

## 觀念篇

背景知識 --- 分配律  $a(b+c)$ 

乘法公式

$$a(b+c) = ab+ac$$

■ 例題講解

---

利用分配律計算下列各式的值：

(1)  $20 \times 12.7$

(2)  $54 \times 1.3 + 46 \times 1.3$


利用分配律  $a(b+c)=ab+ac$  通常可以簡化式子的計算。例如  $20 \times (12+0.7)=240+14$  會比先算  $12+0.7$  再乘以  $20$  容易計算。

NOTE:

## 再談分配律

乘法公式

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

 分配律

$$a(b+c) = ab+ac$$

■ 例題講解

---

計算下列各式的值：

(1)  $25\frac{1}{4} \times 24\frac{2}{5}$

(2)  $39.8 \times 25.1$

以  $a(b+c)$  為基礎，可以導出更一般性的分配律形式  $(a+b)(c+d)$ ，應用的範例請參考左下角的例題。

NOTE:

## 和的平方公式

乘法公式

$$\underbrace{(a+b)}_{\text{兩數相加}}^{\text{平方}} = a^2 + 2ab + b^2$$

分配律

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

## ■ 例題練習

計算下列各式之值：

1.  $(11\frac{2}{11})^2$

2.  $197^2 + 2 \times 197 \times 3 + 9$

和的平方 $(a+b)^2$ ，就是相加後(和)的平方，用分配律展開化簡後，會等於 $a^2+2ab+b^2$ 。這個相等的關係稱為和的平方公式，左下角的例題則是如何應用公式的範例。

NOTE:

Q: 有了分配律為什麼還需要乘法公式呢?

A: 公式是經過整理後比較簡潔的形式，請試試分別用分配律與乘法公式解例題練習 1，就會了解其中的奧妙囉!

## 差的平方公式

乘法公式

$$\underbrace{(a-b)}_{\text{兩數相減}}^{\text{平方}} = a^2 - 2ab + b^2$$

和的平方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

## ■ 例題練習

計算下列各式之值：

1.  $99.9^2$

2.  $109^2 - 109 \times 18 + 9^2$

差的平方 $(a-b)^2$ ，就是相減後(差)的平方，由於減 $b$ 可以看成加 $(-b)$ ，藉由和的平方公式，化簡後會等於 $a^2-2ab+b^2$ 。因為 $-b$ 的關係，差的平方公式只有中間 $-2ab$ 的部分跟和的平方公式不同。

NOTE:

平方差公式

乘法公式

兩數分別平方

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

分配律

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

例題練習

計算下列各式之值：

1.  $(13 + \frac{1}{5})(13 - \frac{1}{5})$

2.  $(0.1 + 11)(11 - 0.1)$

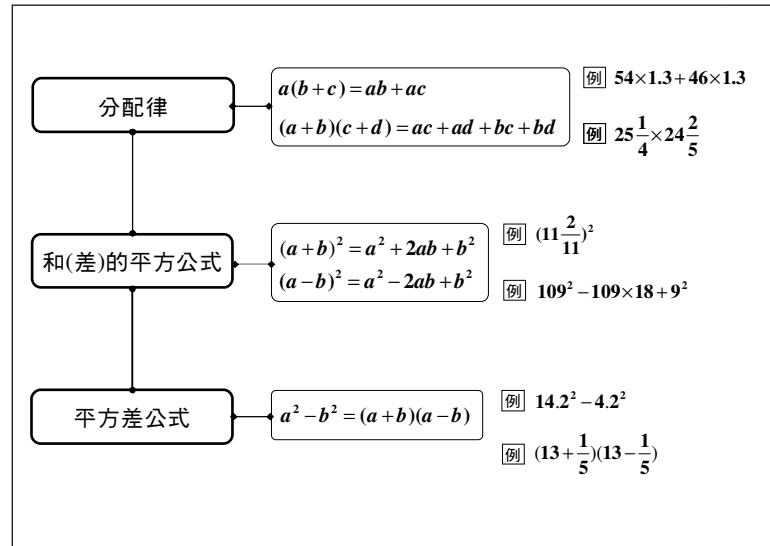
3.  $14.2^2 - 4.2^2$

平方差  $a^2 - b^2$ ，就是兩數分別平方後的差，它會等於  $(a + b)(a - b)$ 。這個公式可藉由將  $(a + b)(a - b)$  展開並化簡而得到證明，實際的運用請參考左下角的例題。

