leq 0$ 為例來複習如何使用數線來圖示不等式的解。

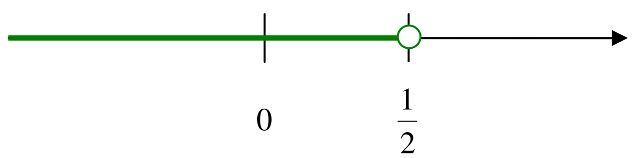


在上圖中，我們以圓點「•」來表示坐標為 $\frac{1}{2}$ 的點在這個不等式解的範圍內。因為數線上的綠色部分的點所表示的數都小於或等於 $\frac{1}{2}$，所以可用綠色部分來圖示不等式 $2x-1\leq 0$ 所有解的範圍。

【範例 1】在數線上圖示不等式的所有解：

(1)　$2x<1$　　　　(2)　$2x\geq 1$

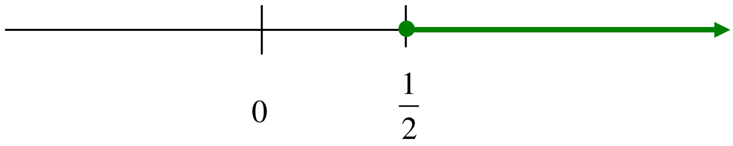
【解】　(1) 因為不等式 $2x<1$ 與不等式 $2x\leq 1$ 解的差異，在於 $\frac{1}{2}$ 不是前者的解，所以不等式 $2x<1$ 的圖示(下圖)與上圖類似，並以圓圈「○」來表示坐標為 $\frac{1}{2}$ 的點不在這個不等式 $2x<1$ 解的範圍內。



我們可以用集合 $\{\, x \mid x<\frac{1}{2} \,\}$ 來表示不等式 $2x<1$ 的解。

(2)　因為由三一律知道，不等式 $2x<1$ 與不等式 $2x\geq 1$ 不能有共同的解，並且任意一個數一定是其中某個不等式的解，

所以不等式 $2x\geq 1$ 的解可圖示如下：



我們可以用集合$\{\, x \mid x\geq \frac{1}{2}\}$來表示不等式 $2x\geq 1$ 的解。

從上面的例子，我們知道：集合$\{\, x \mid x\geq \frac{1}{2}\}$與集合$\{\, x \mid x< \frac{1}{2}\}$沒有任何共同的部份，像這樣的兩個集合稱爲互斥。

另一方面，就如前面所提到，因爲由三一律知道，不等式 $2x<1$ 與不等式 $2x\geq 1$ 不能有共同的解，並且任意一個數一定是其中某個不等式的解。爲了方便說明，我們將不等式 $2x<1$ 與不等式 $2x\geq 1$ 的解分別用集合 A、集合 B 來表示。因爲 A、B 都是實數 $\boldsymbol{R}$ 的子集，所以在這裡，我們取 $\boldsymbol{R}$ 爲宇集。只要將宇集 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{R}$ 中所有屬於集合 A 的元素去掉後，所剩下的就是集合 B，這就是集合 A 的**餘集**(或稱爲**補集**)的概念。

其實，我們可以把補集的概念推廣到下面的情形：對於任意兩集合 A、B，若將 A 中所有屬於 B 的元素去掉後所形成的集合則稱爲 A 對 B 的「**差集**」，並記作 $A-B$，即：

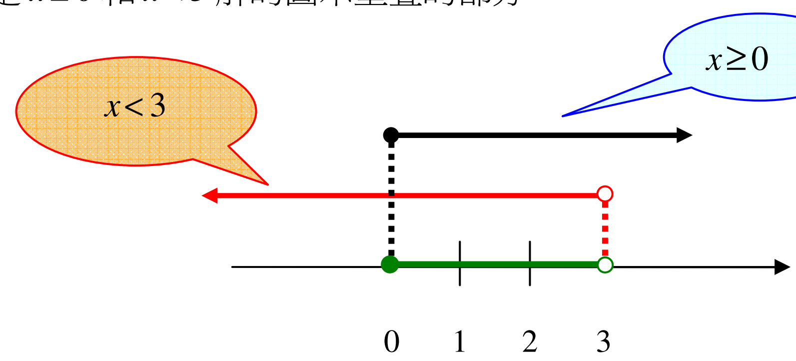
$$A-B=\{\, x \mid x\in A\text{，但 } x\notin B\}$$

也就是說，我們將 A 的餘集(或稱補集)就是 $\boldsymbol{U}$ 對 A 的差集，記作 $\overline{A}=\boldsymbol{U}-A$。在前面的例子中，不等式 $2x<1$ 的解集合 A 的餘集就是不等式 $2x\geq 1$ 的解集合 B，至於 $A-B=A$，$B-A=B$。

【類題練習 1】在數線上圖示下列不等式：

(1) $x\geq 3$　(2) $x<2$　(3) $x>-3$　(4) $x\leq 4$

我們再以另一個不等式 $0\le x<3$ 爲例：因爲不等式 $0\le x<3$ 即表示 $0\le x$ 和 $x<3$ 兩個不等式同時成立，所以，$0\le x<3$ 解的圖示爲下圖中的綠色部分，也就是 $x\ge 0$ 和 $x<3$ 解的圖示重疊的部分。



上圖中的綠色部分即爲 $\{x\,|\,x\ge 0\}$ 與 $\{x\,|\,x<3\}$ 兩個集合的共同部分。這就是集合的交集概念：對於任意兩個集合 A、B，由 A 與 B 所有共同的元素所形成的集合稱爲 A 與 B 的「**交集**」，並記作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{\,x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}。$$

所以，可以用 $\{x\,|\,x<3\}\cap\{x\,|\,x\ge 0\}$ 來表示 $\{x\,|\,x<3\}$ 與 $\{x\,|\,x\ge 0\}$ 的交集。我們知道在交集中的任何一個數一定是大於或等於0，並且小於3，反之亦然，因此，$\{x\,|\,x<3\}\cap\{x\,|\,x\ge 0\}$、$\{x \mid x\ge 0 \text{ 且 } x<3\}$這兩個集合相同。所以，這個交集也可以用$\{x \mid x\ge 0 \text{ 且 } x<3\}$來表示，也因此，可以用 $\{x\,|\,0\le x<3\}$ 來表示。

若集合 A 與 B 的交集不爲空集合，也就是 $A\cap B\neq\varnothing$，則稱 A 與 B 相交；否則稱爲 A 與 B 互斥。例如，前面所提到的$\{\,x \mid x\ge \frac{1}{2}\}$與$\{\,x \mid x<\frac{1}{2}\}$互斥。同樣的，若 $A=\{1,2\}$，$B=\{2,3\}$，$C=\{3,4\}$，那麼 $A\cap B=\{2\}\neq\varnothing$，所以 A 與 B 相交；而 $A\cap C=\varnothing$，所以 A 與 C 互斥。事實上，在解聯立二元一次方程組時，就已經使用到交集的概念了。例如在方程組 $x=0$、$y=0$ 中，我們知道二元一次方程式 $x=0$、$y=0$ 解的圖形分別爲 y 軸、x 軸。因爲這二個方程式要同時成立，所以要找出 x 軸與 y 軸共同的部份。當然，它的解就是原點$(0, 0)$。在這裡可以把 x 軸與 y 軸看成兩個集合，而原點正是它們的交集。

【類題練習 2】在數線上圖示下列不等式：

(1) $-2<x<2$ (2) $-3\leq x<1$

【解不等式 $ax+b>c$】

如何解形如 $ax+b>c$ 的不等式呢？（其中 a、b、c 為常數）

在學習解不等式之前，我們先複習常出現在解題過程中幾個不等量的基本推論：當 $a>b$ 時，

推論 1：對任意數 c，我們恆有 $a+c>b+c$、$a-c>b-c$；

推論 2：對任意正數 $c>0$，我們恆有 $ac>bc$、$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$；

推論 3：對任意負數 $c<0$，我們恆有 $ac<bc$、$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

此外，對於不等號「＜」、「≥」和「≤」，上述的推論也都成立。我們可引用推論 1~3 來改寫不等式，並將原不等式化簡而改寫成形如

$x>a$、$x<a$、$x\geq a$ 或 $x\leq a$

的**最簡不等式**。從化簡的過程中，我們觀察到，原不等式的解就是使得化簡後所得的最簡不等式成立的所有數。

我們以下面的例子來說明上述的方法。

【範例 2】 解下列不等式：

(1) $3x-2>4$ (2) $-5x+3\geq 5$

【解】 (1) $3x-2>4 \Rightarrow 3x-2+2>4+2$

$\Rightarrow 3x>4+2$

$\Rightarrow 3x>6$

$\Rightarrow x>2$

所以，不等式的解為所有大於 2 的數，並可用集合 $\{x \mid x>2\}$來表示。

(2) $-5x+3\geq 5 \Rightarrow -5x\geq 2$

$\Rightarrow x\leq -\dfrac{2}{5}$

所以，不等式的解為所有小於或等於$-\dfrac{2}{5}$的數，並可用集合$\{x \mid x\leq -\dfrac{2}{5}\}$來表示。

【類題練習 3】 解下列不等式：

(1) $4x+2\geq 7$ (2) $-3x-2<4$

【解不等式 $ax+b>cx+d$】

如何解形如 $ax+b>cx+d$ 的不等式呢？（其中 a、b、c 和 d 為常數）

【範例 3】 解不等式 $3x-1\geq 5x-3$。

【解】 $3x-1\geq 5x-3 \Rightarrow 3x-5x\geq -3+1$

$\Rightarrow -2x\geq -2$

$\Rightarrow x\leq 1$

所以，不等式的解為所有小於或等於 1 的數，並可用集合$\{x \mid x\leq 1\}$表示。

【類題練習 4】 解下列各不等式：

(1) $7x-2<4x-5$ (2) $2x-4\leq 7-9x$

我們如何解形如 $2x<3x-5<13$ 此類合併形式的不等式呢？首先，我們需將這類的不等式改寫成某些不等式的組合，然後再利用前面所學的方法來解這些不等式。此時，原不等式的解就是這些不等式解的組合。

【範例 4】 解 $2x<3x-5<13$。

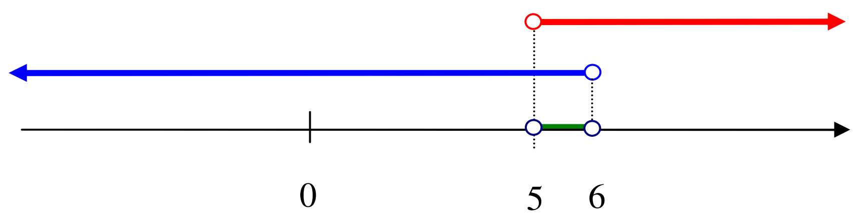
【解】 因為 $2x<3x-5<13$ 表示 $2x<3x-5$ 和 $3x-5<13$ 同時成立，因此，先將這兩組不等式分別化簡成最簡不等式後，再找出解的

共同部分：

$$\begin{array}{lcl} \quad 2x<3x-5 & & \quad 3x-5<13 \\ \Rightarrow -x<-5 & 且 & \Rightarrow\ 3x<18 \\ \Rightarrow\ x>5 & & \Rightarrow\ x<6 \end{array}$$

因爲 $x>5$ 和 $x<6$ 必須同時成立，因此，原不等式的解爲所有大於 5 且小於 6 的數，並可用集合$\{\,x \mid x>5$ 且 $x<6\}$或用集合$\{\,x \mid 5<x<6\}$來表示。

我們也可在數線上圖示 $2x<3x-5<13$ 的解：將上面的結果分別標示在數線上，重疊的部分即爲答案：



所以，圖中綠色部分的線段即爲$\{\,x \mid x<6\}$與$\{\,x \mid x>5\}$的交集，也就是集合 $\{\,x \mid 5<x<6\}$。

【類題練習 5】解 $4x\le 5x-3<17$。

解合併形式的不等式時，有時可將解題的過程合併在一起。

【範例 5】解 $-2<3x+4\le 8$。

【解】 方法一：因爲不等式$-2<3x+4\le 8$ 爲$-2<3x+4$ 及 $3x+4\le 8$ 的合併。因此，可先分別求不等式$-2<3x+4$ 及 $3x+4\le 8$ 的解，再找出它們共同的解。

$$\begin{array}{lclcl} -2<3x+4 & \Rightarrow -2-4<3x & & 3x+4\le 8 & \Rightarrow\ 3x\le 8-4 \\ & \Rightarrow -6<3x & 且 & & \Rightarrow\ 3x\le 4 \\ & \Rightarrow -2<x & & & \Rightarrow\ x\le \dfrac{4}{3} \end{array}$$

本題也可以把上面的過程合併如下：

方法二：

$$\begin{aligned} -2 &< 3x+4 \le 8 \\ \Rightarrow -2-4 &< 3x \le 8-4 \\ \Rightarrow -6 &< 3x \le 4 \\ \Rightarrow -2 &< x \le \frac{4}{3} \end{aligned}$$

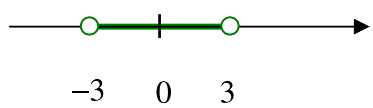
所以，由上面討論得知，不等式的解爲所有大於-2且小於$\frac{4}{3}$或等於$\frac{4}{3}$的數，並可用集合$\{x \mid -2<x\le \frac{4}{3}\}$表示。

【類題練習 6】解下列不等式：

(1) $9\ge 4x-2\ge 7$ (2) $4\le -3x-2\le 8$

(3) $\frac{2}{5}\le \frac{5}{3}(x+6)<\frac{7}{2}$

接下來，我們來練習解含有絕對值的不等式。因爲可用$|a-b|$來表示數線上 A(a)與 B(b)兩點的距離，並且$|x|=3$可寫成$|x-0|=3$，所以$|x|=3$可表示在數線上與原點的距離爲 3 的點 P(x)。因此，x 可以等於 3 或-3。同理，介於-3與 3 之間的任何一個數都能滿足不等式$|x|<3$，也就是說，不等式$|x|<3$的解即爲所有介於-3與 3 之間的數。因此，它的解可以圖示如下：



顯然的，對於任何一個正數 a，不等式$|x|<a$的解即爲所有介於$-a$與 a 之間的數，並可用集合$\{x \mid -a<x<a\}$來表示。

其實，含有絕對值符號的不等式都可改寫成不含絕對值符號的不等式。如果這個新不等式爲一元一次式，我們就可用前面提到的方法來解原不等式。

【範例 6】解下列不等式：

(1) $|x-1|\le 2$　　(2) $|2x-1|<5$

【解】 (1) $|x-1|\le 2 \Rightarrow -2\le x-1\le 2$

$\Rightarrow -2+1\le x\le 2+1$

$\Rightarrow -1\le x\le 3$

所以，不等式的解爲所有介於-1及 3 的數和-1、3 這兩個數，並可用集合$\{x \mid -1\le x\le 3\}$表示。

(2) 方法一：$|2x-1|<5 \Rightarrow \left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{5}{2}$

$\Rightarrow -\frac{5}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{5}{2}$

$\Rightarrow -2<x<3$

方法二：$|2x-1|<5 \Rightarrow -5<2x-1<5$

$\Rightarrow -5+1<2x<5+1$

$\Rightarrow -4<2x<6$

$\Rightarrow -2<x<3$

因此，不等式的解爲所有介於-2 及 3 的數，並可用集合$\{x \mid -2<x<3\}$來表示。

在範例 6 第(1)題中，因爲 1 恰爲-1 與 3 的中點，所以我們常用$|x-1|\le 2$來表示$-1\le x\le 3$。事實上，對於 $a\le x\le b$，我們也可用$\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\le\frac{b-a}{2}$來表示，其中$\frac{a+b}{2}$爲點 a 及點 b 的中點坐標，而$\frac{b-a}{2}$爲點 a 及點 b 距離的一半。

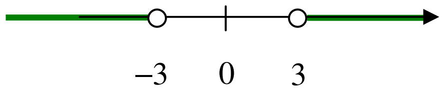
【類題練習 7】回答下列各題：

(1) 解 $|4x-2|<7$ 。

(2) 若 $|x-m|\le n$的解爲 $2\le x\le 6$，求 m 、n 的值。

(3) 若 $|ax-b|<4$的解爲 $1<x<5$，求 a 、b 的值。

同前，任何一個大於 3 或小於 -3 的數都滿足不等式 $|x|>3$，也就是說，不等式 $|x|>3$ 的解為所有大於 3 或小於 -3 的數。因此，它的解可圖示如下：



顯然的，對於任意正數 a，不等式 $|x|>a$ 的解即為所有大於 a 或小於 $-a$ 的數，並可用集合 $\{\ x \mid x>a$ 或 $x<-a\}$ 來表示。從圖示上，我們觀察到這個集合是由 $\{\ x \mid x>a\}$ 與 $\{\ x \mid x<-a\}$ 兩個集合共同所組合成的，這就是集合的聯集概念：對於任意兩個集合 A、B，我們稱由所有屬於 A 或屬於 B 的元素所形成的集合稱為 A 與 B 的「**聯集**」，並記作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{\ x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}\text{。}$$

在這裡，可以取 A、B 分別為 $\{\ x \mid x>a\}$ 與 $\{\ x \mid x<-a\}$ 兩個集合，所以，從上面的說明我們知道

$$A\cup B=\{\ x \mid x>a \text{ 或 } x<-a\}\text{。}$$

同樣的，若 $A=\{\ 1, 2\ \}$， $B=\{\ 2, 3\}$， $C=\{\ 3, 4\}$，那麼

$$A\cup B=\{1, 2,3\ \}\text{，}A\cup C=\{1, 2, 3, 4\ \}\text{。}$$

在 $\{\ x \mid x\geq\frac{1}{2}\}$ 與 $\{\ x \mid x<\frac{1}{2}\}$ 的例子裡，我們觀察到這兩個集合(射線)可以共同組成整個實數系(數線)，因此， $\{\ x \mid x\geq\frac{1}{2}\}\cup\{\ x \mid x<\frac{1}{2}\}=\boldsymbol{R}$。事實上，對於任意一個集合 A，它與它的補集的聯集一定等於宇集 $\boldsymbol{U}$，也就是說，$A\cup\overline{A}=\boldsymbol{U}$。

