

觀念篇

多項式的定義

多項式及其加減運算

$$x^2 + 2x + 1$$

$$4x^2 - 1$$

$$-5x^3$$

單項式

x 不在絕對值或分母內

■ 例題講解

下列代數式何者為 x 的多項式？

(A) $3x^2 - x$ (B) $\frac{x}{3} + 1$ (C) $3x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} + 2$ (D) $x^2 + 3|x| - 1$

由多個項「加」在一起而成的代數式，稱為多項式，其中的符號(如變數 x)不可出現在絕對值及分母之中。

NOTE:

多項式的次數

多項式及其加減運算


$$x^2 + 2x + 1$$

例

$$3x + 2$$

$$4x^2 - 1$$

$$-3$$

 常數多項式

1. 零次多項式：
只有常數項且不等於 0
2. 零多項式：
只有常數項且等於 0
次數不存在

■ 例題講解

多項式 $3x^4 - 4x^3 + x - 5$ 的次數為 a 、項數為 b 、常數項為 c ，
則 $a + b + c = ?$

多項式中 x 的最高次數為多項式的次數。若只有常數項，則稱為常數多項式(包括零次多項式以及零多項式)。

NOTE:

多項式的係數

多項式及其加減運算

$$x^2 + 2x + 1$$

■ 例題講解

1. 完成下方表格：

多項式	次數	項數	三次項係數	二次項係數	一次項係數	常數項
$2x^3 - 3x^2 + 1$						
$-4x^3 + x$						

2. 若多項式 $x^3 + x - a$ 和多項式 $x^3 + bx^2 + cx + 3$ 相等，則 $a + b + c = ?$

因為多項式是由「加法」所定義，所以要特別注意係數的正負，例如， $2x^3 - 3x^2 + 1$ 中，二次項的係數為 -3 。

NOTE:

多項式的排列

多項式及其加減運算

$$-4x^2 + x^4 - x^3 + 5x - 3$$

高 \longrightarrow 低
 $x^4 - x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 降冪排列

低 \longrightarrow 高
 $-3 + 5x - 4x^2 - x^3 + x^4$ 升冪排列

■ 例題練習

將多項式 $3x^2 - 4x^4 - 1 + x$ 分別依照降冪及升冪重新排列：

降冪：_____

升冪：_____

將各項按照次數的高低做排列可以讓式子更清楚，例如，透過降冪排列（次數由高排列至低），就很容易觀察該多項式的特性，如最高次數與缺項的部分等。

NOTE:

合併同類項

多項式及其加減運算



同類項

變數及次數均相同的項

$$-3x + 1 - 2x - 6$$

■ 例題練習

1. 若 $ax^3 + 3x^2 - 2x^3 + ax^2 - 4x - 1$ 為 x 的二次多項式，則合併同類項之後，二次項係數為_____。
2. 若多項式 $5x^2 + 9 - 6x + a - cx + bx^2$ 化簡後的結果為零多項式，則 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $b = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $c = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

同類項就是變數及次數均相同的項。因為變數、次數相同，我們就可以利用分配律將同類項合併（化簡），讓式子更簡潔易讀。

NOTE:

多項式的加法

多項式及其加減運算

橫式運算 → 1. 去括號 2. 同類項合併

$$(3x^3 - 2x + 1) + (-2x^2 + 5x - 4)$$

直式運算 → 同次對齊

分離係數 → 同次對齊、缺項補 0

多項式加法的原理就是利用同類項可以合併的特性。其中的直式或分離係數法的運算，要注意缺項須補 0，以免計算錯誤。

NOTE:

多項式的減法

多項式及其加減運算

橫式運算 → 1. 去括號 2. 同類項合併

$$(3x^3 - 2x + 1) - (-2x^2 + 5x - 4)$$

直式運算 → 同次對齊

分離係數 → 同次對齊、缺項補 0

多項式 $A - B$ 可以看成 $A + (-B)$ ，因此原理和加法是一樣的，只是在去括號時要注意正、負號的問題。

NOTE:

重點整理

多項式及其加減運算

以最高次數定義多項式次數

多項式 $3x^3 - 2x^2 + 5$

零次多項式
零多項式
降冪排列

常數多項式

三次項 二次項 常數項 或 零次項
係數： 3 -2 5 一次項係數 = 0

$5 - 2x^2 + 3x^2$ 升冪排列

多項式的加減法 → 同類項合併

橫式運算 → 去括號 + 同類項合併

直式運算及分離係數法 → 1. 同次對齊 2. 缺項補 0

$$(3x^3 - 2x + 1) + (-2x^2 + 5x - 4)$$

$$(3x^3 - 2x + 1) - (-2x^2 + 5x - 4)$$

$$3x^3 + 0x^2 - 2x + 1$$

$$0x^3 - 2x^2 + 5x - 4$$

$$3 + 0 - 2 + 1$$

$$0 - 2 + 5 - 4$$

本章只有兩個重點：

1. 了解定義（多項式、次數及排列 ...）。
2. 熟悉多項式的加法及減法運算。

NOTE:

題型解析篇

例題 1. 多項式的項數及次數

多項式及其加減運算 -- 題型解析

寫出下列多項式的項數及次數

多項式	項數	次數
$-2x^3+1$		
$3x$		
$1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5$		
-10		
$-3x^3+2x^2-1$		

■ 學生演練

1. 多項式 $5x^2+3x^4+1$

(1) 項數是_____ (2) 次數是_____

2. 多項式 ax^3-x^2+bx-1 的項數是 3，次數也是 3，請問下列何者正確？(A) $a=0, b=0$ (B) $a \neq 0, b=0$ (C) $a=0, b \neq 0$ (D) $a \neq 0, b \neq 0$

思路:

1. 什麼是多項式的項?
2. 多項式的次數定義?

NOTE:

例題 2. 零多項式

多項式及其加減運算 -- 題型解析

設 $(2a+3b-5)x^2+(4a-5b+1)x+(c-2)$ 為 x 的零多項式，求 $a+b+c=?$

■ 學生演練

若多項式 $(a-4)x^2-(b+2)x+(c-3)$ 為零多項式，則下列何者錯誤？(A) $a=4$ (B) $b=2$ (C) $c=3$ (D) $a+b+c=5$

思路:

1. 什麼是零多項式? 每一項的係數都是 0。
2. 根據定義，常數項 $c-2=0$ ，求出 c 。
3. 同樣的， x^2 、 x 項的係數也等於 0，得到另外兩個方程式，解聯立可得 a 、 b 的值。

NOTE:

例題 3. 多項式相等

多項式及其加減運算 -- 題型解析

若兩個多項式 $-x^2 + (a-3)x - 3$ 及 $bx^2 - 3x + c + 1$ 相等，則 a 、 b 、 c 的大小關係為何？

■ 學生演練

1. 若兩多項式 $(a-2)x^2 + 5x - 5$ 及 $5x^2 + (2a-b)x - 5$ 相等，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$
2. 若兩多項式 $(a+5)x^3 - (b-2)x^2 + (2a-b)x - 5$ 及 $cx + d$ 相等，則 $a+b+c+d = \underline{\hspace{2cm}}$

思路：

1. 多項式相等？就是對應係數會相等。
2. 依據定義，逐項比較係數，就可以求出 a 、 b 、 c 的值，並得知其大小關係。

NOTE:

例題 4. 多項式的化簡

多項式及其加減運算 -- 題型解析

多項式 $12x + x^2 - 16x + 7 - 9x^2$ 化簡後，二次項、一次項與常數項的係數分別為 a 、 b 、 c ，則 $a + 2b - c = ?$

■ 學生演練

1. 請化簡多項式 $x^2 - [5x^2 - 8 + 3x - 2x^2 + 3(x-3)]$ ，並將結果以降冪排列。
2. 多項式 $3x^3 - (ax^2 - 8 + 3x) - (2x^2 + bx - 3)$ 化簡後，其項數為 3，且一次項的係數為 2，則 $a - b = \underline{\hspace{2cm}}$

