

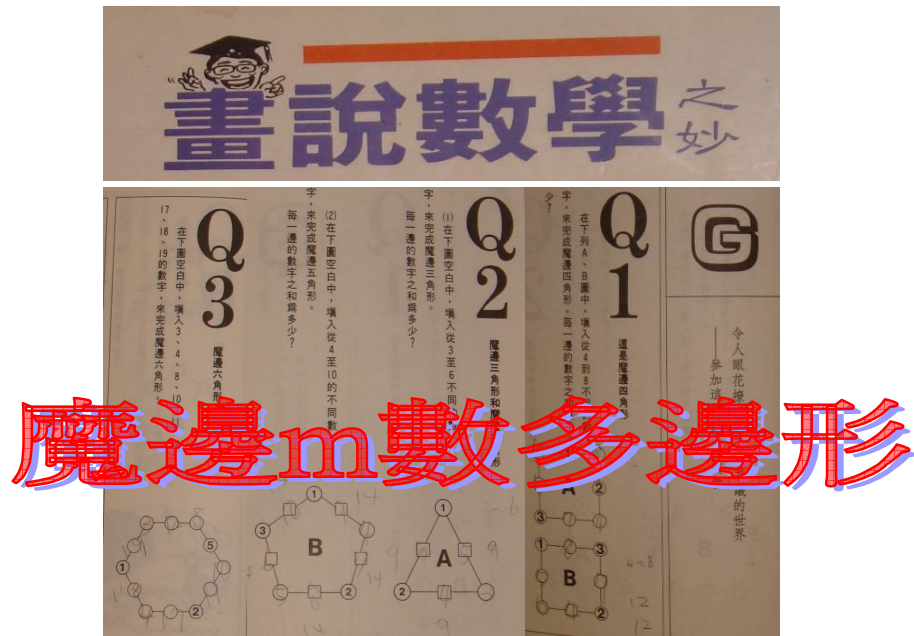
中華民國第 五十 屆中小學科學展覽會

作品說明書

類 別：數學類

科 別：數學科

組 別：國中組



作品名稱：魔邊m數多邊形

關鍵詞：魔邊三角形、魔數

編號：

## 目錄

摘要 .....	1
壹、研究動機.....	1
貳、研究目的.....	1
參、研究設備及器材 .....	1
肆、研究過程或方法 .....	1
伍、研究結果.....	23
陸、討論.....	23
柒、結論.....	24
捌、參考資料及其他.....	24
參展心得及活動照片 .....	24
附件 .....	25

## 摘要

本研究主要探討建立奇數邊( $2n-1$  個邊)和偶數邊( $2n$  個邊)魔邊多邊形的方法，我們發現並不是所有的奇數邊和偶數邊魔邊多邊形的建立方法都一樣，都可分為兩種：

- 一、奇數邊( $2n-1$  個邊)魔邊多邊形的建立方法可分為魔邊奇數奇數邊多邊形和魔邊偶數奇數邊多邊形。
- 二、偶數邊( $2n$  個邊)魔邊多邊形的建立方法可分為魔邊奇數偶數邊多邊形和魔邊偶數偶數邊多邊形。

其中，魔邊偶數奇數邊多邊形和魔邊偶數偶數邊多邊形的建立方法幾乎完全相同，只差在頂點的放置規則不一樣；而魔邊奇數偶數邊多邊形的頂點放置規則尚未尋獲。

## 壹、研究動機

無意間在瀏覽學校數學領域網頁時，看到學長姐有一件得到第一名的作品，內容是在討論偶數階魔方陣的建立，之後又在圖書館中看到一本書中數學之妙的書提到魔邊三角形、魔邊四邊形、五邊形，每邊上有三個數，且每邊的數字總和都會等於一個數--「魔數」，所以覺得好奇而研究了一下，發現它好像是一個有規律的數列組成！因為我們現在正在學等差數列、等差級數，因此我們想知道魔邊多邊形裡面的數字是怎麼排列的，看看會有什麼特別、驚人的發現！

## 貳、研究目的

- 一、探討如何建立魔邊  $m$  數多邊形。
- 二、探討魔邊多邊形的排列規則。

## 參、研究設備及器材

- 一、計算機、原子筆、螢光筆、白紙
- 二、電腦(Excel、Word、Geogebra、www.....)