NOTE:

重點整理

乘法公式



本章只有兩個學習重點：

1. 透過分配律與式子的化簡推導乘法公式。
2. 熟習 3 個乘法公式以及它的應用。

NOTE:

補充說明 – 面積與公式(一)

乘法公式

分配律

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

平方差公式

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

如果  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  都是正數，則分配律或乘法公式就可以從面積的角度來觀察。例如，分配律的左邊是  $(a+b)(c+d)$ ，我們就可以湊出邊長為  $(a+b)$  與  $(c+d)$  的四邊形(如左上圖)，進而得到分配律的關係。同樣的技巧，平方差之間的關係就如左下圖所示。

NOTE:

補充說明 – 面積與公式(二)

乘法公式

和的平方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

差的平方公式

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

如果  $a$ 、 $b$  都是正數，則和的平方與差的平方公式就可從面積的角度來觀察。例如，和的平方公式左邊是  $(a+b)^2$ ，我們就可以湊出邊長為  $(a+b)$  的正方形(如左上圖)，進而得到和的平方公式的關係。利用同樣的技巧，差的平方公式就如左下圖所示。

NOTE:

## 題型解析篇

## 例題 1. 分配律

乘法公式 -- 題型解析

求  $2001 \times 2002 - 1999 \times 2004$  之值為何？

[基測]

## ■ 學生演練

1. 計算  $598 \times 599 - 597 \times 597 - 3 \times 597 = ?$ 2. 若  $x + \frac{1}{y} = 8$ ,  $xy + \frac{1}{xy} = 46$ , 求  $y + \frac{1}{x} = ?$ 

思路:

1.  $1999 \times 2004$  不容易直接乘開，但  $1999$  可以拆成很多  $0$  的  $2000 - 1$ 。
2. 把  $1999$ 、 $2004$  拆開後就可以利用分配律簡化計算。

NOTE:

## 例題 2. 和的平方公式

乘法公式 -- 題型解析

1. 利用乘法公式計算  $(80\frac{1}{4})^2$  之值。2. 計算  $411^2 + 411 \times 178 + 89^2 = ?$ 

## ■ 學生演練

1. 利用乘法公式計算  $50.5^2$  之值。2. 計算  $24^2 + 2 \times 76 \times 24 + 4 \times 38^2$  之值。3. 求  $90.25 \times 90.25$  的個位數字為何？

思路:

第 1 小題~

$(80\frac{1}{4})^2$  可表示成  $(80 + \frac{1}{4})^2$ ，並利用和的平方公式來簡化計算。

第 2 小題~

$411^2$  不容易直接乘開，但算式的前後部分是  $a^2 + b^2$ ，中間恰好是  $+2ab$ ，可利用和的平方公式來簡化計算。

NOTE:

## 例題 3. 差的平方公式

乘法公式 -- 題型解析

1. 利用乘法公式計算  $(79\frac{3}{4})^2$  之值。

2. 計算  $4.58^2 - 9.16 \times 0.58 + 0.58^2 = ?$

## ■ 學生演練

1. 請選出下列哪一個數最接近  $(-4.75)^2$  的值？

(A) 22 (B) 23 (C) 15 (D) 16

2. 計算  $49^2 + 100 = ?$

3. 計算  $112^2 - 25 \times 112 + 12^2 = ?$

思路:

第 1 小題~

將  $(79\frac{3}{4})^2$  表示成  $(80 - \frac{1}{4})^2$ ，可利用差的平方公式來簡化計算。

第 2 小題~

整個算式剛好是  $a^2 - 2ab + b^2$  的形式，可利用差的平方公式來簡化計算。

NOTE:

Q: 為什麼要把  $(79\frac{3}{4})^2$  表示成  $(80 - \frac{1}{4})^2$  而不是  $(79 + \frac{3}{4})^2$  呢？