思路：

1. 多項式如何化簡？原理就是同類項合併。
2. 化簡後，得到各項係數 a 、 b 、 c ，並算出 $a + 2b - c$ 的值。

NOTE:

例題 5. 多項式的加減

多項式及其加減運算 -- 題型解析

計算 $(6x^3 - 3x + 1) - (2x^2 + x - 5) + (x^3 - 7x^2 - 4)$

■ 學生演練

1. 請計算下列各式:

(1) $(-3x^2 + 2) + (2x^2 - 3x + 1)$ (2) $(5x + 3x^2 - 1) - (2 + 6x - x^2)$

2. 已知 $3x^2 - 5x + 2$ 減去多項式 A 所得的差再加上 $5x + 2$ ，其結果為 $-x^2 + 2x - 1$ ，則多項式 $A =$ _____

思路:

1. 多項式的加減就是去括號與同類項合併。
2. 去括號時要注意正、負號的問題。

NOTE:

Q: 什麼是去括號法則?

A: 若括號的前面沒有東西，可以直接把括號去掉；若括號的前面有加、減號，可以分別把它當作 +1 或 -1，再利用分配律把式子給乘開。

例題 6. 加減後相等

多項式及其加減運算 -- 題型解析

已知 $(ax^2 + 5x - 3) - (3x^2 + bx + c)$ 的結果為零多項式，請問 a 、 b 、 c 各為多少?

■ 學生演練

若 $(3x^2 - 2x + a) + (bx^2 + 2x + 4) = 5x^2 + cx - 3$ ，則 $a + b + c =$ _____

思路:

1. 什麼是零多項式?
2. 相減並化簡後，根據定義，因為各項係數都是 0，就可以算出 a 、 b 、 c 的值。

NOTE:

例題 7. 代入化簡

多項式及其加減運算 -- 題型解析

設 $A = 2x^2 - 3x + 4$, $B = x^2 + x - 6$, $C = -5x^2 + 7x - 4$.
求 $5A - (3B - 4C) = ?$

■ 學生演練

1. 設 $A = x^2 - 5x + 1$, $B = 2x^2 + 3x + 4$, $C = 5x^2 + 3x - 1$,
則 $A - 2B + 3C =$ _____
2. 有 A 、 B 兩多項式, 已知 $A + B = x^2 + 1$, $A - B = 2x^3 - 4$,
則 $4A + 2B =$ _____

思路:

1. 要求 $5A - (3B - 4C)$, 就把 A 、 B 、 C 代入對應的多項式, 並做化簡。
2. 代入多項式時, 注意要加上括號。

NOTE:

例題 8. 看錯題目

多項式及其加減運算 -- 題型解析

阿宇解一道數學題目, 誤將 $A - B$ 看成 $A + B$, 結果得出答案為 $-7x^2 + 3x + 1$,
已知 $B = 4x^2 - 5x + 2$, 則 $A - B$ 的正確答案為何?

■ 學生演練

小雨解一道數學題目, 誤將 $A - 2B$ 看成 $A + 2B$, 結果得出答案為 $3x^2 - x + 5$,
已知 $A = x^2 + 3$, 則 $A - 2B$ 的正確答案為何?

思路:

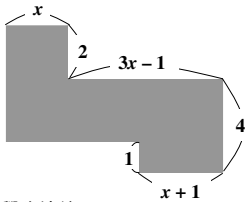
1. 題目告訴我們 $A + B$ 的多項式。
2. 又知道 B 的多項式。
3. 將兩個已知的多項式相減 $(A + B) - B$ 會得到 A 的多項式, 當然就可以算出 $A - B$ 。

NOTE:

例題 9. 多項式表示面積與周長

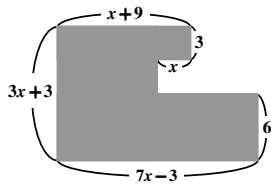
多項式及其加減運算 -- 題型解析

下圖中每個角度均為直角，利用 x 的多項式表示下圖灰色部份的面積與周長。



■ 學生演練

下圖中每個角度均為直角，利用 x 的多項式表示下圖灰色部份的面積與周長。



思路:

1. 怎麼求面積? 試著切出可計算的長方形。
2. 要求長方形的面積, 我們需要長、寬。
3. 從長方形的性質一對邊相等, 可得到各邊的邊長。

NOTE:

實戰篇~各校段考考題

1. 下列五組數那些並非同類項?