## 肆、研究過程或方法

### 一、魔邊 $m$ 數多邊形的研究

在一個多邊形( $n$  邊形)上每邊放置等量( $m$  個數)的數字，且頂點上的數是由兩邊共用的，因此在求各邊總和時，各個頂點上的數都會重覆算兩次。假設此魔邊  $m$  數多邊形是由一個  $1,2,3,4,\dots,n(m-1)$  的規律數列所組成的，利用現在所學的等差級數可求得總和，但因為頂點需重覆算，所以必須討論各種組合方式。

首先就每邊 3 數的各種魔邊多邊形的全部數字總和以及可能的魔數（各邊的數字總和）範圍做討論，其結果如下表 1：

表 1 魔邊 3 數多邊形的全部數字總和及魔數範圍

N 邊形	數字總量	全部數字總和	頂點和範圍	總和範圍	魔數範圍 (各邊數字總和)
3	6	21	6 ~ 15	27 ~ 36	9 ~ 12
4	8	36	10 ~ 26	46 ~ 62	11.5 ~ 15.5
5	10	55	15 ~ 40	70 ~ 95	14 ~ 19
6	12	78	21 ~ 57	99 ~ 135	16.5 ~ 22.5
7	14	105	28 ~ 77	133 ~ 182	19 ~ 26
8	16	136	36 ~ 100	172 ~ 236	21.5 ~ 29.5
:	:	:	:	:	:

由上表可知，偶數邊的多邊形其魔數的開端不是整數，因此在組合上變化會較多，所以本研究先討論奇數邊的多邊形，之後再討論偶數邊的多邊形。

## 二、奇數邊之魔邊 m 數多邊形

### (一)魔邊 m 數三角形的研究

此部分將針對每邊個數不相等的三角形，試圖建立起這些魔邊三角形，假設每邊有 m 個數，則整個三角形的數字總量為  $3(m-1)$  個，因此數字總和為  $1+2+3+\dots+3(m-1)=\frac{(3m-2)(3m-3)}{2}$ ，而因為頂點的數字會重覆計算，因此頂點和的範圍由  $1+2+3\sim(3m-5)+(3m-4)+(3m-3)$ ，以此即可算出總和的範圍，再將總和除以邊數 3 即可得到魔數範圍，以下將各部分內容列出，如表 2 所示：

表 2 魔邊 m 數三角形的全部數字總和及魔數範圍

每邊個數	數字總量	全部數字總和	頂點和範圍	總和範圍	魔數範圍 (各邊數字總和)
3	6	21	6 ~ 15	27 ~ 36	9 ~ 12
4	9	45	6 ~ 24	51 ~ 69	17 ~ 23
5	12	78	6 ~ 33	84 ~ 111	28 ~ 37
6	15	120	6 ~ 42	126 ~ 162	42 ~ 54
7	18	171	6 ~ 51	177 ~ 222	59 ~ 74
8	21	231	6 ~ 60	237 ~ 261	79 ~ 87
:	:	:	:	:	:

我們希望能找出每種魔邊 m 數三角形的一種組合，因此我們都從最小的魔數開始，並試圖找出其建立的規則。

### 1. 魔邊 3 數三角形

由表 2 我們可知其最小的魔數為 9，也就是各邊 3 數之和為 9，因此頂點放置的數字為 1、2、3，且因為只有三個頂點，不論是順時針或逆時針排列，都是屬於相同的排列方式，所以我們先將 1、2、3 按順時針排列，再將 4、5、6 填入使得每邊和為 9，其排列結果如圖 1-1：

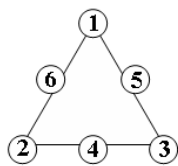


圖 1-1

$$\begin{aligned} \underline{1+2} &= 3 \rightarrow 9 = 3 + \underline{6} \\ \underline{2+3} &= 5 \rightarrow 9 = 5 + \underline{4} \\ \underline{3+1} &= 4 \rightarrow 9 = 4 + \underline{5} \end{aligned}$$

### 2. 魔邊 4 數三角形

由表 2 我們可知其最小的魔數為 17，也就是各邊 4 數之和為 17，我們先將 1、2、3 按順時針排列，再將 4~9 填入使得每邊和為 17，其排列結果如圖 1-2：

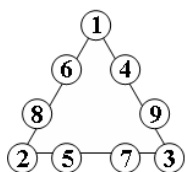
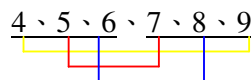


圖 1-2

$$\begin{aligned} 1+2 &= 3 \rightarrow 17 = \underline{3} + \underline{14} = \underline{1+2} + \underline{6+8} \\ 2+3 &= 5 \rightarrow 17 = \underline{5} + \underline{12} = \underline{2+3} + \underline{5+7} \\ 3+1 &= 4 \rightarrow 17 = \underline{4} + \underline{13} = \underline{1+3} + \underline{4+9} \end{aligned}$$

將 4~9 依序每三個數一組，共分成兩組再配對。



### 3. 魔邊 5 數三角形

由表 2 我們可知其最小的魔數為 28，也就是各邊 5 數之和為 28，我們先將 1、2、3 按順時針排列，再將 4~12 填入使得每邊和為 28，其排列結果如圖 1-3：