事實上，在解方程式 $xy=0$ 時，我們就已經使用了聯集的概念。在平面上，直線方程式 $x=0$、$y=0$ 分別表示 y 軸、x 軸。在這裡，可以把 x 軸當成集合 A，而將 y 軸看成集合 B，所以，方程式 $xy=0$ 的解(即為 x 軸與 y 軸這兩坐標軸)就是集合 A、B 的聯集。

【範例 7】 解不等式 $|2x-1|>3$。

【解】 $|2x-1|>3 \Rightarrow 2x-1<-3$ 或 $2x-1>3$

$\Rightarrow \quad 2x<-2$ 或 $2x>4$

$\Rightarrow \quad x<-1$ 或 $x>2$

因此，不等式的解爲所有小於 -1 或大於 2 的數，並可用集合 $\{x \mid x<-1$ 或 $x>2\}$ 表示。

在範例 7 中，不等式 $|2x-1|>3$ 的解也可以由 $\{x \mid x<-1\}$ 和 $\{x \mid x>2\}$ 兩集合聯集而成，並可用 $\{x \mid x<-1\} \cup \{x \mid x>2\}$ 或 $\{x \mid x<-1$ 或 $x>2\}$ 來表示。另一方面，我們也可用 $|x-\frac{1}{2}|>\frac{3}{2}$ 來表示 $x>2$ 或 $x<-1$，因此我們也常用 $\{x \mid |x-\frac{1}{2}|>\frac{3}{2}\}$ 來表示不等式的解 $|2x-1|>3$。

【類題練習 8】 解下列不等式：

(1) $|3x-2|>7$ (2) $|-4x+5|\geq 3$

【重點整理】

1. 對於任意兩個集合 A、B，由 A 與 B 所有共同的元素所形成的集合稱爲 A 與 B 的「交集」，並記作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$。
2. 由所有屬於 A 或屬於 B 的元素所形成的集合稱爲 A 與 B 的「聯集」，並記作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。
3. 對一不等式的兩邊同加上、減去一個數，或同乘、除以一個正數時，不等號不必改變。
4. 對一不等式的兩邊同乘或除以一個負數時，不等號必需改變方向。
5. 我們可將原不等式化簡而改寫成形如 $x>a$、$x<a$、$x\geq a$ 或 $x\leq a$ 的最簡不等式。
6. 我們可將含絕對值符號的不等式化爲不含絕對值符號的不等式。

【家庭作業】

基礎題

1. 在數線上圖示下列不等式：

① $x \geq 5$ ② $x < -2$

③ $x > 3$ ④ $x \leq -4$

⑤ $-3 < x \leq 2$ ⑥ $1 \leq x \leq 2$

2. 解下列不等式：

① $5x+1 \geq 7$ ② $-2x-4 \leq 3$

③ $3x-1 < 6x-2$ ④ $4x-4 \leq 8-7x$

⑤ $10 \geq 5x-1 \geq 3$ ⑥ $2 \leq -5x+3 \leq 6$

⑦ $|3x-1| < 5$ ⑧ $|4x-3| > 6$

⑨ $|-4x+1| \geq 5$ ⑩ $2x < 3x-3 < 17$

3. 已知 $A=\{2,3\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{3,4,6\}$，試回答下列各題:

① $A \cap B =$________ ② $B \cap C =$________

③ $A \cap C =$________ ④ $A \cup C =$________

⑤ $A-B =$________ ⑥ $B-C =$________

4. 若 $|x-m| \leq n$的解爲 $3 \leq x \leq 7$，求 m、n 的值。

進階題

5. 設 $A=\{x \mid x^2-ax-4=0\}$， $B=\{x \mid x^2+ax+b=0\}$。若 $A \cap B=\{-1\}$，求 a、b 的值。

6. 若 $|ax-b| < 5$的解爲$-1 < x < 4$，求 a、b 的值。

A3-3　不等量基本推論的應用

除了前一節中的三個基本推論外，不等式的遞移律：

如果 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$，

也是非常重要。事實上，對不等號「$<$」、「$\geq$」和「$\leq$」而言，這幾個基本推論及遞移律也都成立。

我們來看看遞移律與這些推論的幾個應用。

假設已知 $a>b$ 且 $c>d$。我們是否能比較 $a+c$ 和 $b+d$ 的大小呢？

若對 $a>b$ 的兩邊同加 c，可得　　$a+c>b+c$。

若對 $c>d$ 的兩邊同加 b，可得　　$b+c>b+d$。

由遞移律可得　　$a+c>b+c>b+d$。

所以得到：

推論 4：若 $a>b$ 且 $c>d$，則 $a+c>b+c>b+d$。

當然，對於不等號「$<$」、「$\geq$」和「$\leq$」，推論 4 也會成立。

【範例 1】 已知 $a<b$ 且 $c<d$。試推論 $a-d<b-c$。

【解】　對 $c<d$ 的兩邊同乘以(-1)，　　$-c>-d$，

即　　$-d<-c$。

對 $a<b$ 的兩邊同減 d，可得　　$a-d<b-d$。

對 $-d<-c$ 的兩邊同加 b，可得　　$b-d<b-c$。

所以，從遞移律可得　　$a-d<b-d<b-c$。

因此，$a-d<b-c$。

【想想看】 已知 $a<b$ 且 $c<d$，你能比較 $a-c$ 和 $b-d$ 的大小嗎？

【範例 2】 (1) 已知 $a>b>0$ 且 $c>d>0$，試推論 $ac>bd$。

(2) 已知 $a<b<0$ 且 $c<d<0$，試推論 $ac>bd$。

【解】 (1) 因為 $a>b$ 且 $c>0$，所以 $ac>bc$。

同理，因為 $c>d$ 且 $b>0$，所以 $bc>bd$。

由遞移律可得 $ac>bc>bd$。

因此，$ac>bd$。

(2) 方法一：

因為 $a<b$ 且 $c<0$，所以 $ac>bc$。

同理，因為 $c<d$ 且 $b<0$，所以 $bc>bd$。

由遞移律可得 $ac>bc>bd$。

所以，$ac>bd$。

方法二：

若對 $a<b<0$ 乘以(-1)可得 $-a>-b>0$。

同理，對 $c<d<0$ 乘以(-1)，可得 $-c>-d>0$。

因此，由第(1)題的結果可推知

$$(-a)(-c)>(-b)(-d)。$$

所以，$ac>bd$。

【想想看】已知 $a>b$ 且 $c>d$，請問 $ac>bd$ 是否正確？

【類題練習 1】請在下列各題中填入適當的不等號：

(1) 若 $a>b>0$，則 a^2 ____ ab _____b^2。

(2) 若 $a<b<0$，則 a^2 ____ ab _____b^2。

另外，下面兩個不等量的基本推論，對於高中課程中一元二次不等式單元的學習，就顯得格外重要：

推論 5：若 $ab>0$，或$\dfrac{a}{b}>0$，則 a 與 b 同號，

也就是說 $a>0$ 且 $b>0$，或 $a<0$ 且 $b<0$。

推論 6：若 $ab<0$，或 $\frac{a}{b}<0$，則 a 與 b 異號，

也就是說 $a>0$ 且 $b<0$，或 $a<0$ 且 $b>0$。

這兩個推論的學習將留待在正式課程中，再做探討。

【重點整理】

1. 不等式的遞移律：如果 $a>b$ 且 $b>c$，則 $a>c$。
2. 若 $a>b$ 且 $c>d$，則 $a+c>b+c>b+d$。對於不等號「$<$」、「$\geq$」和「$\leq$」，前式亦成立。
3. 若 $ab>0$，或 $\frac{a}{b}>0$，則 a 與 b 同號。
4. 若 $ab<0$，或 $\frac{a}{b}<0$，則 a 與 b 異號。

【家庭作業】

1. 請在下列各題中填入適當的不等號：

① 若 $a>b$，則

ⓐ $a+5$ ____ $b+5$； ⓑ $a-4$ ____ $b-4$；

ⓒ $3a$ ____ $3b$； ⓓ $-2a$ ____ $-2b$；

ⓔ $a+3$ ____ $b+2$。

② 若 $a>x$ 且 $x>4$，則 a ____ 4。

③ 若 $a<b$，則 $a-6$ ____ $b-4$。

④ 若 $a>b$ 且 $c>d$，則 $a+2c$ ____ $b+2d$。

⑤ 若 $a>2$ 且 $c>3$，則 ac ____ 6。

⑥ 若 $a<-2$ 且 $c<-4$，則 ac ____ 8。

⑦ 若 $a>5$，則 a^2 ____ 25。

⑧ 若 $a<-4$，則 a^2 ____ 16。

2. 填充題：

① 若 $ab>0$，則$(a\,,b)$在第 ______ 象限。

② 若 $ab<0$，則$(a\,,b)$在第 ______ 象限。

進階題

3. 試回答下列問題:

① 若 $ab>0$ 且 $a-b>0$，則$(a\,,b)$在第 ______ 象限。

② 若 $ab>0$ 且 $a+b<0$，則$(a\,,b)$在第 ______ 象限。

4. 已知 $x>2$，試回答下列問題:

① x^2 ______ $2x$　　② $2x$ ______ 4　　③ x^2 ______ 4

5. 已知 $x<-3$，試回答下列問題:

① x^2 ______ $-3x$　　② $-3x$ ______ 9　　③ x^2 ______ 9

A3-4　一元二次不等式

在國中的課程中，我們學過用因式分解法、配方法及公式解來解一元二次方程式。那麼，我們是否也可用同樣的概念來解形如$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c\geq 0$的一元二次不等式呢？

對於某些多項式ax^2+bx+c，我們可利用因式分解或公式解的概念把它寫成兩個一次多項式的乘積。此時，下面兩個不等量的基本推論就顯得格外重要：

推論 1：若 $ab>0$，或$\dfrac{a}{b}>0$，則 a 與 b 同號，也就是說

(1)　$a>0$ 且 $b>0$ 或 (2)　$a<0$ 且 $b<0$。

推論 2：若 $ab<0$，或$\dfrac{a}{b}<0$，則 a 與 b 異號，也就是說

(1)　$a>0$ 且 $b<0$ 或 (2)　$a<0$ 且 $b>0$。

現在，我們利用幾個因式分解的技巧來解一元二次不等式。以$x^2-4x+3>0$爲例：

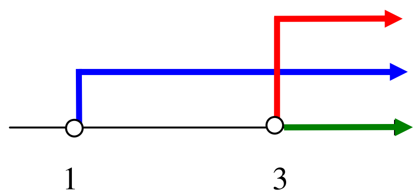
因爲$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$，所以可將原不等式寫成

$$(x-1)(x-3)>0\ 。$$

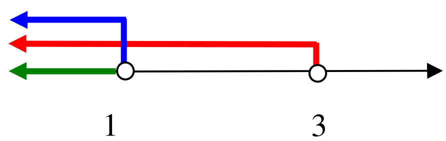
因此，$(x-1)$與$(x-3)$同號。所以有二種可能：

(1)　$(x-1)>0$且$(x-3)>0$，或 (2)　$(x-1)<0$且$(x-3)<0$。

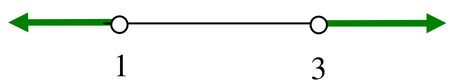
由(1)可得 $x>1$ 且 $x>3$，因此，$x>3$；



由(2)可得 $x<1$ 且 $x<3$，因此，$x<1$。



綜合上面的兩種情形，知道原不等式的解爲$\{x\mid x<1$ 或 $x>3\}$，並可圖示如下：



事實上，代表 1 和 3 的兩個點把數線分成三段：

$$\{\,x \mid x<1\}，\{\,x \mid 1<x<3\}及\{\,x \mid 3<x\}。$$

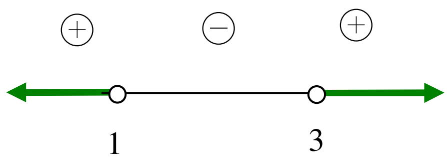
如果將$\{\,x \mid x<1\}$及$\{\,x \mid 3<x\}$中的任何一個數代入$(x-1)$與$(x-3)$中，我們發現$(x-1)$與$(x-3)$同號。因此，$\{\,x \mid x<1\}$及$\{\,x \mid 3<x\}$中的任何一個數都能滿足 $x^2-4x+3>0$。

如果把$\{\,x \mid 1<x<3\}$中的任何數代入$(x-1)$與$(x-3)$中，可知$(x-1)$與$(x-3)$異號，所以 $x^2-4x+3<0$。因此，這些數都不能滿足 $x^2-4x+3>0$。

又因爲，當 $x=1$ 或 $x=3$ 時，$x^2-4x+3=0$。所以，$x=1$ 和 $x=3$ 都不是不等式 $x^2-4x+3>0$ 的解。綜合上面的說明，我們將各個數代入 x^2-4x+3 所得的值的符號列表如下：

	$x-1$	$x-3$	x^2-4x+3
$x=0$	$-$	$-$	$+$
$x=1$	0	$-$	0
$x=2$	$+$	$-$	$-$
$x=3$	$+$	0	0
$x=4$	$+$	$+$	$+$

由上面的說明，可得到下面的圖示：



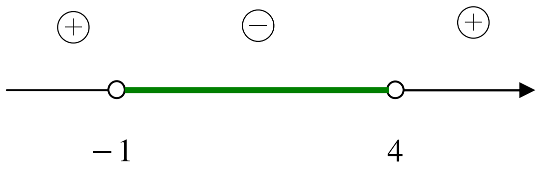
從上圖可以觀察出：只有當 $x<1$ 或 $x>3$ 時，x^2-4x+3 的值才爲正數。所以，同樣的，我們可以得到不等式的解爲$\{\,x \mid x<1$ 或 $x>3\}$。

如果能將二次多項式 ax^2+bx+c 寫成兩個一次多項式的乘積，上述的方法是一個方便的解題方法。

【範例 1】 解不等式 $x^2-3x-4<0$。

【解】 $\because\ x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$

∴ 原不等式可寫成 $(x+1)(x-4)<0$



只有當 $x>-1$ 且 $x<4$ 時，x^2-3x+4 的值才為負數。所以，得到不等式的解為$\{\ x\mid -1<x<4\}$。

【類題練習 1】解下列不等式：

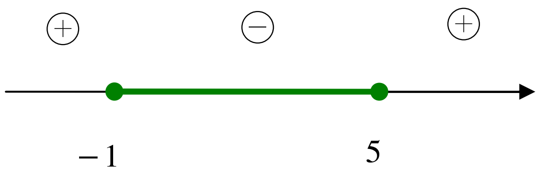
(1) $x^2-4x-5>0$　　(2) $x^2-4x+3<0$

當二次項的係數為負數時，可以把不等式的兩邊同乘以(-1)，使 x^2 項的係數為正數。注意：此時要改變不等式的方向。

【範例 2】解不等式$-x^2+4x+5\geq 0$。

【解】　本題可以把不等式的兩邊同乘以(-1)，使 x^2 項的係數為正數，其解法如下：

$$-x^2+4x+5\geq 0 \ \Rightarrow\ x^2-4x-5\leq 0$$
$$\Rightarrow\ (x+1)(x-5)\leq 0$$



因為當 $x=-1$，5 時，$-x^2+4x+5$的值為 0，因此這兩點也是不等式的解。所以，不等式的解為$\{\ x\mid -1\leq x\leq 5\}$。

【類題練習 2】解不等式$-x^2+5x-6\geq 0$。

當二次項的係數不等於 1 時，可以用下面的方法來解不等式。

【範例 3】 解下列不等式：

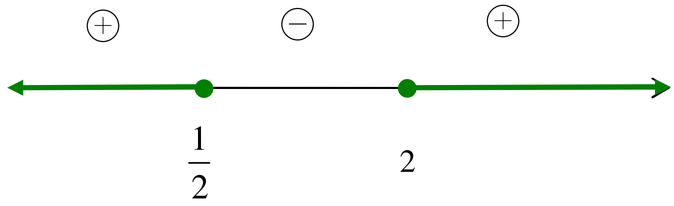
(1) $2x^2-5x+2\geq 0$　　(2) $2x^2-5x+3<0$

【解】 (1) $\because\ 2x^2-5x+2=(2x-1)(x-2)$

$\therefore\ 2x^2-5x+2\geq 0 \Rightarrow (2x-1)(x-2)\geq 0$

$\Rightarrow 2(x-\frac{1}{2})(x-2)\geq 0$

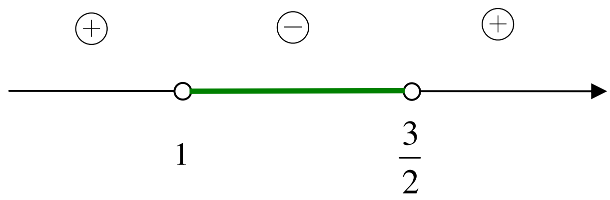
$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})(x-2)\geq 0$



所以，不等式的解為$\{\,x \mid x\leq\frac{1}{2}$ 或 $x\geq 2\,\}$。

(2) $2x^2-5x+3<0 \Rightarrow (2x-3)(x-1)<0$

$\Rightarrow (x-1)(x-\frac{3}{2})<0$



所以，不等式的解為$\{\,x \mid 1<x<\frac{3}{2}\,\}$。

【類題練習 3】 解下列不等式：

(1) $3x^2+x-2>0$　　(2) $3x^2+x-2\leq 0$

由上面的例題中可知：

當 $a>0$ 且 $\alpha>\beta$ 時，$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解爲 $x<\beta$ 或 $x>\alpha$；

$a(x-\alpha)(x-\beta)\geq 0$ 的解爲 $x\leq\beta$ 或 $x\geq\alpha$；

$a(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解爲 $\beta<x<\alpha$；

$a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$ 的解爲 $\beta\leq x\leq\alpha$。