[甲] $5a^2b \cdot -6a^2b^2$ [乙] $-6ab \cdot -6a^2b$ [丙] $-\frac{3}{2}x^2y \cdot 5x^2y$ [丁] $4x \cdot 4y$ [戊] $\frac{9}{2}, \frac{2}{9}$

(A) 乙 (B) 丁 (C) 甲乙丁 (D) 乙丁戊

[高市五福 98]

2. 下列各式中，有多少個是 x 的多項式?

[甲] $\frac{3}{2}x$ [乙] $|-2|x+4$ [丙] $9-5x+3x^2$ [丁] $\frac{2}{3x}-1$ [戊] $|5x|+1$ [己] $7x-2=0$

(A) 2 個 (B) 3 個 (C) 4 個 (D) 5 個

[高市陽明 100]

3. 下列哪些是 x 的二次多項式?

(A) $4x^2-3+5x$ (B) $\frac{2}{x^2}+5$ (C) $-x^{20}$ (D) 0 (E) $\frac{x^2}{3}+4$ (F) $-\frac{1}{2}$ (G) $3x^2+|x-4|$

(H) $8x^2$ (I) $-x^2-(2-x^2)$

[高市正興 100]

4. 若有一多項式 $(2a+5)x^3 + \frac{2}{3}bx^2 + (c-5)x + d$ 為一個零多項式，則 $2a+3b-c-d=?$

[高市陽明 99]

5. 若 $A=(a-3)x^3+(b+2)x^2+(a+b-7)x+5$ 為 x 的一次多項式，則下列敘述何者**錯誤**?

(A) $a=3$ (B) $b=-2$ (C) $A=-8x+5$ (D) $A=-6x+5$

[北市弘道 100]

6. 下列有關多項式 $A=-x+5x^2-2$ 的敘述，何者**正確**?

(A) A 多項式有缺項 (B) x^2 項的係數是 5 (C) A 的常數項是 2 (D) A 是一次多項式

[北市弘道 100]

7. 關於多項式下列敘述何者正確?

(A) x^3-5x^2+4x-7 項數為三

(B) $1-3x+5x^2-4x^4$ 為降冪排列

(C) ax^2+bx+c 為常數多項式，則 $a^2+b^2=0$ (D) x 的三次式加 x 的二次式結果為五次式

[北市天母 98]

8. 已知多項式 $A=ax^3+(b+3)x^2+(c-1)x-1$ ， $B=2x^2+(a-3)x+(b-c+d)$ ，

若 $A=B$ ，則 $a+b+c+d=?$

[高市五福 99]

9. 多項式 $f(x)=ax^5+bx^3+cx+5$ ，若 $f(-7)=3$ ，則 $f(7)=?$

[高市正興 98]

10. 下圖是艾斯以直式計算多項式的減法，下列何者正確？

(A) $p+q+r=0$ (B) $p=-2$ (C) $r=2$ (D) $q=6$

$$\begin{array}{r} -x^2+px-3 \\ -) \quad qx^2-3x-5 \\ \hline -3x^2+3x+r \end{array}$$

[北市石碑 100]

11. 計算 $(-4x-x^2+3)-(2x^2-6)=?$ (請依降冪排列作答)

[北市弘道 100]

12. 化簡 $(5x^2-4x+3)-2(x^2+6x-1)$ 之後，可得下列哪一個結果？

(A) $3x^2-16x+5$ (B) $3x^2+8x+1$ (C) $3x^2+2x+2$ (D) $7x^2-16x+1$

[北市石碑 99]

13. 若 A 和 B 均為 5 次多項式，則 $A-B$ 為幾次多項式？

(A) 10 次多項式 (B) 零次多項式 (C) 次數不高於 5 次多項式 (D) 次數低於 5 次多項式

[北市仁愛 99]