A: 因為 80 比 79 容易做乘法運算。

## 例題 4. 三項和的平方

乘法公式 -- 題型解析

利用和的平方公式展開  $(a+b+c)^2$

## ■ 學生演練

計算下列各式之值：

1. 求  $38^2 + 33^2 + 29^2 + 2 \times 38 \times 33 + 2 \times 33 \times 29 + 2 \times 29 \times 38 = ?$

2.  $64^2 + 35^2 + 49^2 + 2 \times 64 \times 35 - 2 \times 64 \times 49 - 2 \times 35 \times 49$

思路:

1. 和的平方公式跟  $(a+b)^2$  有關。

2.  $b+c$  可當作同一項  $x$ ，全式變成  $(a+x)^2$ ，可利用和的平方公式來展開。

3. 展開後，只要再把  $b+c$  代回  $x$  做計算，就能完全展開式子。

NOTE:

## 例題 5. 平方公式求值

乘法公式 -- 題型解析

1. 若  $a+b=5$ ,  $ab=2$ , 求  $a^2+b^2=?$

2. 若  $a^2+b^2=51$ ,  $ab=1$ , 求  $a-b=?$

## ■ 學生演練

1. 若  $a+b=7$ ,  $a^2+b^2=9$ , 求 (1)  $ab=?$  (2)  $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=?$

2. 若  $(a+b)^2=14$ ,  $(a-b)^2=6$ , 求  $a^2+b^2=?$

思路:

- $a+b$ 、 $ab$  與  $a^2+b^2$  可以組成哪一個乘法公式? 和的平方公式。
- 將已知的數值代入公式中, 計算後可得  $a^2+b^2$  的值。
- 利用同樣的技巧可解第 2 小題。

NOTE:

## 例題 6. 平方差公式

乘法公式 -- 題型解析

若  $1999^2 - 2000^2 = 1333 \times a$ , 則  $a=?$

[基測]

## ■ 學生演練

1. 若  $(100^2 - 98^2)x = 198$ , 則  $x=?$

2. 設  $a = 100^2 - 21^2$ , 則下列哪一個是  $a$  的因數?

(A) 11 (B) 7 (C) 5 (D) 3

[基測]

3. 計算  $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})\cdots(1-\frac{1}{10^2})=?$

思路:

- 兩個平方數相減, 可聯想到平方差公式。
- 利用公式簡化算式後, 解方程式可求得  $a$  值。

NOTE:

## 例題 7. 平方差公式

乘法公式 -- 題型解析

$$(69\frac{15}{18}) \times (70\frac{3}{18}) = a + b, \text{ 若 } a \text{ 為正整數且 } 0 < b < 1, \text{ 則 } a = ?$$

## ■ 學生演練

1. 計算  $501 \times 499 - 500^2 = ?$

2. 計算  $321 \times 279 + 29^2 = ?$

3. 計算  $49 \times 51 + 24 \times 26 - 49^2 - 25^2 = ?$

思路:

1.  $(69\frac{15}{18}) \times (70\frac{3}{18})$  可分別拆開, 再用分配律來展開。
2. 拆開後剛好是  $(a-b)(a+b)$  的形式, 可利用平方差公式來簡化計算。

NOTE:

## 例題 8. 平方差公式應用

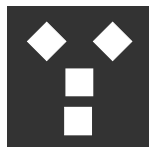
乘法公式 -- 題型解析

在一個半徑為 95 公分的大圓中, 挖掉一個半徑為 45 公分的小圓, 剩下的面積為多少平方公分?



## ■ 學生演練

有一正方形面具, 邊長 27.6 公分, 中間有四孔邊長 3.8 公分的小正方形, 請問面具的面積?



思路:

1. 剩下的面積要怎麼算? 就是大圓減小圓。
2. 且圓的面積  $= \pi r^2$ , 由此可列出面積算式。
3. 兩個平方數相減, 可利用平方差公式來簡化計算。

NOTE:



## 例題 9. 平方差公式活用

乘法公式 -- 題型解析

計算  $\frac{1}{389} + \frac{388 \times 390}{389} - 379$  之值為何？

[基測]

## ■ 學生演練

1. 計算  $\frac{101}{102} \times 103 - 102 = ?$

2. 已知  $307 \times 309 + a = 308^2$ ，則  $a = ?$

思路:

1. 若將  $388 \times 390$  拆成  $(389-1)(389+1)$ ，則可利用平方差公式來展開。
2. 展開結果可先與分母約分，簡化算式。

NOTE:

Q: 為什麼要將  $388 \times 390$  拆成  $(389-1)(389+1)$  而不拆成  $(400-12)(400-10)$  呢？

A: 因為展開之後還要除以分母 389，如果拆成  $(400-12)(400-10)$ ，後續的計算反而不容易。

從這一題我們可以學到：拆數字的時候，除了要考慮展開是否容易外，還要考慮後面的計算。

## 例題 10. 平方差公式活用

乘法公式 -- 題型解析

若  $(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1) = 25^A - 1$ ，則  $A = ?$

## ■ 學生演練

1. 若  $3 \times 5 \times (4^2+1)(4^4+1)(4^8+1) + 1 = 2^n$ ，求  $n = ?$

2. 若  $a = 9 \times 11 \times (10^2+1)(10^4+1)$ ，則  $a$  為幾位數？

思路:

1.  $(5^2-1)(5^2+1)$  可利用平方差公式來簡化計算。
2. 簡化後又出現  $(a-b)(a+b)$ ，可再利用平方差公式來化簡。
3. 兩個乘方相等，只要統一底數，就可以對應求得  $A$  值。

NOTE:

## 例題 11. 利用平方差比較大小

乘法公式 -- 題型解析

已知  $a=1995 \times 1997$ 、 $b=1994 \times 1998$ 、 $c=1996 \times 1996$ ，試比較  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的大小。

## ■ 學生演練

1. 已知  $x=498^2$ 、 $y=494 \times 502$ 、 $z=496 \times 500$ ，請比較  $x$ 、 $y$ 、 $z$  的大小。

2. 下列哪一個數最大？ [基測]

(A)  $777^2 - 27^2$  (B)  $852^2 - 48^2$  (C)  $1001^2 - 599^2$  (D)  $1006^2 - 604^2$

思路：

1.  $a$ 、 $b$ 、 $c$  的值都不容易算出。
2. 若將  $a$  拆成  $(1996-1)(1996+1)$ ，則得到  $a=1996^2-1$ ，可與  $c$  比較大小。
3. 同樣的，將  $b$  拆成與  $1996$  相關的算式，展開後可與  $a$ 、 $c$  比較大小。

NOTE:

## 例題 12. 綜合活用

乘法公式 -- 題型解析

計算  $999^2 + 1998 = ?$

## ■ 學生演練

1. 計算  $98 + 49^2 = ?$

2. 計算  $99^2 + 199 = ?$

思路：

1.  $1998$  剛好是  $999$  的  $2$  倍。
2. 提出  $999$  後，全式可簡化成  $999 \times 1001$ 。並利用平方差公式簡化計算。

另解~

1.  $999^2 + 1998$  只差一個  $+1$  就符合和的平方公式的格式。
2. 將原式修改成  $999^2 + 2 \times 999 \times 1 + 1 - 1$ ，就可利用公式來簡化計算。

NOTE:

## 例題 13. 綜合應用

乘法公式 -- 題型解析

$$\text{求 } 2011 \times 2012 \times \left( \frac{2011}{2012} - \frac{2012}{2011} \right) = ?$$

## ■ 學生演練

$$1. \text{ 計算 } \left( \frac{501}{499} - \frac{499}{501} \right) \times 499 \times 501 = ?$$

$$2. \text{ 計算 } (45^2 - 8^2) \left( \frac{1}{53} + \frac{1}{37} \right) = ?$$

思路:

1. 分數的減法不好做，可用分配律去括號。
2. 去掉括號後，整個式子變  $2011^2 - 2012^2$ ，可利用平方差公式來簡化計算。

另解~

1. 通分之後的分母變  $2011 \times 2012$ ，可先與括號外的部分約分。
2. 後面一樣可利用平方差公式來簡化計算。

NOTE:

## 例題 14. 綜合活用

乘法公式 -- 題型解析

$$\text{求 } \frac{153^2 - 147^2}{153^2 + 306 \times 147 + 147^2} = ?$$

## ■ 學生演練

$$1. \text{ 計算 } \frac{75^2 - 25^2}{107^2 - 14 \times 107 + 7^2} = ?$$

$$2. \text{ 計算 } 97 \times 99 + 4 \times 98 + 2^2 = ?$$

思路:

1. 看到  $153^2 - 147^2$ ，可想到平方差公式。
2. 看到  $153^2 + 306 \times 147 + 147^2$ ，可想到和的平方公式。
3. 可同時利用兩個乘法公式來簡化算式，接著算出答案。

NOTE:

## 實戰篇~各校段考考題

1. 展開  $(a-b)(-c+d)$  其結果應為下列何者?