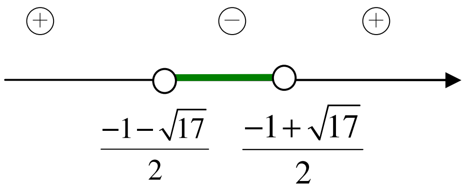
有時候，也可以利用公式解的概念來解一元二次不等式。我們以下面的例子做說明。

【範例 4】 解下列不等式：

(1) $x^2+x-4<0$　　(2) $x^2+5x+3\geq 0$

【解】 (1) 利用公式解來解 $x^2+x-4=0$，得到兩根 α 及 β，其中 $\alpha>\beta$，也就是：

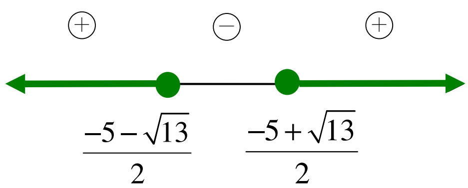
$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\text{、}\beta=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$$



所以，解爲 $\{\,x\mid \frac{-1-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\,\}$。

(2) 利用公式解來解 $x^2+5x+3=0$，得到兩根 α、β，其中 $\alpha>\beta$，也就是：

$$\alpha=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\text{、}\beta=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$$



所以，解為$\{ x \mid x \le \dfrac{-5-\sqrt{13}}{2}$ 或 $x \ge \dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \}$。

【類題練習 4】解下列不等式：

(1) $x^2+7x+11 \le 0$　　　　(2) $x^2+3x+1 \ge 0$

接下來，我們利用配方法的概念及函數的最大值或最小值來解一元二次不等式。

【範例 5】 解下列不等式：

(1) $x^2-6x+9 \ge 0$　　　　(2) $x^2-2x+5>0$

(3) $x^2+4x+10 \le 0$　　　　(4) $x^2-4x+4 \le 0$

【解】

(1) 因為 $x^2-6x+9=0$ 的判別式 $(-6)^2-4\times 9$ 等於 0，所以 $x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ 只有一個二重根 3，也就是說，可將 $x^2-6x+9 \ge 0$ 改寫成 $(x-3)^2 \ge 0$。
事實上，對任意實數 x，我們恆有 $x^2-6x+9=(x-3)^2 \ge 0$，因此，不等式 $x^2-6x+9 \ge 0$ 的解為任意實數。

(2) $x^2-2x+5=0$ 的判別式 $(-2)^2-4\times 5$ 等於 -16，所以 $x^2-2x+5=0$ 沒有實根，因此無法使用前面例題的方法來解不等式。事實上利用配方法，可得

$$x^2-2x+5=(x-1)^2+4$$

所以對任意實數 x，我們恆有 $x^2-2x+5=(x-1)^2+4 \ge 4$
因此，不等式 $x^2-2x+5>0$ 的解為任意實數。

(3) 因為 $x^2+4x+10=(x+2)^2+6$，所以，當 x 為任意實數時，我們恆有 $(x+2)^2+6 \ge 6+0=6>0$。
因此，$x^2+4x+10 \le 0$ 無解。

(4) $x^2-4x+4 \le 0 \Rightarrow (x-2)^2 \le 0$ 因為 $(x-2)^2$ 不小於 0，所以 $(x-2)^2=0$，也就是說，僅有 $x=2$ 一個解。

【類題練習 5】 解下列不等式：

(1) $x^2-8x+16\geq 0$　　(2) $x^2-12x+36>0$

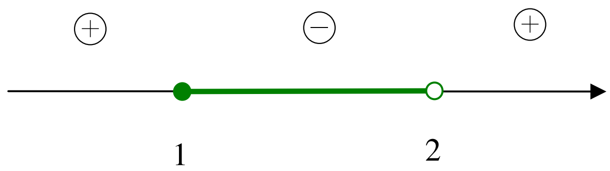
(3) $x^2+8x+20<0$　　(4) $x^2-14x+49\leq 0$

有時候，我們可將分式不等式改寫成一元二次不等式。我們來看下面例子。

【範例 6】 解不等式 $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0$ 。

【解】 由不等式 $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0$ ，可知 $x-1$ 與 $x-2$ 異號且 $x\neq 2$ 。

所以，$(x-1)(x-2)\leq 0$ 且 $x\neq 2$ 。



因爲當 $x=1$ 時，$\dfrac{x-1}{x-2}=0$，所以 $x=1$ 也是不等式的解。因此，不等式的解爲 $\{\,x \mid 1\leq x<2\}$ 。

【類題練習 6】 解下列不等式：

(1) $\dfrac{x+1}{x-4}<0$　　(2) $\dfrac{x+2}{x+1}\geq 0$

【家庭作業】

解下列不等式：

① $x^2-2x-3>0$　　② $x^2+4x-5\leq 0$

③ $-x^2-4x-3>0$　　④ $3x^2+4x+1>0$

⑤ $2x^2-x-1>0$　　⑥ $x^2-5x-1\geq 0$

⑦ $x^2-5x+1<0$　　⑧ $x^2-4x+4>0$

⑨ $x^2-12x+36\geq 0$　　⑩ $x^2-2x+1<0$

⑪ $x^2+6x+9\leq 0$

⑫ $x^2-2x+6>0$

⑬ $x^2-4x+10\leq 0$

⑭ $x^2-2x+15<0$

⑮ $\dfrac{x-1}{x-2}\leq 0$

⑯ $\dfrac{x+1}{2x-1}>0$

A4　平面幾何的基本性質

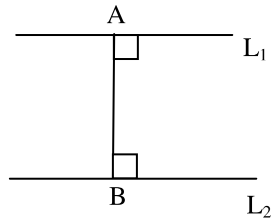
高中一年級的數學課程中，雖然沒有「幾何」的章節，但是，在許多課程內容中，需要具備一些幾何基本概念；又如：在某些三角函數的推導過程中，也涉及幾何知識。因此，在本節中，我們將平面幾何中有關平行、三角形、四邊形和圓的基本概念和性質，分別條列如下，以做為同學們複習的參考。

1. 平行

【定義】在平面上垂直於同一條直線的兩條直線稱為平行線。

如右圖，L_1 與 L_2 互相平行(或稱 L_1 與 L_2 是平行線)，

並記作：$L_1 // L_2$，且 $\overline{AB}$ 的長度就是 L_1 與 L_2 的距離。

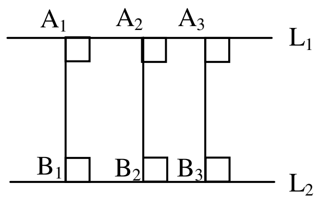


【基本性質】

（1）一線段若垂直於平行線中的一條直線，必垂直於平行線中的另一條直線。

（2）兩平行線間的距離處處相等。

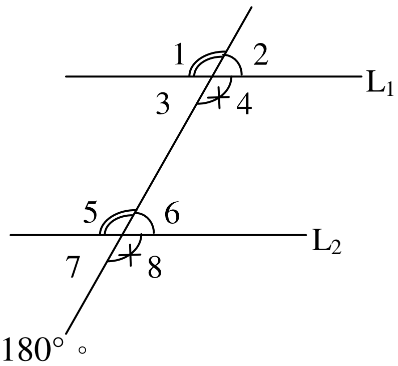
如右圖：　$\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3}$



（3）平行線永遠不相交。

（4）$L_1 // L_2$ $\Leftrightarrow$ L_1 與 L_2 被一直線所截，且同位角相等。

如右圖：$\angle 1 = \angle 5$、$\angle 2 = \angle 6$、$\angle 3 = \angle 7$、$\angle 4 = \angle 8$。



（5）$L_1 // L_2$ $\Leftrightarrow$ L_1 與 L_2 被一直線所截，且同側內角互補。

如右圖：$\angle 3 + \angle 5 = 180°$、$\angle 4 + \angle 6 = 180°$。

（6）$L_1 // L_2$ $\Leftrightarrow$ L_1 與 L_2 被一直線所截，且內錯角相等。

如右圖：$\angle 3 = \angle 6$、$\angle 4 = \angle 5$。

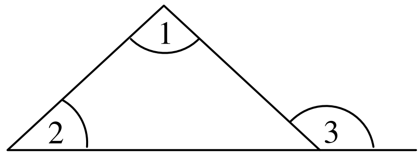
【想想看】(1) $\angle 1$ 是否等於 $\angle 8$？

(2) $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 的角平分線是否垂直？

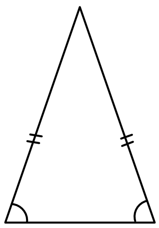
2. 三角形

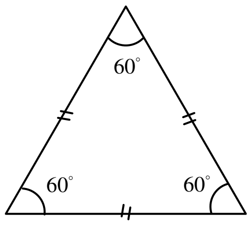
【基本性質】

1. **內角和性質**：任意一個三角形的三個內角和等於 $180°$。
2. **外角和性質**：任意一個三角形的三個外角和等於 $360°$。
3. **外 角 性 質**：三角形的任一外角等於其兩個內對角的和。如右圖：$\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$。



4. 等腰三角形的兩底角相等，正三角形的三個內角相等。

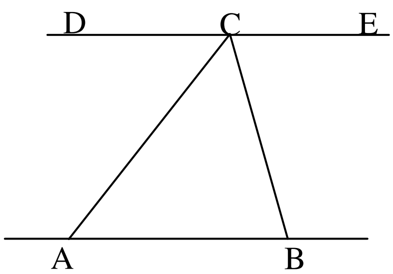




【想想看】（1）如右圖，已知 $\overline{DE} // \overline{AB}$。你能否推導出 ΔABC 的內角和為 $180°$？

（2）三角形若不是正三角形，是否一定有一個內角大於 $60°$？

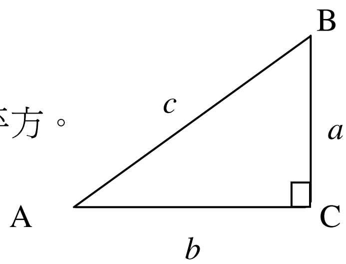
（3）鈍角三角形的三內角都是鈍角嗎？



5. <u>**商高定理**</u>（又稱為**畢氏定理**）：

直角三角形的兩股的平方和等於斜邊的平方。

如右圖：$a^2 + b^2 = c^2$。



【想想看】（1）如果三角形的三邊長 a、b、c 滿足

$a^2+b^2<c^2$，則 $\angle C$______ $90°$。（填>,=,<）

（2）如果三角形的三邊長 a、b、c 滿足 $a^2+b^2>c^2$，

則 $\angle C$______ $90°$。（填>,=,<）

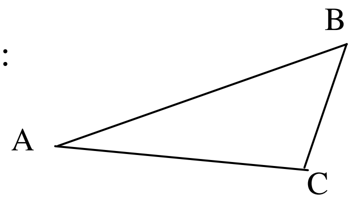
（3）欲判斷三角形爲銳角三角形必須檢查哪些條件？

6. 三角形的任意兩邊和大於第三邊。
7. 三角形的兩邊及其對應的角有下列關係：

大邊對大角；大角對大邊。

如右圖：若 $\overline{AB}>\overline{BC}$，則 $\angle C>\angle A$；

反之,若 $\angle C>\angle A$，則 $\overline{AB}>\overline{BC}$。



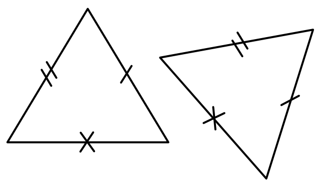
3. 三角形的全等

【定義】如果兩個三角形的對應邊相等，對應角相等，則稱這兩個三角形全等。

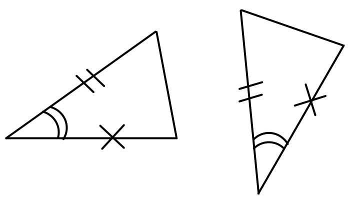
【基本性質】

1. 全等性質：SSS、SAS、AAS、ASA、RHS

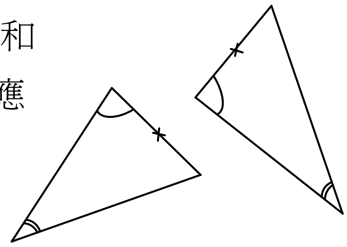
（1）SSS 全等性質：如果兩個三角形的三個邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。



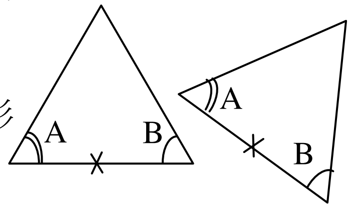
（2）SAS 全等性質：如果兩個三角形的兩邊和它們的夾角分別對應相等，則這兩個三角形全等。



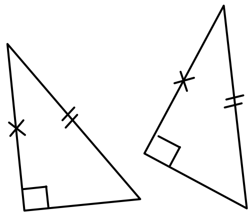
（3）AAS 全等性質：如果兩個三角形有兩角和其中一角的對邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。



（4）ASA 全等性質：如果兩個三角形有兩角和這兩個角的夾邊分別對應相等，則這兩個三角形全等。



（5）RHS 全等性質：如果兩個直角三角形的斜邊和一股分別對應相等，則這兩個直角三角形全等。



【想想看】爲什麼沒有三角形 AAA、SSA 的全等性質？

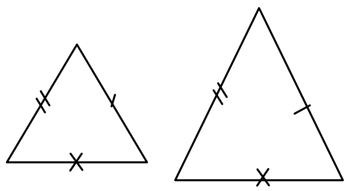
4. 相似三角形

【定義】 兩個三角形不論其大小是否相等，只要形狀相同就稱爲相似三角形。

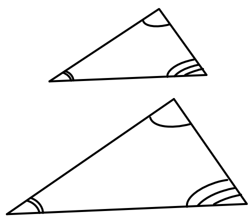
【基本性質】

1. SSS、AAA、AA、SAS 相似性質：

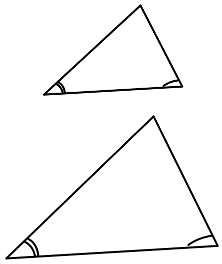
（1）SSS 相似性質：如果兩個三角形三組對應邊成比例，則這兩個三角形相似。



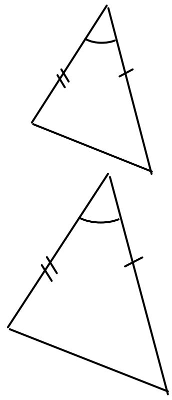
（2）AAA 相似性質：如果兩個三角形的三組對應角相等，則這兩個三角形相似。



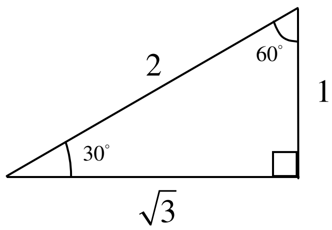
（3）AA 相似性質：如果兩個三角形的二組對應角相等，則這兩個三角形相似。



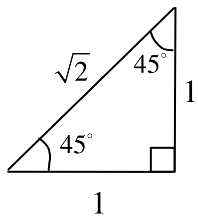
（4）SAS 相似性質：如果兩個三角形有一組角對應相等，且夾此角的兩組對應邊長成比例，則這兩個三角形相似。



2. （1）三內角分別為 30°、60°、90°的三角形，其對應邊邊長比為 $1:\sqrt{3}:2$。

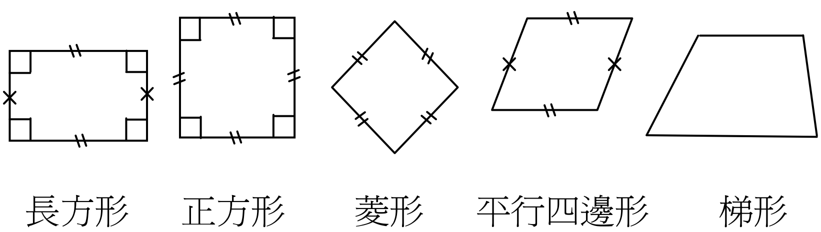


（2）三內角分別為 45°、45°、90°的三角形，其對應邊邊長比為 $1:1:\sqrt{2}$。



5. 四邊形

【圖形與定義】



長方形（矩形）：四個角都是直角的四邊形稱爲長方形；如果一個長方形的四邊都等長就稱爲正方形。

菱　　　　形：四邊都等長的四邊形稱爲菱形。

平行四邊形：有兩雙平行邊的四邊形稱爲平行四邊形。

梯　　　　形：一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形稱爲梯形。

等腰梯形：不平行的對邊等長的梯形稱爲等腰梯形。

【想想看】(1) 菱形一定是平行四邊形嗎？

(2) 正方形一定是菱形嗎？

【基本性質】

- 平行四邊形：

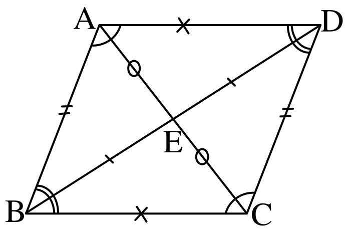
（1）平行四邊形的任一對角線將此平行四邊形分成兩個全等的三角形。

如右圖：ΔABC 與 ΔCDA 全等，ΔABD 與 ΔCDB 全等

（2）平行四邊形的兩組對角分別相等。

如右圖：$\angle ABC = \angle ADC$、

$\angle BAD = \angle BCD$。



（3）平行四邊形的兩組對邊分別相等。

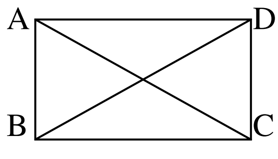
如右圖：$\overline{AB} = \overline{CD}$ 、$\overline{AD} = \overline{BC}$ 。

（4）平行四邊形的對角線互相平分。

如右圖：$\overline{AE} = \overline{CE}$ 、$\overline{BE} = \overline{DE}$ 。

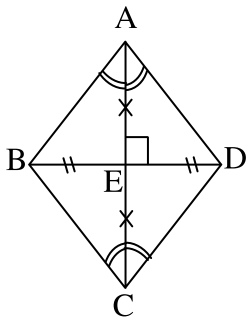
- 長方形：長方形的對角線長相等。

如右圖：$\overline{AC} = \overline{BD}$ 。



➢ 菱形：(1) 菱形的對角線互相垂直平分。

如右圖：$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 互相垂直平分。



(2) 菱形的對角線平分頂角。

如右圖：$\overline{AC}$ 平分 $\angle BAD$ 與 $\angle BCD$；

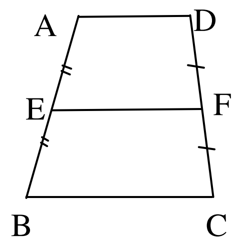
$\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ 與 $\angle ADC$。