14. 化簡 $\frac{x+2}{5}-\frac{2x-1}{3}-1$ ，可得下列哪一個結果？

(A) $-7x-4$ (B) $-7x-14$ (C) $\frac{-7x-4}{15}$ (D) $\frac{-7x-14}{15}$

[高市陽明 100]

15. 化簡 $x^2-[-2x^2+7-x-3(2x^2-3x-4)]=?$

(A) $-3x^2-10x-5$ (B) $-3x^2+8x+19$ (C) $9x^2+10x+5$ (D) $9x^2-8x-19$

[北市石碑 99]

16. 計算 $2x^2+\{x^2-[5x^2-3+x-(-3x^2+4)]\}$ 為多少？

[高市正興 100]

17. 已知 B 為一多項式，且 $8x^3-7x+2=B-(-2x^3+4x^2-8x+5)$ ，求 $B=?$

[高市陽明 99]

18. 若 $3x^2 - 2x + 5$ 減去多項式 A 所得的差為 $2x^2 - 5x + 7$ 則多項式 $A = ?$

- (A) $-x^2 - 3x + 2$ (B) $-x^2 - 7x + 2$ (C) $x^2 + 3x - 2$ (D) $-x^2 - 7x + 12$

[高市正興 99]

19. 已知 a 、 b 、 c 為常數，若 $ax^2 + 3x + 5$ 與 $2x^2 - bx - c$ 的差為零次多項式，則下列敘述何者正確？

- (A) $a = 2$ ， $b = -3$ ， $c \neq -5$ (B) $a = 2$ ， $b \neq -3$ ， $c = -5$ (C) $a \neq 2$ ， $b = -3$ ， $c = -5$
(D) $a = 2$ ， $b = -3$ ， $c = -5$

[高市陽明 100]

20. 若 $a(x^2 + 2x + 3) + b(-x^2 + x - 1) + (2x^2 - 5x + c)$ 為零多項式，求 $a + b + c = ?$

[北市石牌 99]

21. 多項式 $(x^3 + 2x^2 + 1) - (2 - ax^2 + x)$ 的結果中有三個相異的項，則 $a = ?$

- (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

[北市弘道 98]

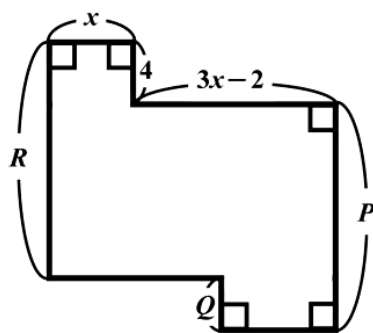
22. 若有三個多項式分別為 $A = 3x^2 + 4x - 5$ ， $B = -x^2 + 6$ ， $C = x^2 - 7x + 4$ ，則： $3A - (B - 2C) = ?$

(答案請用升冪表示)

[高市五福 99]

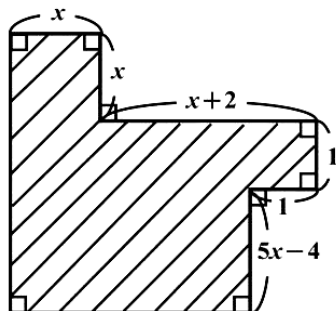
23. 下圖的周長是 $8x + 30$ ，求 $P + Q + R = ?$

- (A) 30 (B) 25 (C) 20 (D) 15



[北市石牌 100]

24. 下圖中斜線區域的周長為 ? (以 x 的多項式表示)



[高市正興 99]

25. 設 A 、 B 皆為二次多項式，若 $3A+B=-9x^2+2x-15$ ， $A-B=-3x^2+2x-5$ ，則 $A=?$

[北市仁愛 97]

實戰篇解答：

1. C	2. B	3. AEH	4. -10	5. C
6. B	7. C	8. -5	9. 7	10. C
11. $-3x^2-4x+9$	12. A	13. C	14. C	15. D
16. $-5x^2-x+7$	17. $6x^3+4x^2-15x+7$	18. C	19. A	20. 4
21. D	22. $-13-2x+12x^2$	23. A	24. $16x-2$	25. $-3x^2+x-5$