- (A)  $-ac-ad+bc+bd$  (B)  $-ac+ad-bc+bd$  (C)  $ac-ad-bc+bd$  (D)  $-ac+ad+bc-bd$

[北市仁愛 98]

2.  $3007 \times 2993 = ?$

[北市弘道 100]

3. 若  $(12+35)^2 = 12^2 + 35^2 + 24 \times A$ ，則  $A = ?$

- (A) 12 (B) 35 (C) 24 (D) 70

[北市仁愛 98]

4. 計算  $(558^2 - 279^2) \times \frac{1}{279}$  之值為何?

- (A) 1 (B) 279 (C) 558 (D) 837

[高市五福 98]

5.  $\frac{375^2 - 125^2}{375^2 - 250 \times 375 + 125^2} = ?$

[北市弘道 100]

6. 設  $a = 24\frac{1}{3}$ ， $b = 25\frac{2}{3}$ ，則  $a^2 + 2ab + b^2 = ?$

- (A) 2500 (B) 2401 (C) 250 (D) 240

[北市弘道 100]

7. 若  $19\frac{3}{5} \times 39\frac{2}{5} = a + \frac{6}{25}$ ，則  $a$  之值為下列何者?

- (A) 741 (B) 756 (C) 772 (D) 780

[北市石牌 100]

8. 若  $(49\frac{1}{2})^2 = 50^2 + s$ ，則  $s$  的值為多少?

[高市正興 100]

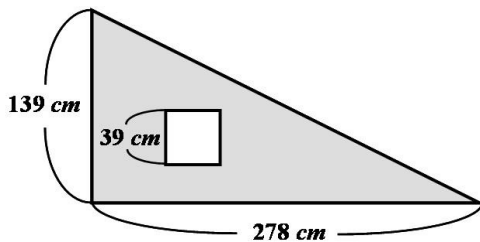
9. 若  $299.5^2 + 199.5^2 - 100.5^2 - 200.5^2 = A$ ，則  $A$  之值為多少？

[高市五福 99]

10. 已知  $a = 107^2 - 62^2$ ，試求  $a$  的標準分解式為？

[北市弘道 99]

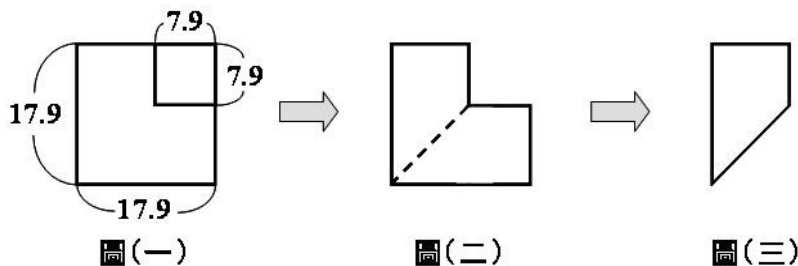
11. 下圖為兩股長分別為 139 公分及 278 公分的直角三角形，三角形的內部有一個邊長為 39 公分的正方形，試求出下圖中，灰色部分的面積。



[北市天母 100]

12. 如下圖(一)，從邊長 17.9 公分的正方形，剪去一個邊長為 7.9 公分的正方形如下圖(二)，再將剩下的圖形，沿虛線對摺如下圖(三)，則圖(三)的面積為多少平方公分？

(A) 101 (B) 202 (C) 258 (D) 129



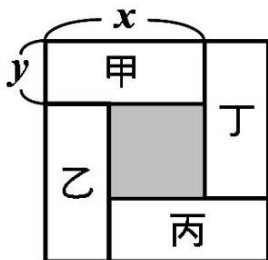
[高市正興 99]