➢ 正方形：正方形既是長方形也是菱形中的一種。

➢ 梯形：

(1) 梯形 $ABCD$，E、F 分別爲 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，$\overline{EF}$ 稱爲梯形 $ABCD$ 的中線。

如右圖：



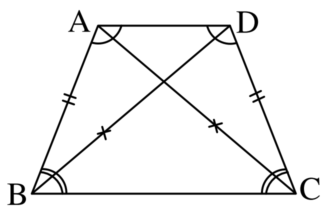
則 $\overline{AD}\ /\!/\ \overline{EF}\ /\!/\ \overline{BC}$；$\overline{EF}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})$。

(2) 等腰梯形的底角相等，對角線等長。

如右圖：$\angle ABC=\angle BCD$、

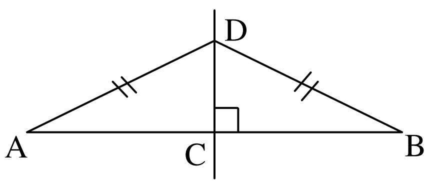
$\angle BAD=\angle ADC$、

$\overline{AC}=\overline{BD}$。



6. 線的性質

【基本性質】



1. **中垂線性質**：

一線段的中垂線上任意一點到此線段的兩端點等距離；

與一線段的兩端點等距離的任何點必在此線段的中垂線上。

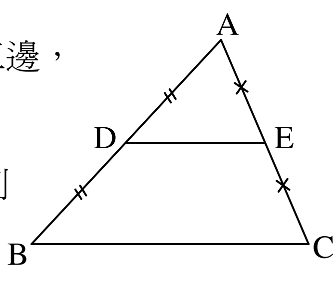
2. **兩邊中點連線性質**：

連接三角形的兩邊中點的線段必平行於第三邊，

且長度爲第三邊的一半。

如圖：若 D、E 分別爲 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AC}$ 的中點，則

$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$ 且 $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{BC}$。

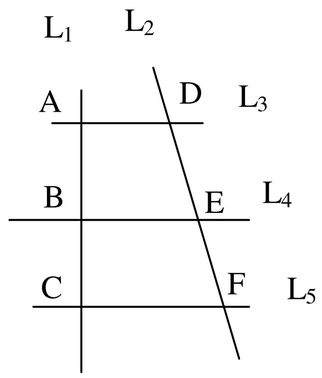


3. **平行線截比例線段性質：**

如圖：若二直線 L_1、L_2

被三條平行線 L_3、L_4、L_5 所截，

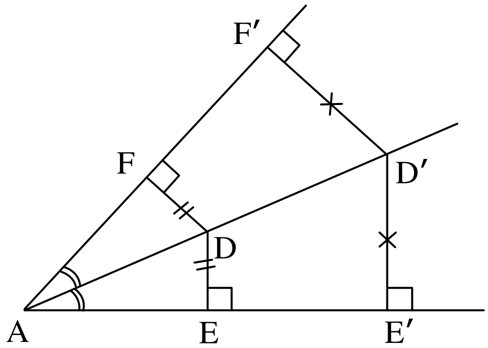
則 $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ 。



4. **角平分線性質：**

角平分線上的任何一點到角的兩邊等距離；

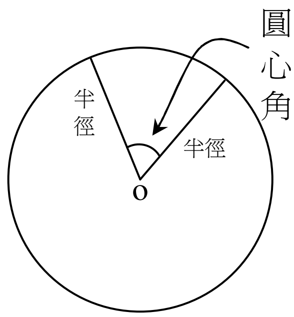
到角的兩邊等距離的任何一點必在角平分線上。



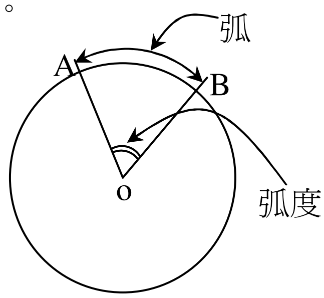
7. 圓

【定義與基本性質】

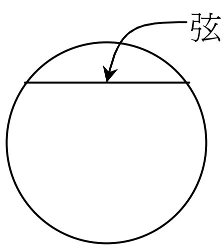
1. 圓心角：以圓心為頂點，兩個
   半徑為邊的角稱為圓心角。
   （取較小的角）



2. 弧度：弧度等於該弧所對應的圓心角度數。

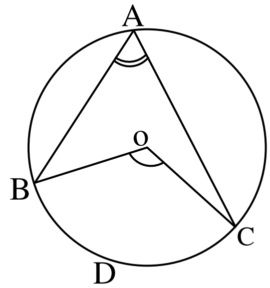


3. 弦：連接圓周上兩點所成的線段。



4. 圓周角：以圓周上的點為頂點，

兩個弦為邊的角稱為圓周角。

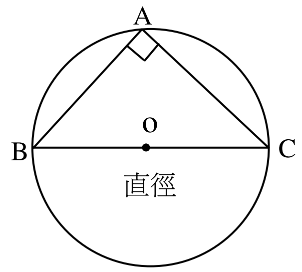


➢ 圓周角等於該角所對弧度數的一半。

如圖：$\angle BAC = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BDC}$

➢ 半圓所對應的圓周角是直角。

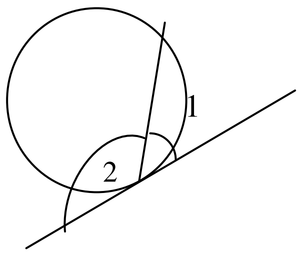
如圖：$\angle BAC = 90°$



5. 弦切角：圓的一條弦和一條切線相交於切點

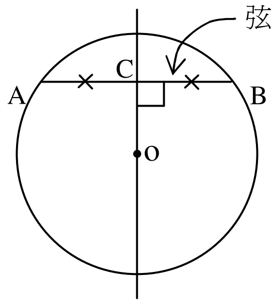
所形成的角。

如圖：∠1、∠2 均為弦切角。



➢ 弦切角的度數等於角的兩邊所夾弧度數的一半。

6. 圓心與弦的關係：



➢ 過圓心且與弦垂直的直線，

必平分此弦，如圖：$\overline{AC} = \overline{BC}$ 。

➢ 垂直且平分此弦的直線必過圓心。

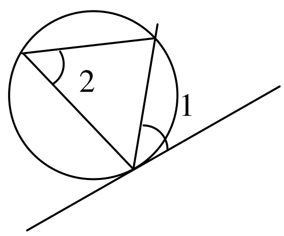
7. 弦心距：弦與圓心的距離叫做此弦的弦心距，

如圖：弦心距＝$\overline{OC}$ 。

【想想看】 (1) 已知四邊形 $ABCD$ 有一外接圓，是否能由圓周角推導出四邊形 $ABCD$ 內角和為 360°？

(2) 弦切角與對應此弧的圓周角是否相等？

如右圖：∠1 是否等於∠2？



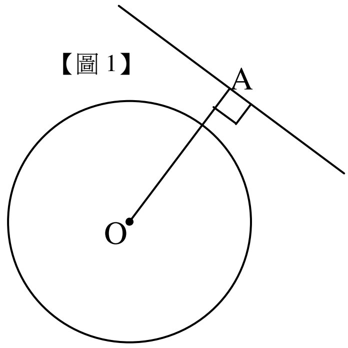
8. 點與圓

【基本性質】

平面上的點與圓之間有下列三種關係：

1. 點在圓外：點到圓心的距離＞半徑。
2. 點在圓上：點到圓心的距離＝半徑。
3. 點在圓內：點到圓心的距離＜半徑。

【圖 1】



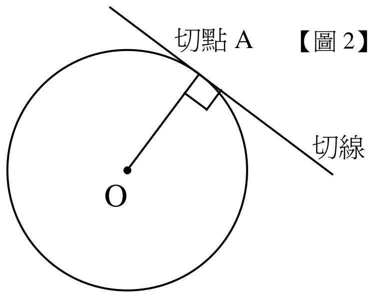
9. 圓與直線

【基本性質】

平面上的直線與圓有下列三種關係：

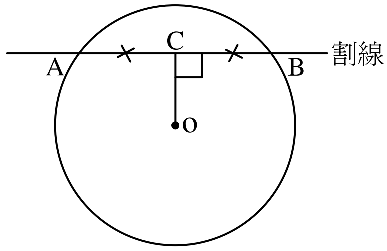
1. 直線與圓不相交：直線與圓心的距離＞半徑。(如圖1)
2. 直線與圓只有一交點：直線與圓心的距離=半徑。(如圖2)
   - 我們稱這條直線爲這個圓的**切線**，它們的交點稱爲**切點**。
   - 過一圓直徑端點的垂線爲此圓的切線。
   - 圓心到切線的距離等於圓的半徑。
   - 圓心與切點的連線必垂直過切點的切線。

【圖 2】



3. 線與圓有兩交點：直線與圓心的距離＜半徑。(如圖 3)
   - 我們稱這條直線爲這個圓的**割線**。

【圖 3】



【想想看】（1）過圓上一點能做幾條切線？

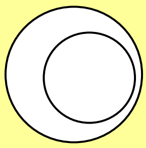
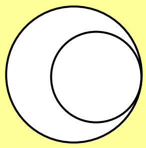
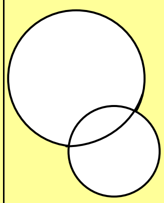
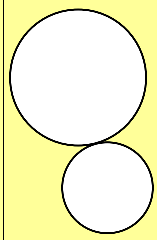
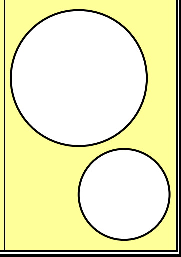
（2）過圓外一點能做幾條切線？

10. 圓與圓

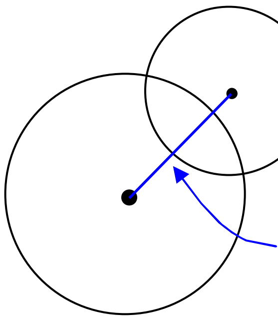
【基本性質】

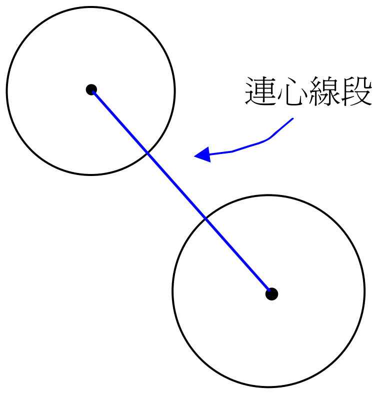
1. 兩圓關係：兩圓的位置關係有三種：
   - 兩圓不相交（外離、內離）
   - 相交於一點 (內切、外切)

➢ 相交於二點

兩圓關係	內離	內切	相交於二點	外切	外離
圖 示					

2. 連 心 線：在平面上兩圓的圓心所連結的直線稱為連心線。
3. 連心線長：兩圓的圓心所連結的線段長稱為連心線長。

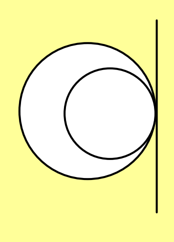
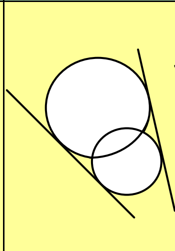
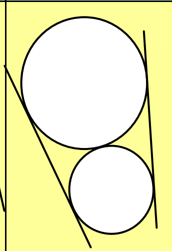
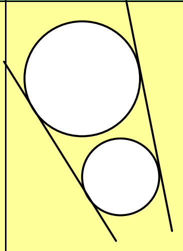
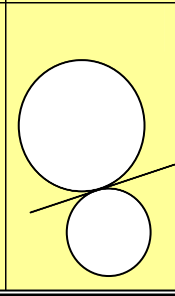
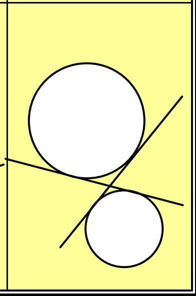




4. 連心線長與兩圓關係如下：

兩圓關係	連心線長與半徑關係
內離	0≤連心線長＜半徑的差
同心圓	連心線長＝0
內切	連心線長＝半徑的差
相交於兩點	半徑的差＜連心線長＜半徑的和
外切	連心線長＝半徑的和
外離	連心線長＞半徑的和

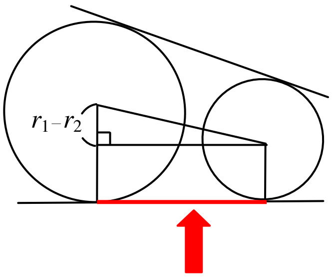
5. 公切線：與兩圓同時相切的直線稱爲此兩圓的公切線。

兩圓關係	同心圓	內離	內切	相交於二點	外切	外離
外公切線	無	無				
內公切線	無	無	無	無		

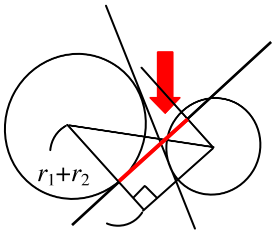
6. 公切線長：兩圓的圓心 O_1、O_2，半徑 r_1 、 r_2 。

$$外公切線長=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1-r_2)^2}$$

$$內公切線長=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-(r_1+r_2)^2}$$



外公切線段



內公切線段

11. 三角形與圓

【定義與基本性質】

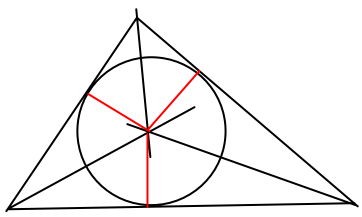
1. 內心

✧ 何謂內心：三角形內切圓的圓心。

✧ 如何求出：三角形三內角平分線交於一點，此點就是內心。

✧ 相關性質：

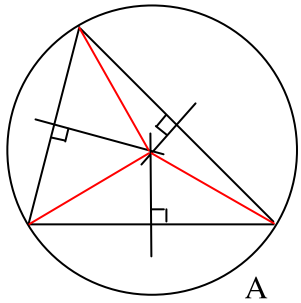
➢ 內心到三邊等距離。



➢ 三角形恰有一內切圓。

2. 外心

✧何謂外心：三角形外接圓的圓心。



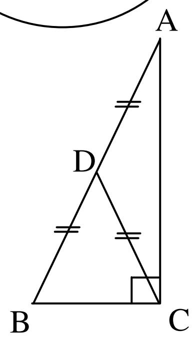
✧如何求出：三角形三邊的中垂線交於一點，

此點就是**外心**。

✧ 相關性質：

➢ 外心到三頂點等距離。

➢ 三角形恰有一外接圓。



➢ 直角三角形的外心在斜邊中點。

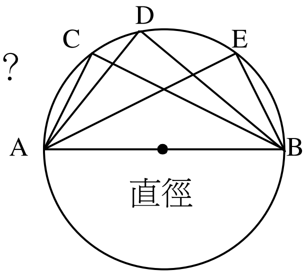
如圖：直角三角形 ΔABC 中，

D 爲 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$ 。

【想想看】（1）已知圓 O 爲 ΔABC 的外接圓，利用圓周角性質，

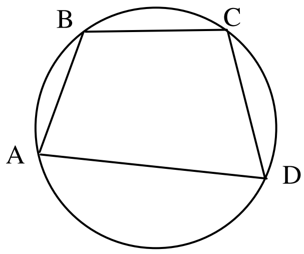
推導三角形內角和爲 180°。

（2）直角三角形的斜邊是否爲其外接圓的直徑？



（3）如右圖，爲什麼 ΔABC 、ΔABD 和 ΔABE 都是直角三角形？

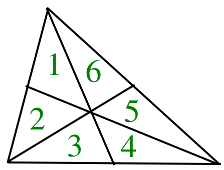
（4）如圖：已知圓 O 爲四邊形 $ABCD$ 的外接圓，爲什麼 $\angle A$ 與 $\angle C$、$\angle B$ 與 $\angle D$ 互補？



3. 重心

✧ 如何求出：三角形的三中線交於一點，此點

就是**重心**。



✧ 相關性質：

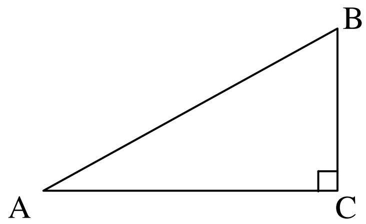
➢ 重心到一頂點的距離等於過此頂點的中線的 2/3 倍。

➢ 三角形的三中線將此三角形分爲六個面積相等的三角形，如圖中的六個小三角形的面積都相等。

➢ 均勻的三角板的重心就是它們的質量中心。

A5　三角函數的基本概念

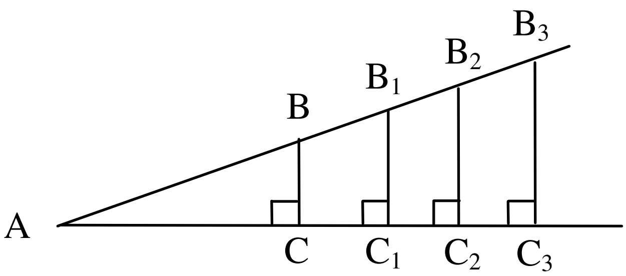
A5-1 認識銳角的三角函數



在右圖中的ΔABC為一個直角三角形，其中$\angle C=90°$。我們從下面兩個觀點來觀察直角三角形邊長的比值與角度的關係：

(1) 當銳角$\angle A$的大小固定時，無論將直角三角形畫的多大或多小（如下圖），由於$\overline{B_1C_1} // \overline{BC}$、$\overline{B_2C_2} // \overline{BC}$、$\overline{B_3C_3} // \overline{BC}$，所以這些直角三角形都相似，即$\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \sim \Delta AB_2C_2 \sim \Delta AB_3C_3$。

