

觀念篇

多項式乘法基本概念

多項式的乘法運算

1. $(-2x^2) \times 3x$

2. $(-3x^2) \times (2x^3 + 2)$

3. $(-3x + 1)(2x - 1)$

 指數律

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

 分配律

$$a(b+c) = ab+ac$$

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

■ 立即演練

計算下列多項式乘法的乘積：

1. $(-3x^2) \times (2x^3 - x + 2)$ 2. $(x-1)(x^2+x+1)$

利用**指數律**，我們可以計算 $x^2 \times x$ ，利用**交換律**，可以將 $(-2x^2) \times 3x$ 位置交換，整理成 $-2 \times 3(x^2 \times x)$ 的形式，再利用**分配律**，就可以處理如 2、3 等更複雜的多項式乘法。

NOTE:

直式乘法

多項式的乘法運算

$(3x^2 - 1)(-x + 3)$

同次項對齊
缺項補 0

■ 例題講解

利用直式乘法計算 $(2-5x)(3x^2-4)$

直式乘法，其實只是將分配律的計算過程用一種更清晰的方式排列。尤其是很多項相乘時，可以減少用分配律直接展開時容易計算錯誤的問題。為了減少直式乘法的計算錯誤，建議有缺項要補 0。

NOTE:

分離係數法

多項式的乘法運算

$$\begin{array}{r}
 3x^2 + 0x - 1 \\
 \underline{-1x + 3} \\
 9x^2 + 0x - 3 \\
 \underline{-3x^3 - 0x^2 + 1x} \\
 -3x^3 + 9x^2 + 1x - 3
 \end{array}$$

同次項對齊
缺項補 0

■ 例題講解

利用分離係數法計算 $(2-5x)(3x^2-4)$

在直式乘法中，當次數對齊時，因為文字符號 x 的位置固定，將 x 省略並不會影響計算。而且整個計算過程簡化成只剩下係數的部分，所以稱為分離係數法。

NOTE:

多項式乘積的次數

多項式的乘法運算

$$\begin{aligned}
 (-3x^2) \times (2x^3 - x + 2) &= -6x^5 + 3x^3 - 6x^2 \\
 (x-1)(x^2 + x + 1) \\
 (2x-1)^5
 \end{aligned}$$

 指數律

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

多項式 A 的次數為 m ，
多項式 B 的次數為 n ，
則多項式 AB 的次數為 $m+n$

■ 例題練習

設兩個多項式 A 、 B 的次數分別為 3 次及 5 次，
則 $A \times B$ 的次數為何？

多項式乘積的次數就是相乘後的最高次數。根據指數律，相乘後的各項次數就是相乘的項次數相加，因此，乘積的次數就是相乘的多項式的最高次數總和。

NOTE:

題型解析篇

例題 1. 多項式乘法運算

多項式的乘法運算 -- 題型解析

(1) 展開 $(x+3)(x-4)-(x-2)(x+1)$ (2) 計算 $1003 \times 996 - 998 \times 1001$

[基測]

■ 學生演練

1. 請展開 $(x-1)(2x^2+x-1)$ 並化簡。2. 計算 $493 \times 503 - 494 \times 502$ 之值

思路:

第 1 題:

1. 多項式的乘法? 利用分配律 + 指數律。
2. 計算時要注意正、負號。

第 2 題:

1. 直接計算有些複雜。
2. 因為每個數都很接近 1000，
將它設為 x ，可以簡化計算。

NOTE:

例題 2. 分離係數法

多項式的乘法運算 -- 題型解析

請用分離係數法求 $(3x^2-4)(5-2x)$

■ 學生演練

請用分離係數法求 $(4+5x^2)(-x^2+1-2x)$

思路:

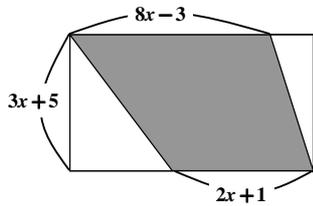
1. 什麼是分離係數法?
就是只寫出係數來做運算的直式乘法。
2. 要注意缺項須補 0，各項要對齊。

NOTE:

例題 3. 利用多項式表示面積

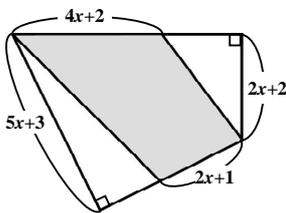
多項式的乘法運算 -- 題型解析

利用多項式表示灰色部份面積。



■ 學生演練

利用多項式表示灰色部份面積。



思路:

1. 灰色部分有一組對邊平行，所以是梯形。
2. 梯形面積公式： $(\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高} \div 2$ 。
3. 梯形的各段長度已經有了，乘開後化簡就是答案。

NOTE:

例題 4. 多項式相等

多項式的乘法運算 -- 題型解析

若多項式 $2x^3 + 3x^2 + kx - 3$ 與 $(ax^2 + b)(2x + 3)$ 相等，則 $k = ?$

■ 學生演練

若將 $(ax - 5)(2x + b)$ 展開得到 $6x^2 + 2x + c$ ，則 $c = \underline{\hspace{2cm}}$

思路:

1. 多項式的相等就是對應係數都相等。
2. 將多項式化簡後，根據定義，逐項對應可得 $k = 2b$ ， $-3 = 3b$ ，解聯立可得 k 值。

NOTE:

例題 5. 變數變換法

多項式的乘法運算 -- 題型解析

化簡 $(2x^2 - 3x)(2x^2 - 3x - 6) - (2x^2 - 3x + 4)^2$

■ 學生演練

1. 化簡 $(3x^2 + 98x - 1)(3x^2 + 98x) - (3x^2 + 98x)^2$ 2. 化簡 $(x^2 + 25x - 23)(3x^2 - 25x + 23) + (-25x + 23)^2$

思路:

1. 直接相乘展開不好算。
2. 因為 $2x^2 - 3x$ 重複出現，可設為 a 以簡化計算。
3. 化簡後再把 $2x^2 - 3x$ 代回 a 的位置。

NOTE:

例題 6. 利用乘法公式作多項式乘法

多項式的乘法運算 -- 題型解析

展開 $(3 - 5x + 2x^2)(3 + 5x - 2x^2)$

■ 學生演練

1. 展開 $(3x + 6)^2$ 2. 展開 $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

思路:

1. 前後兩個多項式很像，只有加減號不同。
2. 把 $5x - 2x^2$ 看成同一項，整個式子剛好是 $(a - b)(a + b)$ 的形式，可利用平方差公式來簡化計算。

NOTE:

例題 7. 乘積中的某項係數

多項式的乘法運算 -- 題型解析

$(3x^2 - 2x + 7)(2x^2 + x - 6)$ 展開式中，二次項係數為何？

■ 學生演練

在 $(4x^2 + 7x - 7)(2x^2 - 8x - 5)$ 的展開式中：

- (1) 常數項為 _____
 (2) 三次項為 _____

思路：

- 展開後的二次項 x^2 是怎麼來的？
就是 x^2 乘 x^0 、 x 乘 x 、 x^0 乘 x^2 。
- 求出 x^2 項的係數後，相加就是答案。

NOTE:

例題 8. 乘積的係數總和

多項式的乘法運算 -- 題型解析

$(2x^3 - 5x + 7)(7x^2 + x - 6)$ 展開式中，各項係數總和為何？

■ 學生演練

在 $(32x^3 + 33x + 35)(12x^2 + 13x + 15)$ 的展開式中，各項係數總和為何？

思路：

- 直接展開後，就可以求係數總和。
- 展開後，發現把 x 代入 1 ，不管 x 項的次數為何，都等於 1 。
係數總和就是多項式在 $x=1$ 時的值。

NOTE:

例題 9. 代入求值

多項式的乘法運算 -- 題型解析

若 $x^2+x-3=0$ ，求 $(x^2+x-1)^2-9(x^2+x+8)+100$ 之值。

■ 學生演練

1. 若 $2x^2+x=5$ ，求 $2(4x^2+2x-5)+(2x^2+x-4)^2$ 之值。

2. 若 $x^2+x-6=0$ ，求 $2(x^3+x^2)+2x^2(x^2+x)$ 之值。

思路：

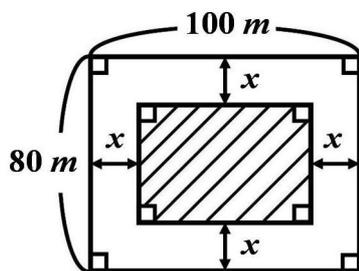
1. 從題目條件，無法直接求出 x 值來代入。
3. 但可以得到 $x^2+x=3$ ，剛好可以代入多項式中求值。

NOTE:

實戰篇~各校段考考題

1. 計算 $(2x-3)(-x+2)=?$
[北市天母 100]
2. 依乘法公式展開 $(2-6x)(-2-6x)$ 結果為下列何者?
(A) $4-36x^2$ (B) $-4-36x^2$ (C) $-4+36x^2$ (D) $-4+24x-36x^2$
[北市石牌 100]
3. 下列多項式的乘法運算何者正確?
(A) $(2x-1)(-3x+4)=-6x^2-11x-4$ (B) $(5x^2-4)(-2x+3)=-10x^3-15x^2-8x-13$
(C) $(2x-5)^2=4x^2-20x+25$ (D) $(x+7)(x-7)=x^2+49$
[高市正興 100]
4. 若已知 $(2x+a)(bx+3)=-6x^2+11x+c$ ，則 $c=?$
[北市弘道 100]
5. 在 $(x-2)^2(1-2x+3x^2)$ 的展開式中， x^3 項的係數是多少?
[北市石牌 98]
6. 若 $(3x^2-4x+a)(2x^2+x+1)$ 的乘積中， x^2 項的係數為 -19 ，則 $a=?$
[北市五福 99]
7. 展開 $(-5x-3)(5x-3)+(-2x-5)^2$
[北市弘道 100]
8. 展開 $(6-4x^2+3x^4+7x)(2+3x^2-5x)+x^3(7x+8x^2)$ 後，最高次數是多少?
(A) 8 (B) 6 (C) 5 (D) 4
[北市石牌 99]
9. 若 A 為二次多項式， B 為三次多項式， C 為四次多項式，則 $A \times B + C$ 為幾次多項式?
(A) 五次 (B) 六次 (C) 八次 (D) 十次
[北市石牌 100]

10. 如下圖，有一長方形土地，長 100 公尺，寬 80 公尺，在其內部四周圍開闢一條等寬的走道，走道的寬度皆為 x 公尺，則剩下的斜線部分面積=? (以 x 表示)

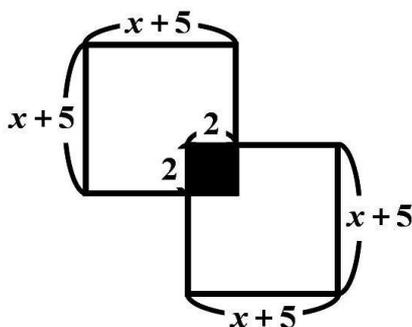


[高市陽明 98]

11. 如下圖，兩個邊長皆為 $x+5$ 的大正方形重疊在一起。

如果重疊部分(黑色部分)是邊長為 2 的正方形，那麼疊合後的總面積是多少?

- (A) $2x^2 + 10x + 46$ (B) $x^2 + 20x + 46$ (C) $2x^2 + 20x + 46$ (D) $x^2 + 10x + 21$



[北市正興 100]

12. 多項式 $(5x^3 - 3 + x)(-3x^2 + 4)$ 展開之所有係數總和為?

[北市弘道 98]

13. 多項式 $(x-1)(x+1)(2x-1)(2x+1)$ 的展開式中，各項係數(包含常數項)的總和為?

[北市弘道 99]

14. 若 $x^2 + 5x - 7 = 0$ ，則 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ 之值為何?

[高市五福 99]

實戰篇解答：

1. $-2x^2 + 7x - 6$	2. C	3. C	4. -5	5. -14
6. -9	7. $-21x^2 + 20x + 34$	8. B	9. A	10. $4x^2 - 360x + 8000$
11. C	12. 3	13. 0	14. 143	平方公尺