13.  $59\frac{9}{28} \times 60\frac{19}{28} = a + b$ ，若  $a$  為正整數，且  $0 < b < 1$ ，則  $a = ?$

[高市陽明 100]

14. 如下圖，已知甲、乙、丙、丁為四個相同的長方形，且長為  $x$ ，寬為  $y$ ，試求灰色部分面積為何？

- (A)  $(x+y)(x-y)$  (B)  $(x+y)^2 - 2xy$  (C)  $x^2 - 2xy + y^2$  (D)  $xy$



[北市弘道 99]

15. 已知甲 =  $1998 \times 2010$ ，乙 =  $1999 \times 2009$ ，則下列何者正確？

- (A) 甲比乙大 11 (B) 甲比乙小 21 (C) 甲比乙小 11 (D) 甲比乙大 21

[高市正興 99]

16. 小於  $(99.8)^2$  的最大整數為多少？

- (A) 9960 (B) 9961 (C) 9962 (D) 9963

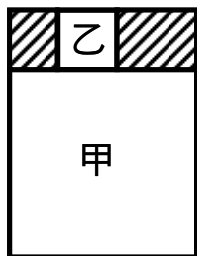
[北市石牌 99]

17. 已知  $3a + 2b = 16$ ， $ab = 6$ ，求 (1)  $9a^2 + 4b^2 = ?$  (2)  $(3a - 2b)^2 = ?$

[北市弘道 99]

18. 將邊長分別為  $(a+b)cm$  與  $(a-b)cm$  的甲、乙正方形併排置放，如圖所示。

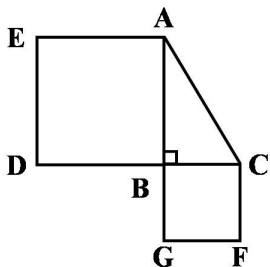
求圖中斜線部分面積為？



[高市陽明 100]

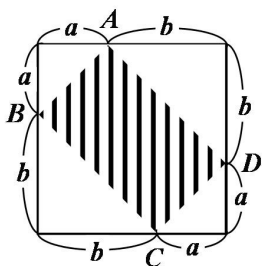
19. 如下圖所示， $\triangle ABC$  為直角三角形，其中  $\angle B=90^\circ$ ， $\overline{AB}+\overline{BC}=5$ ， $\triangle ABC$  面積為 1，

則分別以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$  為兩邊所形成的兩個正方形  $ABDE$  與  $BCFG$  的面積和為？



[北市石牌 99]

20. 求出下圖中長方形  $ABCD$  的面積=？



[北市陽明 99]

21. 對所有整數  $a$  與  $b$ ，定義新運算規則為  $a \otimes b = a \times b \times \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$ ，

例如： $2 \otimes 3 = 2 \times 3 \times \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2}\right)$ ，求  $1012 \otimes 1013 = ?$

[北市弘道 99]

22. 利用乘法公式  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，求  $1999^2 + 3998$  之值為何？

- (A) 3899999 (B) 4000001 (C) 3999999 (D) 399999

[北市南門 98]

23. 計算  $9 \times (10^2 + 1) \times 11 \times (10^4 + 1)$  的乘積是幾位數？

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10

[北市仁愛 99]

24.  $(2+1)\times(4+1)\times(16+1)(2^8+1)=4^k-1$ ，求  $k=?$

[北市石牌 99]

25. 若  $a=998^2+2\times 998\times 3+3^2$ ， $b=998\times 1002$ ， $c=1003^2-2\times 1003\times 3+3^2$ ，

則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三數大小關係為何？

(A)  $a>c>b$  (B)  $a>b>c$  (C)  $c>b>a$  (D)  $b>c>a$

[北市仁愛 97]

實戰篇解答：

1. D	2. 8999951	3. B	4. D	5. 2
6. C	7. C	8. $-49\frac{3}{4}$	9. 79200	10. $3^2\times 5\times 13^2$
11. 17800 平方公分	12. D	13. 3599	14. C	15. C
16. A	17. (1) 184 (2) 112	18. $2ab-b^2$	19. 21	20. $2ab$
21. -2025	22. C	23. B	24. 8	25. A