由相似三角形的性質，我們知道下列的六個比值都不會隨著三角形的大小而有所改變：

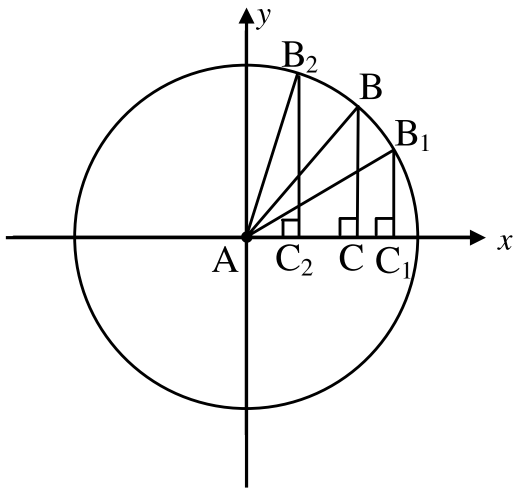


$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}}=\cdots；\quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}}=\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}}=\cdots；$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC_1}}=\frac{\overline{AB_2}}{\overline{AC_2}}=\cdots；\quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}}=\frac{\overline{AC_2}}{\overline{AB_2}}=\cdots；$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\overline{AC_2}}{\overline{B_2C_2}}=\cdots；\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}}=\cdots。$$

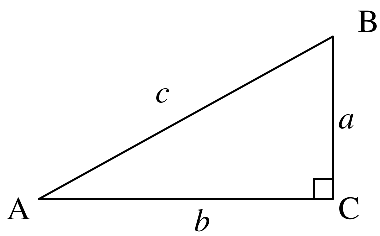
(2) 當$\angle A$的大小改變時，如右圖，將直角ΔABC置於坐標平面上，其中以A為原點，C在x軸的正向，並且以$\overline{AB}$為半徑畫圓。我們發現，當$\angle A$的大小改變時，這幾個斜邊長相等的直角三角形，它們的兩股長也隨著變動，於是上面的六個比值將會隨著$\angle A$的大小而改變。



由(1)、(2)的討論可知，當直角三角形ΔABC中的銳角$\angle A$的大小固定時，這六個邊長的比值不會因三角形的大小而改變。但是，當$\angle A$的大小改變時，這些比值也隨著改變。於是，角度與比值之間會形成函數的對應關係，我們稱之為「**三角函數**」。

【銳角三角函數的定義】

如右圖，ΔABC為一個直角三角形，其中$\angle C=90°$。令$\angle A$的對邊$\overline{BC}=a$、$\angle A$的鄰邊$\overline{AC}=b$和斜邊$\overline{AB}=c$。



現在將前面所提到的六個比值分別定義成下列的六個函數：

$\angle A$的**正弦函數**$=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$；　$\angle A$的**餘弦函數**$=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$；

$\angle A$的**正切函數**$=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$；　$\angle A$的**餘切函數**$=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{b}{a}$；

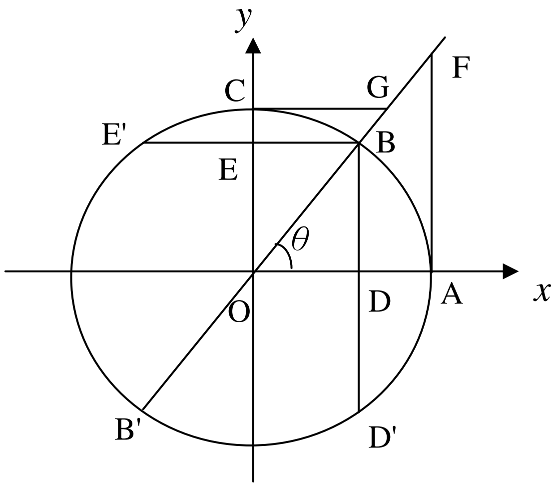
$\angle A$的**正割函數**$=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$；　$\angle A$的**餘割函數**$=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{c}{a}$。

為了方便，我們將這六個函數分別簡記如下：

$\angle A$ 的正弦函數 ＝ $\sin A$；　$\angle A$ 的餘弦函數 ＝ $\cos A$；
$\angle A$ 的正切函數 ＝ $\tan A$；　$\angle A$ 的餘切函數 ＝ $\cot A$；
$\angle A$ 的正割函數 ＝ $\sec A$；　$\angle A$ 的餘割函數 ＝ $\csc A$，

其中 sin、cos 和 tan 分別為 sine、cosine 和 tangent 的簡寫；cot、sec 和 csc 則分別為 cotangent、secant 和 cosecant 的簡寫。

至於三角函數的中文命名請觀察右圖，以原點 O 為圓心的單位圓，與 x、y 軸的正向交於 A、C 兩點。在弧 $\overset{\frown}{AC}$ 上一點 B，分別作弦 $\overline{BD'}$、$\overline{BE'}$，垂直 x、y 軸的正向於 D、E 兩點。過 A、C 分別作切線，交割線 $\overleftrightarrow{OB}$ 於 F、G，即可得到：



(1) $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=1$；

(2) $\angle BOD=\angle OBE=\angle OGC=\theta$；

(3) ΔOBD、ΔOBE、ΔOAF、ΔOCG 皆為直角三角形。

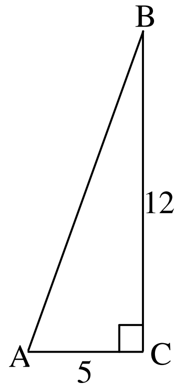
根據三角函數的定義，我們觀察到：

1. 在 ΔOBD 中，$\sin\theta=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{BD}}{1}=\overline{BD}$，由於 $\overline{BD}$ 在 θ 角所對的弦 $\overline{BD'}$ 上，故稱 $\sin\theta$ 為「正弦函數」。
2. 在 ΔOBE 中，$\cos\theta=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{BE}}{1}=\overline{BE}$，由於 $\overline{BE}$ 在 θ 的餘角 $\angle BOE$ 所對的弦 $\overline{BE'}$ 上，故稱 $\cos\theta$ 為「餘弦函數」。
3. 在 ΔOAF 中，$\tan\theta=\dfrac{\overline{AF}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{AF}}{1}=\overline{AF}$，由於 $\overline{AF}$ 在 θ 角所對的切線 $\overleftrightarrow{AF}$ 上，故稱 $\tan\theta$ 為「正切函數」。
4. 在 ΔOCG 中，$\cot\theta=\dfrac{\overline{CG}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{CG}}{1}=\overline{CG}$，由於 $\overline{CG}$ 在 θ 的餘角 $\angle BOE$ 所對的切線 $\overleftrightarrow{CG}$ 上，故稱 $\cot\theta$ 為「餘切函數」。

5. 在ΔOAF中，$\sec\theta=\dfrac{\overline{OF}}{\overline{OA}}=\dfrac{\overline{OF}}{1}=\overline{OF}$，由於$\overline{OF}$在$\theta$角所在的割線$\overleftrightarrow{OB}$上，故稱$\sec\theta$為「正割函數」。

6. 在ΔOCG中，$\csc\theta=\dfrac{\overline{OG}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{OG}}{1}=\overline{OG}$，由於$\overline{OG}$在$\theta$的餘角所在的割線$\overleftrightarrow{OB}$上，故稱$\csc\theta$為「餘割函數」。

【範例 1】 已知ΔABC為一個直角三角形，其中$\angle C=90°$，$\angle A$為較大的銳角，兩股長分別為 5、12。求$\angle A$的六個三角函數值。



【解】 $\because$ $\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=12$ （大角對大邊）

$\therefore$ 斜邊長$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{5^2+12^2}$

$=\sqrt{169}=13$

$\Rightarrow \sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{12}{13}$；$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{5}{13}$；

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{12}{5}$；$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{5}{12}$；

$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{13}{5}$；$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{13}{12}$。

【類題練習 1】 已知ΔABC為直角三角形，其中$\angle C=90°$、$\overline{AC}=2$和$\overline{AB}=5$，求$\angle B$的六個三角函數的值。

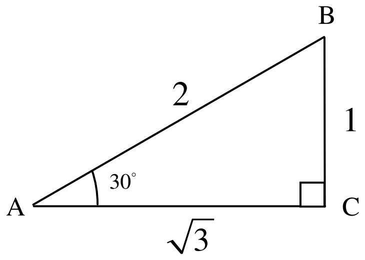
【範例 2】 已知ΔABC為直角三角形，其中$\angle C=90°$、$\angle A=30°$。試回答下列問題：

(1) 求$\angle A$的六個三角函數值。

(2) 求$(\sin A)^2+(\cos A)^2$。

(3) 求$(\sin B)^2+(\cos B)^2$。

【解】 如右圖，直角三角形三邊長的比為$\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=\sqrt{3}:1:2$。



(1) $\sin A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}$；

$\cos A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

$\tan A=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

$\cot A=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$；

$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；

$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{2}{1}=2$

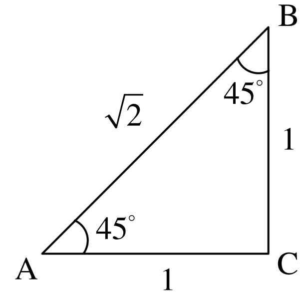
(2) $(\sin A)^2+(\cos A)^2=(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}})^2+(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}})^2=(\dfrac{1}{2})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$

(3) $(\sin B)^2+(\cos B)^2=(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}})^2+(\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}})^2=(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2+(\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1$

在範例 2 中，因為$\angle A=30°$，我們常將$\sin A$直接寫成$\sin 30°$，也就是說，$\sin 30°$就是$30°$角的正弦函數值。又為了方便書寫，也常將$(\sin A)^2$寫成$\sin^2 A$、$(\cos A)^2$寫成$\cos^2 A$、⋯，而$\sin 2A$則是$\sin(A+A)$， $\cos 2A$則是$\cos(A+A)$、⋯。

【範例 3】分別求出$45°$角的六個三角函數值。

【解】 如右圖，直角三角形三邊長的比例為$\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{AB}=1:1:\sqrt{2}$。



所以 $\sin 45°=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\cos 45°=\dfrac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$\tan 45°=\dfrac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{1}{1}=1$；

$$\cot 45^\circ = \frac{\angle A\text{的鄰邊}}{\angle A\text{的對邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{1} = 1\text{ ；}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的鄰邊}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\text{ ；}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{\text{斜邊}}{\angle A\text{的對邊}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\text{ 。}$$

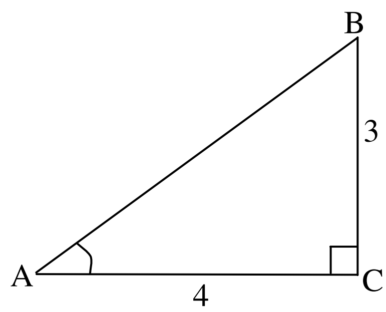
【類題練習 2】試完成下表：

$\angle A$	sin$A$	cos$A$	tan$A$	cot$A$	sec$A$	csc$A$
30°						
45°						
60°						

【範例 4】已知ΔABC為直角三角形，其中$\angle C = 90^\circ$、$\cot A = \frac{4}{3}$。

求$\frac{\sin A}{1-\cot A} + \frac{\cos A}{1-\tan A}$。

【解】 因為$\cot A = \frac{4}{3}$，所以$\overline{BC} : \overline{AC} = 3:4$，



即可設$\overline{BC} = 3x$，$\overline{AC} = 4x$，$x > 0$。

由畢氏定理，可知

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x\text{ 。}$$

因此，$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = 5:3:4$。

$$\Rightarrow \quad \sin A = \frac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}\text{ ；}$$

$$\cos A = \frac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}\text{ ；}$$

$$\tan A=\frac{\angle A\text{的對邊}}{\angle A\text{的鄰邊}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{3}{4}$$

所以 $$\frac{\sin A}{1-\cot A}+\frac{\cos A}{1-\tan A}=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{3}}+\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{4}}=-\frac{9}{5}+\frac{16}{5}=\frac{7}{5}$$ 。

【類題練習 3】 已知直角 ΔABC 中，$\angle A$ 爲銳角且 $\sec A=\frac{17}{8}$，

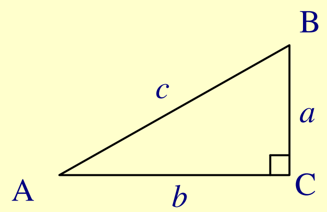
求 $\frac{\sin A}{1-\tan A}+\frac{\cos A}{1-\cot A}$ 。

【重點整理】

1. 當直角三角形中銳角角度的大小固定時，不論三角形的大小如何，其對應的兩邊長的比值恆固定，角度與比值形成了函數的對應關係。
2. ΔABC 中，如右圖，$\angle A$ 的六個三角函數爲：

$\sin A=\frac{a}{c}$，$\cos A=\frac{b}{c}$，$\tan A=\frac{a}{b}$，

$\cot A=\frac{b}{a}$，$\sec A=\frac{c}{b}$，$\csc A=\frac{c}{a}$



【家庭作業】

基礎題

1. 已知 $\angle A$ 爲銳角且 $\tan A=\frac{1}{3}$，求 $\angle A$ 的其它五個三角函數值。
2. 求下列各式的值：

① $\cos 30^\circ-\sin 30^\circ+\cos 60^\circ-\tan 45^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\cot 60^\circ$

② $\frac{\tan 60^\circ-\cot 30^\circ}{\sin 60^\circ+\cos 30^\circ}$　　③ $\frac{1+\sin 60^\circ-\cot 45^\circ}{1+\sec 30^\circ-\tan 45^\circ}$

④ $\sec^2 60° - \tan^2 60° + \cot^2 30° - \csc^2 30°$

3. 求 $\sin 80° \cos 80° \tan 80° \cot 80° \sec 80° \csc 80°$ 。

4. 設 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 都是銳角，且 $\sin A = \frac{1}{2}$，$\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cot C = \sqrt{3}$，$\csc D = 2$，求 $\angle A + \angle B - \angle C + \angle D$ 。

5. 在 ΔABC 中，$\angle C = 90°$ 、 $\sin A = \frac{3}{5}$ 和 $\overline{AB} = 20$ 。試回答下列各題：

① 求 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CA}$ 的長。　　② 求 $\cos A$ 、 $\cos B$ 、 $\tan A$ 和 $\tan B$ 。

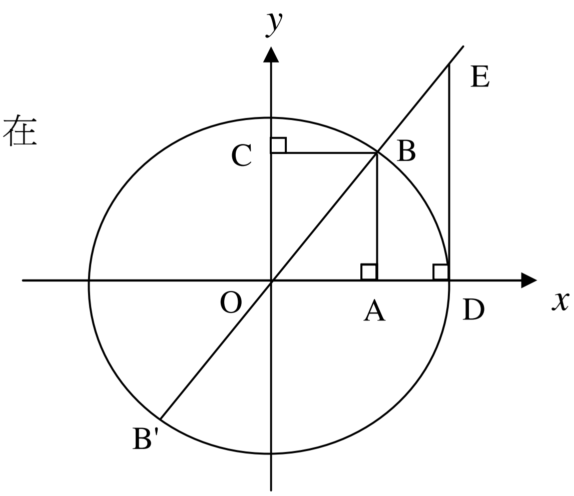
6. 設 $\angle A$ 爲小於 $45°$ 的銳角，試比較 $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$ 、 $\cot A$ 、 $\sec A$ 、 $\csc A$ 的大小順序。

進階題

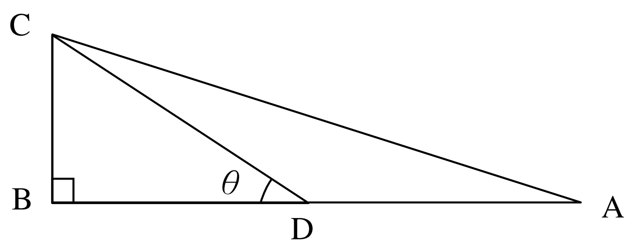
7. 在直角 ΔABC 中，$\angle C = 90°$ 。已知 $\overline{BC} - \overline{CA} = \frac{\overline{AB}}{5}$ ，求 $\tan A$ 。

8. 在銳角三角形 ΔABC 中，已知 $\sin B = \frac{3}{5}$ ，$\sin C = \frac{15}{17}$ ，若 $\overline{AB} = 25$ 求 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 及 ΔABC 的面積。

9. 如右圖，圓 O 爲單位圓，B、D 在圓周上，若 $\overline{DE} = \frac{12}{5}$ ，求 $\overline{AB}$ 及四邊形 OABC 的面積。



10. 如下圖，直角三角形 ΔABC 中，D 在 $\overline{AB}$ 上且 $\angle BDC = 2\angle BAC$ 。若 $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ，求 $\tan A$ 。



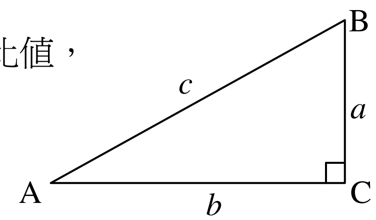
A5-2 銳角三角函數的基本關係

設 ΔABC 為直角三角形，其中 $\angle C = 90°$ 。以下各題將引導你發現六個三角函數彼此之間的關係：

【範例 1】 試說明 $\sin A \csc A = 1$ 。

【解】 用 ΔABC 的任兩邊長可作成兩種比值，

例如：$\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 可作成 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 或 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ 兩種比值，



若將兩者相乘，其積為 1，

即得 $\sin A \csc A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \times \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = 1$ 。

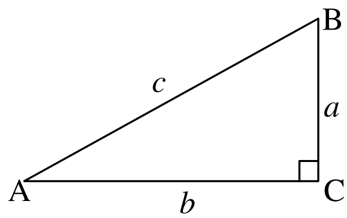
由範例 1，可知 $\sin A = \dfrac{1}{\csc A}$ 或 $\csc A = \dfrac{1}{\sin A}$ ，我們稱 sin$A$ 與 csc$A$ 兩函數具有**倒數關係**。同樣的，sin$B$ 與 csc$B$ 兩函數具有倒數關係。

【類題練習 1】請找出範例 1 中， $\angle A$ 的其它三角函數間的倒數關係。

【範例 2】試說明 $\sin A = \cos B$ 且 $\sin B = \cos A$ 。

【解】 ∵ $\angle A$ 的對邊 $\overline{BC}$ 恰為 $\angle B$ 的鄰邊，且

$\angle B$ 的對邊 $\overline{AC}$ 恰為 $\angle A$ 的鄰邊。



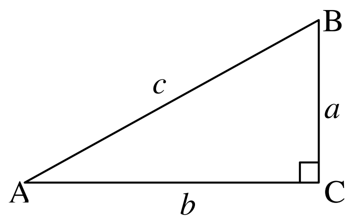
$$\therefore \sin A = \frac{\angle A\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\angle B\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \cos B \text{；}$$

$$\text{且 } \sin B = \frac{\angle B\text{的對邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\angle A\text{的鄰邊}}{\text{斜邊}} = \cos A \text{ 。}$$

在範例 2 中，因為 $\angle A$ 和 $\angle B$ 互為餘角，我們稱 sin 與 cos 兩函數具有**互餘關係**。

【類題練習 2】請找出範例 2 中，其它三角函數間的互餘關係。

【範例 3】試說明$\dfrac{\sin A}{\cos A}=\tan A$。



【解】 用ΔABC的任一邊長當分母，其他兩邊長分別當作分子，可作出兩個比值，例如：$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$或$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$。

若將兩者相除約去共同分母，所得的商可爲另一個三角函數，

即 $\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}}{\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\tan A$。

我們稱範例 3 中$\angle A$的正弦、餘弦和正切函數間的關係爲**商數關係**。

【類題練習 3】請找出範例 3 中，$\angle A$的其它三角函數間的商數關係。

【範例 4】使用範例 3 的圖形，試說明$\sin^2 A+\cos^2 A=1$。

【解】 根據畢氏定理$a^2+b^2=c^2$，將等號兩邊同除以c^2得到

$(\dfrac{a}{c})^2+(\dfrac{b}{c})^2=1\Rightarrow(\sin A)^2+(\cos A)^2=1$，

也就是$\sin^2 A+\cos^2 A=1$。

我們稱範例 4 中$\angle A$的正弦和餘弦函數間的關係具有**平方關係**。

【類題練習 4】請找出範例 4 中$\angle A$的其它三角函數間的平方關係。

【範例 5】利用三角函數的基本性質，求下列各題：

(1) $(\sin 42° - \sin 48°)^2 + (\cos 42° + \cos 48°)^2$

(2) $\dfrac{1}{1+\sin 5°} + \dfrac{1}{1+\cos 5°} + \dfrac{1}{1+\sec 5°} + \dfrac{1}{1+\csc 5°}$

【解】 (1) $(\sin 42° - \sin 48°)^2 + (\cos 42° + \cos 48°)^2$

$$
\begin{aligned}
&= \sin^2 42° - 2\sin 42° \sin 48° + \sin^2 48° \\
&\quad + \cos^2 42° + 2\cos 42° \cos 48° + \cos^2 48° \\
&= \sin^2 42° + \cos^2 42° + \sin^2 48° + \cos^2 48° \\
&\quad -2\sin 42° \sin 48° + 2\cos 42° \cos 48° \\
&= 1 + 1 - 2\sin 42° \sin 48° + 2\sin 48° \sin 42° \\
&= 2
\end{aligned}
$$

(2) $\dfrac{1}{1+\sin 5°} + \dfrac{1}{1+\cos 5°} + \dfrac{1}{1+\sec 5°} + \dfrac{1}{1+\csc 5°}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+\sin 5°} + \frac{1}{1+\csc 5°} + \frac{1}{1+\cos 5°} + \frac{1}{1+\sec 5°} \\
&= \frac{1}{1+\sin 5°} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin 5°}} + \frac{1}{1+\cos 5°} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\cos 5°}} \\
&= \frac{1}{1+\sin 5°} + \frac{\sin 5°}{1+\sin 5°} + \frac{1}{1+\cos 5°} + \frac{\cos 5°}{1+\cos 5°} \\
&= \frac{1+\sin 5°}{1+\sin 5°} + \frac{1+\cos 5°}{1+\cos 5°} \\
&= 1+1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

【範例 6】設$\angle A$爲銳角且$\sin A + \cos A = \dfrac{7}{5}$，求下列各式的值：

(1) $\sin A \cos A$ (2) $\tan A + \cot A$

【解】 (1) 從乘法公式$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$可看出

$$
\begin{aligned}
(\sin A + \cos A)^2 &= \sin^2 A + 2\sin A \cos A + \cos^2 A \\
&= \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A \\
&= 1 + 2\sin A \cos A \text{，}
\end{aligned}
$$

所以，$1+2\sin A\cos A=(\sin A+\cos A)^2=(\frac{7}{5})^2$ 。

因此，$\sin A\cos A=\frac{12}{25}$ 。

(2) 根據商數關係，再通分。

$$\begin{aligned}\tan A+\cot A&=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\\&=\frac{\sin^2 A}{\cos A\sin A}+\frac{\cos^2 A}{\sin A\cos A}\\&=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A\sin A}\\&=\frac{1}{\frac{12}{25}}\\&=\frac{25}{12}\end{aligned}$$

【重點整理】

1. 銳角三角函數中常用的基本關係爲：($\angle A$ 爲銳角)

(1) 倒數關係：$\sin A\csc A=1$ ；$\cos A\sec A=1$ ；$\tan A\cot A=1$ 。

(2) 互餘關係：$\sin A=\cos B$ 且 $\sin B=\cos A$ ，其中 $\angle A+\angle B=90°$ 。

(3) 商數關係：$\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$ ；$\frac{\cos A}{\sin A}=\cot A$ 。

(4) 平方關係：$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ；$1+\tan^2 A=\sec^2 A$ ；

$1+\cot^2 A=\csc^2 A$ 。

【家庭作業】

基礎題

1. 求$\sin^2 67.2°+\sin^2 22.8°$。

2. 設$\angle A$爲銳角，求$\sin^2 A+\cos^2 A-\tan^2 A+\cot^2 A+\sec^2 A-\csc^2 A$。

3. 設$\angle A$爲銳角，求$(\sin A-\csc A)^2+(\cos A-\sec A)^2-(\tan A-\cot A)^2$。

4. 設$\angle A$爲銳角，若$2\cos A=\cot A$，求$\angle A$。

進階題

5. 設$\angle A$爲銳角，求$\dfrac{\sec A}{\sec A-\tan A}+\dfrac{\csc A}{1-\csc A}$。

6. 設$\angle A$爲銳角且$4\sin A+3\cos A=5$，求$\tan A$。

7. 設$\angle A$爲小於$45°$的銳角且$\tan A+\cot A=\dfrac{25}{12}$，試回答下列各題：

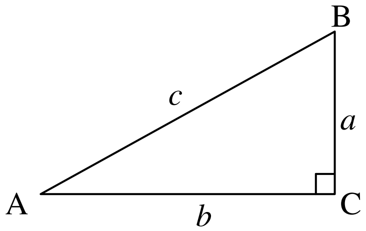
   ① 求$\sin A\cos A$。　　② 求$\sin A+\cos A$。

8. 設$\angle A$爲小於$45°$的銳角且$\sec A=\csc(2A)$，求$\angle A$。

9. 設$\angle A$爲銳角，試證$\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{\sin A}{1-\cos A}=2\csc A$。

A5-3 銳角三角形的邊角關係

如右圖，ΔABC 爲一個直角三角形，其中 $\angle C = 90°$。令 $\angle A$ 的對邊 $\overline{BC} = a$、$\angle A$ 的鄰邊 $\overline{AC} = b$ 和斜邊 $\overline{AB} = c$。



因爲 $\sin A = \dfrac{a}{c}$，$\cos A = \dfrac{b}{c}$；

$\tan A = \dfrac{a}{b}$，$\cot A = \dfrac{b}{a}$；

$\sec A = \dfrac{c}{b}$，$\csc A = \dfrac{c}{a}$，

所以 $a = c \times \sin A = b \times \tan A$；

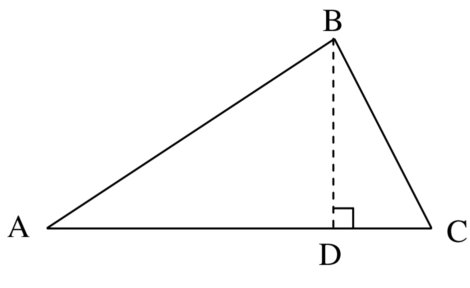
$b = c \times \cos A = a \times \cot A$；

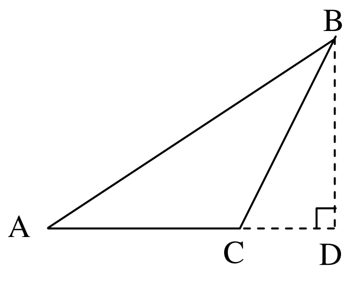
$c = b \times \sec A = a \times \csc A$。

我們學過三角形的面積公式爲 $\dfrac{底 \times 高}{2}$，如果只知道某個三角形的兩邊及其夾角，能求這個三角形的面積呢？

假設我們知道 ΔABC 的兩邊長 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 及這兩邊的夾角 $\angle A$，並且分下列兩種情形來說明：

(1) 當 $\angle A$ 爲銳角，如下列的兩圖形，



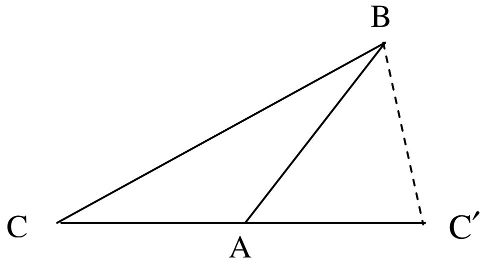


直接作 $\overline{AC}$ 邊上的高 $\overline{BD}$，因爲 ΔABD 爲直角三角形，所以

$\overline{BD} = \overline{AB} \times \sin A$，因此 $\Delta ABC = \dfrac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} = \dfrac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{AB} \times \sin A$。

(2) 當 $\angle A$ 爲鈍角，如右圖，

則延長 $\overline{CA}$ ，且取 $\overline{AC'}=\overline{AC}$ ，



再連接 $\overline{BC'}$ ，所以，由 $\Delta ABC=\Delta ABC'$ (面積相等)，且

$\angle BAC'=180°-\angle BAC$ ，因此

$$\Delta ABC=\Delta ABC'=\frac{1}{2}\times\overline{AC'}\times\overline{AB}\times\sin\angle BAC'$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin(180°-\angle BAC)$$

從上面的說明，我們知道：

若 ΔABC 的兩邊長分別爲 b、c，且夾角爲 $\angle A$ ，那麼 $\Delta ABC=\dfrac{bc\sin A}{2}$ 。

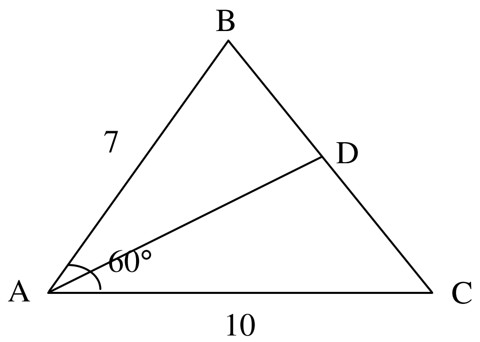
【範例 1】 已知 ΔABC 中，$\overline{AC}=10$，$\overline{AB}=7$，$\angle A=60°$，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ 交 $\overline{BC}$ 於 D，求：(1) ΔABC 的面積。 (2) $\overline{AD}$ 的長。

【解】 (1) $\Delta ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 10\times\sin 60°$

$=\frac{1}{2}\times 7\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{35}{2}\sqrt{3}$



(2) 設 $\overline{AD}=x$ 。

$\because\ \Delta ADB+\Delta ADC=\Delta ABC$

$\therefore\ \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\angle BAD+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AD}\times\sin\angle CAD=\frac{35}{2}\sqrt{3}$

$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 10\cdot x\cdot\frac{1}{2}=\frac{35}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{4}\cdot 17\cdot x=\frac{35}{2}\sqrt{3}$$

$$x=\frac{70}{17}\sqrt{3}$$

【類題練習 1】 已知ΔABC中，$\angle BAC=90°$，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$交$\overline{BC}$於 D，若 $\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，求$\overline{AD}$的長。

【想想看】 (1) 我們知道在直角三角形中，若已知兩股的長分別為 a、b，則它的面積為$\frac{ab}{2}$。事實上，這兩股的夾角為90°，那麼由上面的面積公式，我們能說$\sin 90^{\circ}=1$嗎？

(2) 如果(1)的說法是對的，那麼$\cos 90^{\circ}$會等於 0 嗎？

我們來看這個面積公式的一個應用。

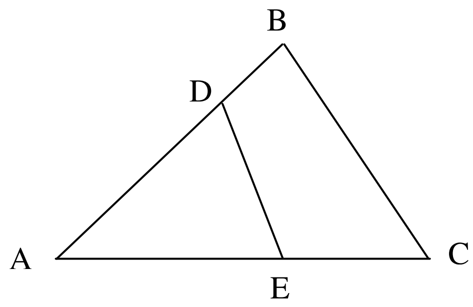
【範例 2】 ΔABC中，D、E 分別為$\overline{AB}$、$\overline{AC}$邊上兩點，試說明 ΔABC的面積：ΔADE的面積$=\overline{AB}\times\overline{AC}$：$\overline{AD}\times\overline{AE}$。

【解】 由面積公式，我們知道

ΔABC的面積$=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$，

而ΔADE的面積$=\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin A$，

所以，



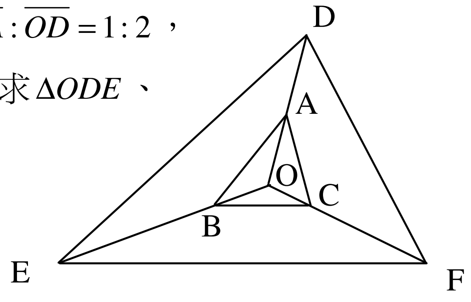
ΔABC的面積：ΔADE的面積

$$=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A:\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{AE}\times\sin A。$$

約去$\frac{1}{2}\sin A$後，即可得到

ΔABC的面積：ΔADE的面積$=\overline{AB}\times\overline{AC}$ ： $\overline{AD}\times\overline{AE}$ 。

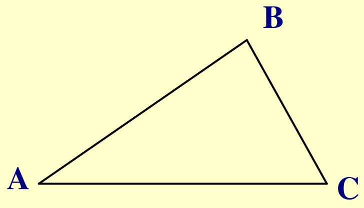
【類題練習 2】 如右圖，O 為ΔABC的重心，$\overline{OA}:\overline{OD}=1:2$，$\overline{OB}:\overline{OE}=1:3$，$\overline{OC}:\overline{OF}=1:4$，求$\Delta ODE$、$\Delta OEF$、$\Delta OFD$的面積比。



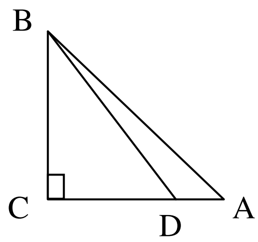
【重點整理】

1. 直角三角形中，若已知一銳角及任一邊長，即可求出另兩邊的邊長。
2. 在ΔABC中，如右圖，

$$\Delta ABC\text{的面積}=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{BA}\times\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\overline{CA}\times\overline{CB}\times\sin C\ 。$$



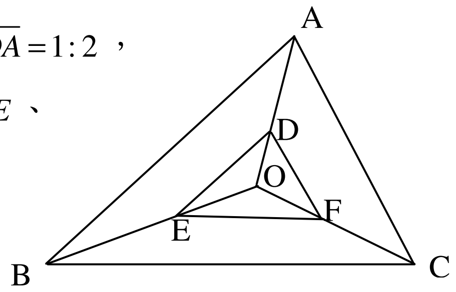
【家庭作業】



1. 如右圖，$\angle C = 90°$，$\angle BAC = 45°$，$\angle BDC = 60°$，若$\overline{AD} = 10$，求$\overline{DC}$、$\overline{BC}$的長。

2. 已知ΔABC中，$\overline{AC} = 12$，$\overline{AB} = 8$，$\angle A = 60°$，$\overline{AD}$平分$\angle BAC$交$\overline{BC}$於 D，求$\overline{AD}$的長。

3. 如右圖，設 O 爲ΔABC的重心，$\overline{OD} : \overline{DA} = 1 : 2$，$\overline{OE} : \overline{EB} = 2 : 3$，$\overline{OF} : \overline{FC} = 3 : 4$，求$\Delta ODE$、$\Delta OEF$、$\Delta OFD$的面積比。



簡答

1-1

【類題練習 1】 (1) $10x^2-11x-6$ (2) $-6x^2+17xy-12y^2$

【類題練習 2】 -6, 10, 10, -16

【家庭作業】 1. ① $2+4a-3b-6ab$ ② $-2x^2+11xy-5y^2$

③ $x^3-6x^2+11x-6$ ④ $x^4+10x^3+35x^2+50x+24$

2. $8, -5, 7, 27, -32, 5$

3. ① $a=-9$ ② -21 ③ $a=2, b=7, c=10$

4. ① 略 ② 略

1-2

【類題練習 1】 (1) $4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12zx$

(2) $9x^2+16y^2+25z^2-24xy-40yz+30zx$

【類題練習 2】 (1) x^2-9y^2-6y-1 (2) $x^4-2x^2y^2+y^4$

【家庭作業】 1. ① $16x^2+24x+9$ ② $25x^2-20xy+4y^2$

③ $\frac{4}{9}a^2+2ab+\frac{9}{4}b^2$ ④ $x^2+9y^2+6xy+10x+30y+25$

⑤ $4x^2-4xy+y^2-12x+6y+9$ ⑥ $(4x^2/25)-9y^2$

⑦ x^4-5x^2+4 ⑧ x^4-16

2. ① $44/25$ ② $399\frac{399}{400}$ ③ 15 ④ 6825.25

3. ① $16a^4-72a^2+81$ ② $a^4+4a^2b^2+16b^4$

③ $a^2-b^2-2bc-c^2$ ④ $a^4+8a^3+24a^2+32a+16$

4. ① 3963 ② $17/40$ 5. ① $x^2+2+(1/x^2)$ ② 7

1-3

【類題練習 1】 (1) $(27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3)/8$

(2) $64a^6-120a^4b+75a^2b^2-125b^3/8$

【類題練習 2】 (1) $125a^3-(b^3/8)$ (2) $x^6-19x^3y^3-216y^6$ (3) -25

【家庭作業】 1. ① $-x^3-6x^2-12x-8$ ② $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$

③ $\frac{x^3}{27}+\frac{y^3}{8}$ ④ $8a^3-\frac{b^3}{8}$ ⑤ a^6-729

2. ① 3 ② $760/3$ 3. ① a^6-1 ② 63 ③ 124

4. ① (1) 5 (2) 9 ② (1) 2 (2) -7

2-1

【類題練習 1】 (1) 商式$=2x-5$，餘式=20　(2) 商式$=-3x+1$，餘式=2

(3) 商式$=x^3+x^2+x+1$，餘式=0　(4) 商式$=2x-5$，餘式=25

【家庭作業】 1. ① 商式$=3x+2$，餘式$=0$

② 商式$=\frac{7}{2}x+\frac{1}{4}$，餘式$=-\frac{15}{4}$

③ 商式$=x^2+x+1$，餘式$=2$

④ 商式$=x^2+5x+27$，餘式$=134$

⑤ 商式$=x^2-x+5$，餘式$=-18x+14$

⑥ 商式$=x^2+1$，餘式$=2$

2. $a=1, b=2$　3. $2x^3-5x^2+4x+2$

4. -6　5. $x-1$

6. 餘式爲$-4x+1$　7. 餘式爲 1

2-2

【類題練習 1】 (1) $2x(2x+3)$　(2) $(a+b)(7a+7b-3)$　(3) $(x-y)^2(1-x+y)$

【類題練習 2】 (1) $(x-1)(x^2+1)$　(2) $(2y-3)(x+2)$　(3) $(5ax-2)(x+1)$

(4) $(a-bc)(ac+b)$

【家庭作業】 1. ① $x(2-a)$　② $3ab(a+2b)$　③ x^2

④ $-3(a-2)(b+3)$　⑤ $-(a-3)^2$　⑥ $(2b-1)(a+3)$

2. ① $x(x-2)$　② $3(x-2)$

③ $x(a-b)^2(x+a-b)$　④ $(x+1)(x^2+x+1)$

2-3

【類題練習 1】 (1) $(5x+17)(x-3)$　(2) $(19-x)(20+x)$

【類題練習 2】 (1) $(4x+3)(x-2)/2$　(2) $(2x-5)(3x+1)/5$

【家庭作業】 1. ① $(x+3)(x+11)$　② $5(x+1)(x-2)$

③ $(2x-5)(x+4)/2$　④ $(9x+1)(x-4)$

⑤ $7(a-5b)(a+3b)$　⑥ $(2x-2y-5)(x-y+1)$

⑦ $(x-p)(x+q)$　⑧ $(ax+b)(x-1)$

2. ① $(4x^2+3)(x+2)(x-2)$　② $(a+b-6)(a+b+2)$

③ $(x+8y)(x-2y)$　④ $(x-a)(x-1/a)$

⑤ $(x^2-x-3)(x^2-x+2)$　⑥ $(x+1)(x+2)(x^2+3x+4)$

2-4

【類題練習 1】 (1) $(a+5)^2$ (2) $(4x-5y)^2$ (3) $4(2x-3y)^2$ (4) $(a-b+c)^2$

【類題練習 2】 (1) $(a+1)^2(a-1)^2$ (2) $(2x+1)^2$

(3) $(a+b-1)(a-b+1)$ (4) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

【類題練習 3】 (1) $(x-1)^3$ (2) $(2x-y)^3$ (3) $(3+x)^3$ (4) $(3x+2y)^3$

【類題練習 4】 (1) $(x+\frac{1}{3})(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9})$ (2) $(2a-5b)(4a^2+10ab+25b^2)$

(3) $(x-1)(x^2+2x+2)$

(4) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

【家庭作業】

1. ① $(x+7)^2$ ② $3(x-2)^2$ ③ $(x+2a-2b)^2$
   ④ $2(x+3)(x-3)$ ⑤ $-(7+2a)(5+2a)/4$
   ⑥ $(a+2b)^2(a-2b)^2$ ⑦ $2(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$
   ⑧ $(5x-2)(25x^2+10x+4)$
2. ① $(x+y-3z)(x-y+3z)$ ② $(1+a)(1-b)(1-a)(1+b)$
   ③ $(ab-1-a-b)(ab-1+a+b)$ ④ $(3a-4)^2/36$
   ⑤ $(x-3)(x^2+4x+12)$ ⑥ $(x^2-x+1)(x^2+3)$
3. ① 5 ② 18 ③ 9

2-5

【類題練習 1】 (1) $(x+3)(x-1)$ (2) $(5a-2)(a-2)$

(3) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ (4) $(3x^2+x+2)(3x^2-x+2)$

【類題練習 2】 (1) $(x+4+\sqrt{7})(x+4-\sqrt{7})$ (2) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

(3) $(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$

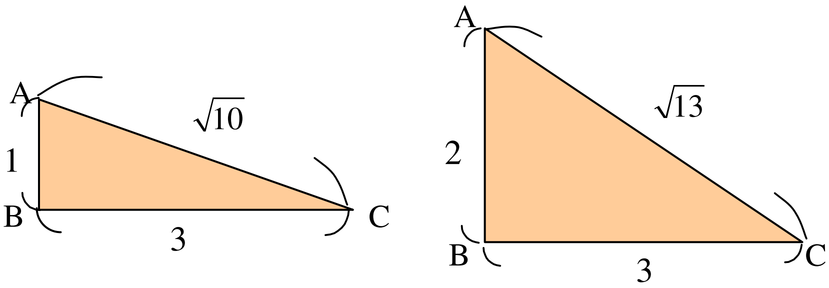
【家庭作業】

1. ① $(x+2)(x+4)$ ② $(5a^2+2a+1)(5a^2-2a+1)$
   ③ $(x^2+6x+18)(x^2-6x+18)$ ④ $(a^2-b)(a^2-3b)$
2. ① $(x+5+\sqrt{2})(x+5-\sqrt{2})$ ② $(a+b-c)(a-b+c+1)$
   ③ $(2a-1)(4a^2+2a+1)$ ④ $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$
3. ① 49 ② $a=-3, b=-2, c=5$
4. ① $(a-b-1)^2$ ② $a-b=4$ ③ 9

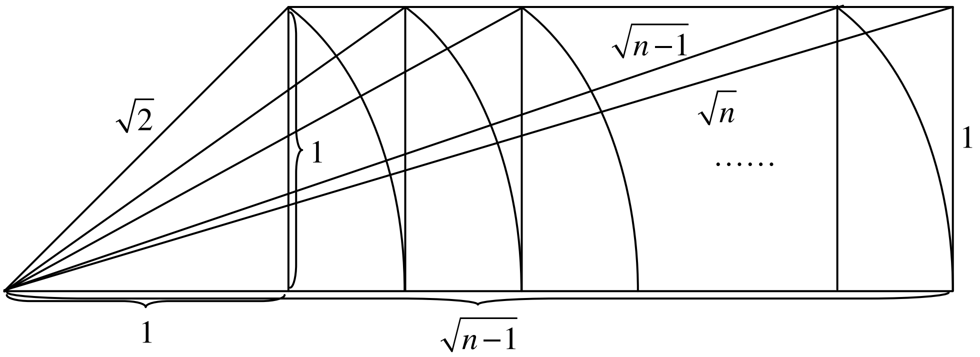
3-1

【類題練習 1】 2.2

【類題練習 2】



p.39【想想看】請參考下圖：



【類題練習 3】 (1) $\sqrt{29}$ (2) $\sqrt{39}$

【家庭作業】 1. 負數 2. 2 和 3 之間 3. 3.6 4. 略

5. ① $\sqrt{106}$ ② $\sqrt{171}$

3-2

【類題練習 1】 (1) 10 (2) $3/2$ (3) 5 (4) $5/2$

【類題練習 2】 (1) $2\sqrt{6}$ (2) $6\sqrt{5}$ (3) $3\sqrt{6}/2$ (4) $5\sqrt{21}/7$

【類題練習 3】 (1) $11\sqrt{6}-12\sqrt{3}$ (2) $11\sqrt{3}$ (3) $7\sqrt{15}/3+11\sqrt{7}/28$

【類題練習 4】 (1) $6\sqrt{6}+6\sqrt{15}$ (2) 2

【類題練習 5】 (1) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})/3$ (2) $(\sqrt{15}+3)/3$

【類題練習 6】 $2(2+\sqrt{3})$

【類題練習 7】 (1) $2+\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{10}-\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (4) $(\sqrt{10}+\sqrt{2})/2$

p.49【想想看】 因爲 $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=|\sqrt{a}-\sqrt{b}|\geq 0$，所以

當 $a\geq b\geq 0$ 時，$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$；

當 $b\geq a\geq 0$ 時，則 $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{b}-\sqrt{a}$；

至於 $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$，只需假設 $a,b\geq 0$.

【家庭作業】 1. ① $9\sqrt{2}$ ② $5\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{6}/3$ ④ $\sqrt{30}/6$

2. ① $3\sqrt{6}$ ② $\sqrt{10}/6$ ③ $3\sqrt{10}/25$ ④ $\sqrt{5}/5$

⑤ $2\sqrt{3}/3$

3. ① $6\sqrt{3}-3\sqrt{10}$ ② $-3\sqrt{5}+3\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{21}-3\sqrt{6}-7\sqrt{2}$

④ 60 ⑤ 18 ⑥ 11

4. ① $\sqrt{7}+\sqrt{2}$ ② $\sqrt{6}-\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

④ $\sqrt{10}-2\sqrt{2}$ ⑤ $(\sqrt{11}-\sqrt{2})/9$ ⑥ $3+\sqrt{5}$

⑦ $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ ⑧ $-\sqrt{7}-6$

5. ① $2-\sqrt{3}$ ② $5-2\sqrt{6}$ ③ $(\sqrt{6}+\sqrt{3})/3$

④ $4+2\sqrt{3}$ ⑤ $(4+\sqrt{2})/7$

6. $\sqrt{11}/2$

4-1

【類題練習 1】 $x=-1/3$或-3

【類題練習 2】 (1) $x=(3\pm\sqrt{13})/2$ (2) $x=(3\pm\sqrt{41})/8$

p.55【想想看】 請參考附錄 A2 的說明.

【類題練習 3】 (1) $x=(3\pm\sqrt{13})/2$ (2) $x=(3\pm\sqrt{41})/8$

【類題練習 4】 $x=(3\pm\sqrt{3})/3$

【類題練習 5】 $x=(1\pm\sqrt{10})/3, -1/2$或$2$

【家庭作業】 1. ① $x=2/3$或-3 ② $x=6$或2

③ $x=3\pm\sqrt{6}$ ④ $x=(-5\pm\sqrt{5})/2$

2. ① $p=-1, q=-24$ ② $x=1\pm2\sqrt{2}$

3. $a=-2$, 另一根爲 2 4. $c=-1$

5. ① $x=-6$或2 ② $x=3$或4 ③ $x=5/2$

6. $\pm2\sqrt{3}$ 7. 原先買進芒果 300 公斤

4-2

【類題練習 1】 (1) 2 個相異實根 (2) 無實根 (3) 無實根

【類題練習 2】 4

【家庭作業】 1. ① 2 個相異實根 ② 無實根 ③ 二重根

④ 無實根 ⑤ 無實根 ⑥ 無實根

2. 2 個相異實根 3. 方程式無實根

4. k 最大爲 1 5. $k=48$或12 6. 兩個相異實根

5-1

【類題練習 1】 (1) 17, 23, 29 (2) -16, -23

【類題練習 2】 (1) 73　　(2) 公差 6, 第十項 19

(3) 公差爲 -5, 前六項爲 $2,-3,-8,-13,-18,-23$.

【類題練習 3】 首項爲 0, 第二十項爲 95.

【類題練習 4】 11

【類題練習 5】 5

【家庭作業】 1. ① 14, 18　② 3, 7　2. 23

3. 公差爲 2, 第十一項爲 -5.

4. 公差爲 -7, 前六項爲 $4,-3,-10,-17,-24,-31$.

5. 57　6. 首項爲 6, 公差爲 3, 第九項爲 30.

7. 17　8. 12　9. 兩個數爲 5, 8　10. 公差爲 4

11. (1) 9 張　(2) 181 公分

5-2

【類題練習 1】 (1) 2241　(2) -145　(3) 2842

【類題練習 2】 (1) 公差爲 $4/3$, 第十項爲 16.　(2) 項數爲 11, 公差爲 7.2.

(3) 10

【類題練習 3】 1080

【類題練習 4】 20100

【家庭作業】 1. 530　2. -610　3. 7455　4. 公差爲 7, 第十項 68.

5. 10　6. 15 度　7. 2

8. ① 80 個　② 總和爲 23960.　9. (1) 21 個　(2) 121 個

10. 112　11. $m=8$　12. 75

13. 33 個, 總和爲 842.

5-3

【類題練習 1】 (1) 50, 250　(2) 75, -375

【類題練習 2】 (1) 162　(2) 4, 8, 16, 32, 64

(3) 首項爲 16, 公比爲 $1/2$.　(4) 512

【類題練習 3】 160000 張

【類題練習 4】 10, -10

【家庭作業】 1. ① 108, 648　② $-1/2$, $1/8$　2. 64

3. 8, 4, 2, 1, 1/2　4. 首項爲 96, 公比爲 1/2.　5. 768

6. 6, -6　7. 3.75×10^{22}

8. 四個數爲 2, 6, 18, 54.　　9. a, b, c, d 爲 1, 2, 4, 6.

10. 三個正數爲 4, 10, 16.

5-4

【類題練習 1】 (1) 155　(2) 5

【類題練習 2】 87 / 2 公尺

【類題練習 3】 9 天後

【類題練習 4】 212200 元

【類題練習 5】 20503 元

【類題練習 6】 33467 元

【家庭作業】 1. 1705　2. 7　3. 121 個　4. 5

5. 10457 元　6. 11111103　7. 30604 元

6-1

【類題練習 1】 (1) $f(0)=1, f(-2/5)=6/5$ (2) $f(5)=49$

【類題練習 2】 (1) $-4, 5$　(2) $5, -2, 1$

p.88【想想看】 不是，因爲只知道天數，並不能確定月份，例如:一年中每月 30 天的月份就有 4, 6, 9, 11 這四個月.

【家庭作業】 1. B　2. C　3. $f(2)=17$　4. $f(5)=3$

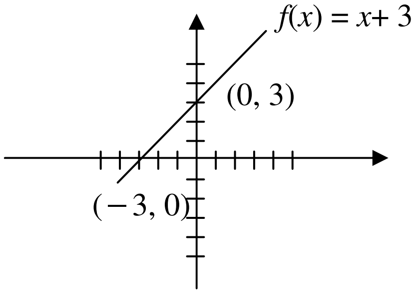
5. 34, -5　6. $-12, 2, -31$

7. 2　8. ① 4　② 86

6-2

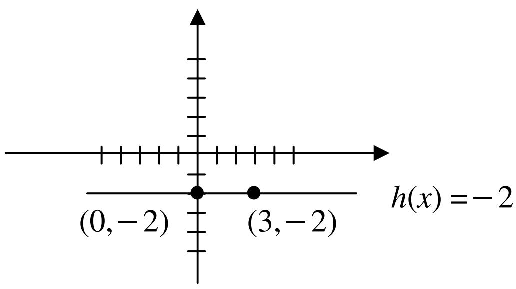
【類題練習 1】

x	-3	0
y	0	3



【類題練習 2】

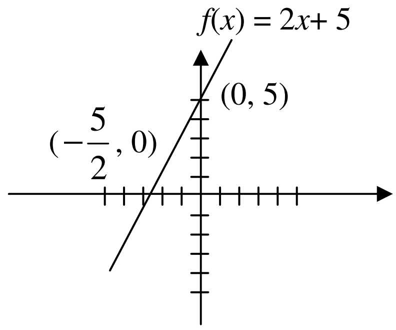
x	0	3
y	-2	-2



【家庭作業】 1. B 2. D

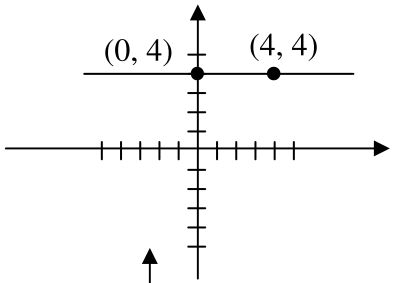
3.

x	$-\frac{5}{2}$	0
y	0	5



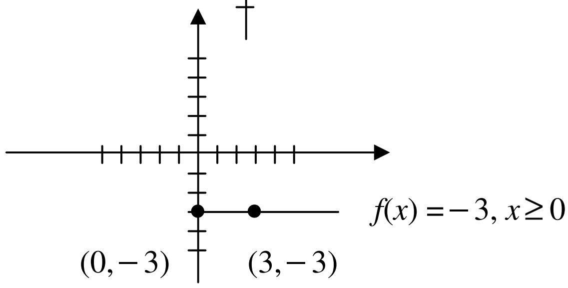
4.

x	0	4
y	4	4



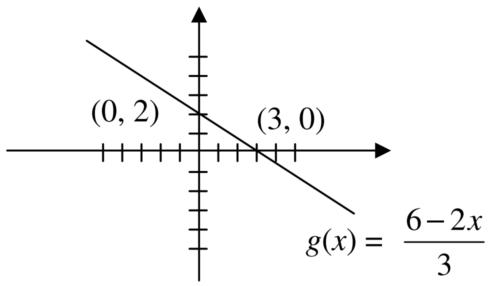
5.

x	0	3
y	-3	-3



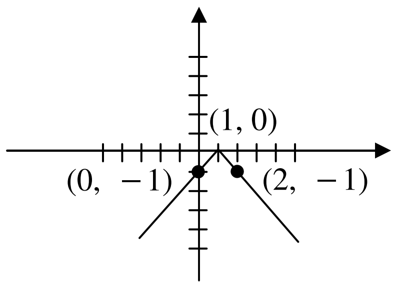
6.

x	0	3
y	2	0



7. $y=-|x-1|=\begin{cases}-x+1, x\geq 1\\ x-1, x<1\end{cases}$

x	0	1	2
y	-1	0	-1



8. ① $y=20-\frac{3}{500}x$

② $x=3000\Rightarrow y=2(℃)$

9. ① $f(x)=20-\frac{1}{15}x$

② $f(6)=19\frac{3}{5}$(公分)，　$f(8)=19\frac{7}{15}$(公分)

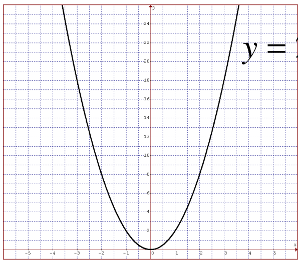
③ 因爲蠟燭只能燃燒 300 分鐘，所以不可能燃燒 301 分鐘，因此，$f(301)$ 沒有定義.

6-3

【類題練習 1】 (1) $(-1, 3)$　(2) $(1, -2)$

【類題練習 2】

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

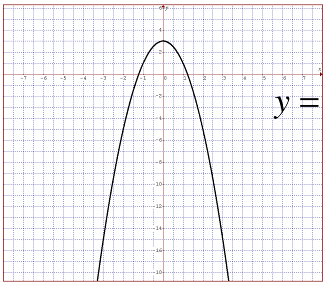


【類題練習 3】 開口由大而小依序爲：$y=-x^2/2, y=-x^2, y=-2x^2$ 的圖形

【類題練習 4】 下, 2

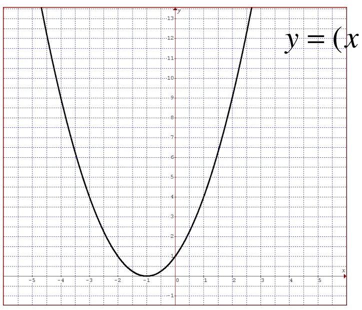
【類題練習 5】

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-15	-5	1	3	1	-5	-15



【類題練習 6】

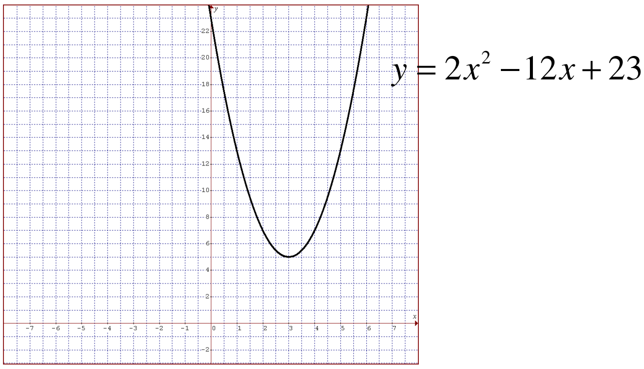
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	0	1	4	9



【類題練習 7】 (1) 右, 2　(2) 左, 3

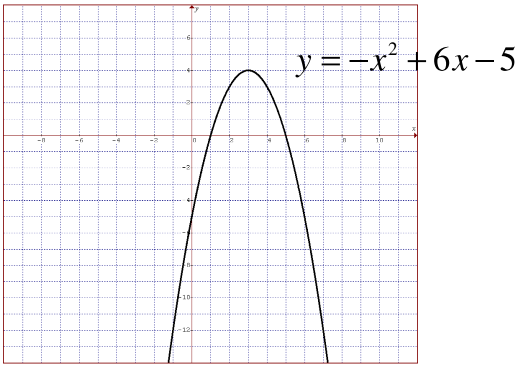
【類題練習 8】 $y = 2x^2 - 12x + 23 = 2(x-3)^2 + 5$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	23	13	7	5	7	13	23



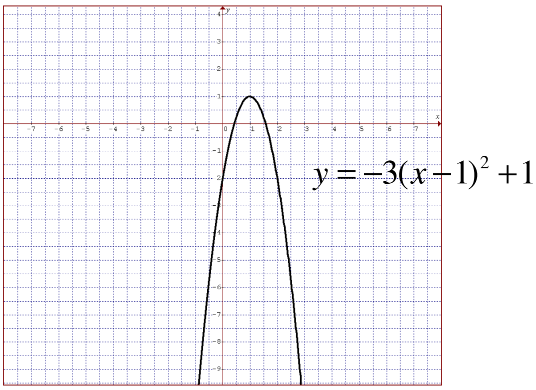
【類題練習 9】 $y = -x^2 + 6x - 5 = -(x-3)^2 + 4$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	-5	0	3	4	3	0	-5



【家庭作業】 1.

x	-1	0	1	2	3
y	-11	-2	1	-2	-11



2. $y=-2x^2-4x=-2(x+1)^2+2$，頂點：$(-1, 2)$,
對稱軸: $x+1=0$
3. $y=5x^2-10x+2=5(x-1)^2-3$，頂點：$(1, -3)$,
對稱軸: $x-1=0$
4 沿鉛直方向向下移動 3 個單位長，圖形可與 x 軸相切.
5. 新的函數式爲 $y=-3(x-5)^2-1$.
6. 新函數爲 $y=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{3}{2}$.

6-4

【類題練習 1】 圍成邊長爲 50 公尺的正方形，面積爲最大，其面積爲 2500 平方公尺.

【類題練習 2】 (1) 將 20 分成 10, 10 兩數，其平方和最小.
(2) 將 20 分成 10, 10 兩數，其乘積最大.

【類題練習 3】 (1) 不恆爲正，也不恆爲負. (2) 恆爲負.

【類題練習 4】 當 $x=-5$ 時，函數有最大值 48; $x=1$ 時，函數有最小值 0.

【家庭作業】
1. 圍成邊長爲 75 公尺的正方形面積爲最大，其面積爲 5625 平方公尺.
2. 將 30 分成 15, 15 兩數，其平方和最小.
3. 將 30 分成 15, 15 兩數，其乘積最大.
4. 時間爲 1/2 秒時，達到最高點，其高度爲 40.5 呎.
5. $x=5$ 時，函數有最大值 36; $x=2$ 時，函數有最小值 6.
6. $m=3/2$ 7. $a+b-c=-8/3$ 8. 最小值爲 -23
9. ① $y=3x^2-24x+72$ ② $y=3(x-4)^2+24$ ③ 24

附錄

A1

【類題練習 1】 (1) 5 (2) $\sqrt[3]{18}$ (3) $\sqrt[3]{3}$ (4) $4/5$

【類題練習 2】 (1) $3\sqrt[3]{5}$ (2) $-10\sqrt[3]{3}$ (3) $\sqrt[3]{20}/2$

【類題練習 3】 (1) $\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{3}$ (2) $-\sqrt[3]{4}/2+\sqrt[3]{2}/3+2\sqrt{2}$

【類題練習 4】 3

【類題練習 5】 (1) $\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$ (2) $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2})/7$

【類題練習 6】 (1) 3 (2) 2 (3) -2 (4) $-2/3$

【家庭作業】 1. ① 4 ② -9

2. ① $4\sqrt[3]{2}$　　② $-10\sqrt[3]{4}$

3. ① 6　　② $3\sqrt[3]{10}$

4. $\sqrt[3]{6}/2$　　5. ① $2\sqrt[3]{2}-7\sqrt[3]{3}$　　② $13\sqrt{2}+2+\sqrt[3]{18}/3$

6. 1　　7. ① $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)/2$　② $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})/6$

8. ① 2　　② $2\sqrt[4]{3}$　　③ $-5\sqrt[5]{2}$　　④ $-4/5$

A2

【類題練習】　1. (1) -4　　(2) -9　　(3) 34　　(4) $-34/9$

2. $x^2-12x+4=0$

【家庭作業】　1. ① $4\sqrt{2}$　② 18　③ $-18/7$　④ -8　⑤ -14

2. $-6, 2$

3. $16x^2+8x-49=0$

A3-1

【類題練習 1】　(1),　(2),　(3)

【類題練習 2】　(1)

p.131【想想看】　能

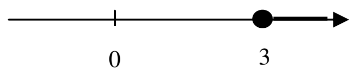
【家庭作業】　1. ③　　2. ① $\boldsymbol{N}$　② $\boldsymbol{Z}$　③ $\boldsymbol{Q}$　④ $\boldsymbol{R}$　　3. $A=\{1, 2\}$

4. ① $A \supset B$　② $B \subset A$　③ $C \subset A$　④ $B \subset C$

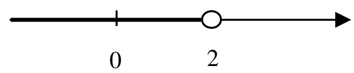
5. A 集合可能爲$\{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}$或$\{1,2,3,4,5\}$.

A3-2

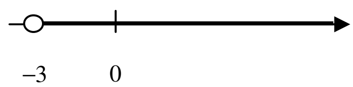
【類題練習 1】　(1)



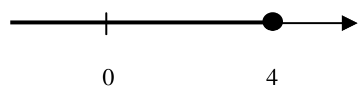
(2)



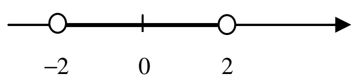
(3)



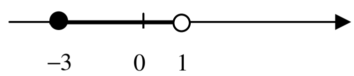
(4)



【類題練習 2】　(1)



(2)



【類題練習 3】 (1) $x \geq 5/4$ (2) $x > -2$

【類題練習 4】 (1) $x < -1$ (2) $x \leq 1$

【類題練習 5】 $3 \leq x < 4$

【類題練習 6】 (1) $9/4 \leq x \leq 11/4$ (2) $-10/3 \leq x \leq -2$

(3) $-144/5 \leq x < -39/10$

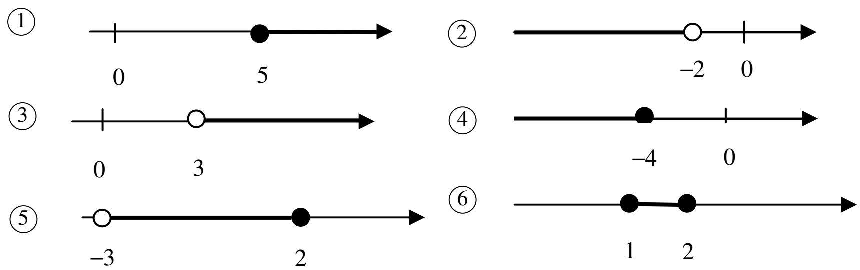
【類題練習 7】 (1) $-5/4 < x < 9/4$ (2) $m = 4, n = 2$

(3) $a = 2, b = 6$ 或 $a = -2, b = -6$

【類題練習 8】 (1) $x > 3$ 或 $x < -5/3$ (2) $x \leq 1/2$ 或 $x \geq 2$

【家庭作業】

1.



2. ① $x \geq 6/5$ ② $x \geq -7/2$ ③ $x > 1/3$ ④ $x \leq 12/11$

⑤ $4/5 \leq x \leq 11/5$ ⑥ $-3/5 \leq x \leq 1/5$

⑦ $-4/3 < x < 2$ ⑧ $x > 9/4$ 或 $x < -3/4$

⑨ $x \leq -1$ 或 $x \geq 3/2$ ⑩ $3 < x < 20/3$

3. ① $\{ 3 \}$ ② $\{3, 4, 6 \}$ ③ $\{ 3 \}$

④ $\{ 2, 3, 4, 6\}$ ⑤ $\{ 2 \}$ ⑥ $\{ 5 \}$

4. $m=5, n=2$ 5. $a=3, b=2$

6. $a=2, b=3$ 或 $a=-2, b=-3$

A3-3

p.144【想想看】 不能

p.145【想想看】 否

【類題練習 1】 (1) $a^2 > ab > b^2$ (2) $a^2 > ab > b^2$

【家庭作業】 1. ① ⓐ > ⓑ > ⓒ > ⓓ < ⓔ >

② > ③ < ④ > ⑤ >

⑥ > ⑦ > ⑧ >

2. ① 一或三 ② 二或四

3. ① 第一或三象限 ② 第三象限

4. ① $x^2 > 2x$ ② $2x > 4$ ③ $x^2 > 4$

5. ① $x^2 > -3x$ ② $-3x > 9$ ③ $x^2 > 9$

A3-4

【類題練習 1】 (1) $x > 5$ 或 $x < -1$ (2) $1 < x < 3$

【類題練習 2】 $2 \le x \le 3$

【類題練習 3】 (1) $x < -1$ 或 $x > 2/3$ (2) $-1 \le x \le 2/3$

【類題練習 4】 (1) $\frac{-7-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{-7+\sqrt{5}}{2}$ (2) $x \ge \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ 或 $x \le \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

【類題練習 5】 (1) 任意實數 (2) $x \ne 6$ 的任意實數 (3) 無解 (4) $x=7$

【類題練習 6】 (1) $-1 < x < 4$ (2) $x > -1$ 或 $x \le -2$

【家庭作業】 ① $x > 3$ 或 $x < -1$ ② $-5 \le x \le 1$ ③ $-3 < x < -1$

④ $x < -1$ 或 $x > -1/3$ ⑤ $x > 1$ 或 $x < -1/2$

⑥ $x \ge \frac{5+\sqrt{29}}{2}$ 或 $x \le \frac{5-\sqrt{29}}{2}$ ⑦ $\frac{5-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{21}}{2}$

⑧ $x \in R,\ x \ne 2$ ⑨ $x \in R$ ⑩ 無解 ⑪ $x = -3$

⑫ $x \in R$ ⑬ 無解 ⑭ 無解

⑮ $1 \le x < 2$ ⑯ $x > 1/2$ 或 $x < -1$

A4

p.157 【想想看】 (1) 是 (2) 是

p.157 【想想看】 (1) 略 (2) 是 (3) 否

p.158 【想想看】 (1) $>$ (2) $<$

(3) $a^2 + b^2 > c^2,\ b^2 + c^2 > a^2,\ c^2 + a^2 > b^2$ 都須成立.

p.159 【想想看】 略

p.161 【想想看】 (1) 是 (2) 是

p.164 【想想看】 (1) 因爲此四邊形的四個內角都爲其外接圓的圓周角,
且每一組對角的和恰爲 180°，所以其內角總和爲 360°.
(2) 是

p.165 【想想看】 (1) 一條 (2) 二條

p.168 【想想看】 (1) 略 (2) 是 (3) 略 (4) 略

A5-1

【類題練習 1】 $\sin B = 2/5,\quad \cos B = \sqrt{21}/5,\quad \tan B = 2\sqrt{21}/21,$
$\cot B = \sqrt{21}/2,\quad \sec B = 5\sqrt{21}/21,\quad \csc B = 5/2.$

【類題練習 2】

$\angle A$	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\csc A$
$30°$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
$45°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60°$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$

【類題練習 3】 0

【家庭作業】 1. $\sin A=\sqrt{10}/10$, $\cos A=3\sqrt{10}/10$, $\cot A=3$,

$\sec A=\sqrt{10}/3$, $\csc A=\sqrt{10}$

2. ① $(\sqrt{3}-1)/2$ ② 0 ③ 3/4 ④ 0

3. 1 4. $75°$

5. ① $\overline{BC}=12, \overline{CA}=16$

② $\cos A=4/5$, $\cos B=3/5$, $\tan A=3/4$, $\tan B=4/3$

6. $\csc A>\cot A>\sec A>\cos A>\tan A>\sin A$

7. 4/3 8. $\overline{AC}=17, \overline{BC}=28, \Delta ABC=210$

9. 60/169 10. 1/3

A5-2

【類題練習 1】 $\cos A\cdot\sec A=1$，$\tan A\cdot\cot A=1$

【類題練習 2】 $\tan A=\cot B$, $\cot A=\tan B$, $\sec A=\csc B$, $\csc A=\sec B$

【類題練習 3】 $\dfrac{\cos A}{\sin A}=\cot A$, $\dfrac{\sec A}{\tan A}=\csc A$, $\dfrac{\tan A}{\sec A}=\sin A$,

$\dfrac{\csc A}{\cot A}=\sec A$, $\dfrac{\cot A}{\csc A}=\cos A$

【類題練習 4】 $\tan^2 A+1=\sec^2 A$, $\cot^2 A+1=\csc^2 A$

【家庭作業】 1. 1 2. 1 3. 1 4. $30°$ 5. 0 6. $4/3$

7. ① 12/25 ② 7/5 8. $\angle A=30°$ 9. 略

A5-3

【類題練習 1】 $24\sqrt{2}/7$

p.184【想想看】 (1) 雖然 90°不是銳角,但是 sin90°確實爲 1，也就是說,

面積公式在直角三角形也是成立的.

(2) 事實上，$\sin^2 A+\cos^2 A=1$對任意$\angle A$都是成立的，所以

$\cos 90°=\sqrt{1-\sin^2 90°}=0$.

【類題練習 2】 $3:6:4$

【家庭作業】 1. $5+5\sqrt{3}, 15+5\sqrt{3}$ 2. $\overline{AD}=24\sqrt{3}/5$

3. $\Delta ODE:\Delta OEF:\Delta OFD=14:18:15$

九年一貫暫行綱要數學學習領域銜接高中課程
教材製作計畫相關人員名單

諮詢委員

吳鳳技術學院鄭國順校長（召集人）

國立台灣大學數學系李白飛教授（副召集人）

國立台灣大學張海潮教授

國立台灣大學陳宜良教授

國立台灣師範大學數學系李恭晴教授

國立清華大學數學系于靖教授

台北市立麗山高中林永發主任

桃園縣大華中學黃家德校長

國立新竹高中張瑞欽校長

國立豐原高中陳永昌老師

高雄市立新莊高中林清波主任

計畫人員

國立中正大學數學系王慶安教授

國立中正大學數學系褚孫錦教授

國立彰化高中陳永和老師

國立員林農工陳香妘主任

嘉義市立玉山國中林鴻哲老師

彰化縣立溪湖國中洪瑞鴻主任

彰化縣立陽明國中謝惠珠老師

感謝

國立羅東高中官長壽老師

國立基隆女中陳宗鈺老師

國立台中一中連世和老師

國立竹山高中曾文亮老師

國立北港高中吳山林老師

國立善化高中黃桂妮老師

協助本教材審查作業