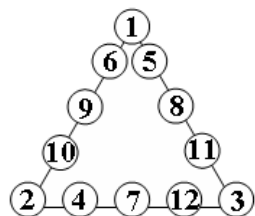
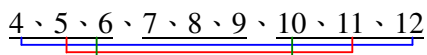


圖 1-3

$$\begin{aligned} 1+2 &= 3 \rightarrow 28 = \underline{3} + \underline{9} + \underline{16} = \underline{1+2} + \underline{9} + \underline{6+10} \\ 2+3 &= 5 \rightarrow 28 = \underline{5} + \underline{7} + \underline{16} = \underline{2+3} + \underline{7} + \underline{4+12} \\ 3+1 &= 4 \rightarrow 28 = \underline{4} + \underline{8} + \underline{16} = \underline{1+3} + \underline{8} + \underline{5+11} \end{aligned}$$

將 4~12 依序每三個數一組，共分成三組，先將最中間一組(7、8、9)分配至各邊，使得各邊和皆相同，剩餘大小配成和相同，即可任意填入各邊。



### 4. 魔邊 6 數三角形

由表 2 我們可知其最小的魔數為 42，也就是各邊 6 數之和為 42，我們先將 1、2、3 按順時針排列，再將 4~15 填入使得每邊和為 42，其排列結果如圖 1-4：

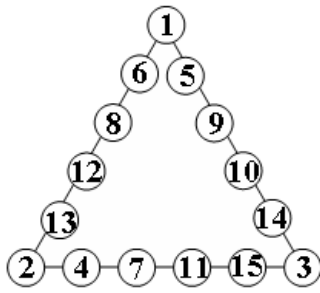


圖 1-4

### 5 魔邊 7 數三角形

由表 2 我們可知其最小的魔數為 59，也就是各邊 7 數之和為 59，我們先將 1、2、3 按順時針排列，再將 4 ~ 18 填入使得每邊和為 59，其排列結果如圖 1-5：

$$1+2=3 \rightarrow 59 = \underline{3} + \underline{12} + \underline{22 \times 2} = \underline{1+2} + \underline{12} + \underline{6+16} + \underline{9+13}$$

$$2+3=5 \rightarrow 59 = \underline{5} + \underline{10} + \underline{22 \times 2} = \underline{2+3} + \underline{10} + \underline{4+18} + \underline{7+15}$$

$$3+1=4 \rightarrow 59 = \underline{4} + \underline{11} + \underline{22 \times 2} = \underline{1+3} + \underline{11} + \underline{5+17} + \underline{8+14}$$

將 4 ~ 18 依序每三個數一組，共分成五組，先將最中間一組 (10、11、12) 分配至各邊，使得各邊和皆相同，剩餘大小配成和相同，即可任意填入各邊。

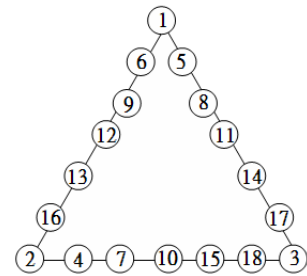
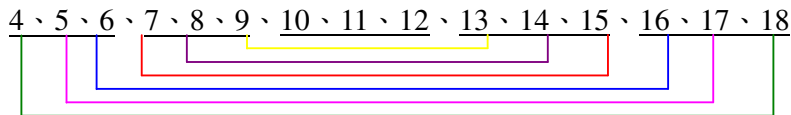


圖 1-5



### 6. 魔邊 8 數三角形

由表 2 我們可知其最小的魔數為 79，也就是各邊 8 數之和為 79，我們先將 1、2、3 按順時針排列，再將 4 ~ 21 填入使得每邊和為 79，其排列結果如圖 1-6：

$$1+2=3 \rightarrow 79 = \underline{3} + \underline{25 \times 2} + \underline{26} = \underline{1+2} + \underline{6+19} + \underline{9+16} + \underline{11+15}$$

$$2+3=5 \rightarrow 79 = \underline{5} + \underline{25 \times 2} + \underline{24} = \underline{2+3} + \underline{4+21} + \underline{7+18} + \underline{10+14}$$

$$3+1=4 \rightarrow 79 = \underline{4} + \underline{25 \times 2} + \underline{25} = \underline{1+3} + \underline{5+20} + \underline{8+17} + \underline{12+13}$$

將 4 ~ 18 依序每三個數一組，共分成五組，先將最中間一組 (10、11、12) 分配至各邊，使得各邊和皆相同，剩餘大小配成和相同，即可任意填入各邊。

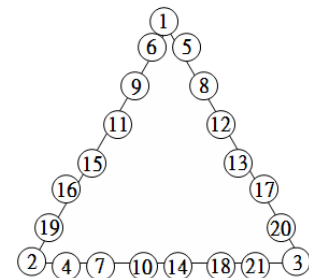
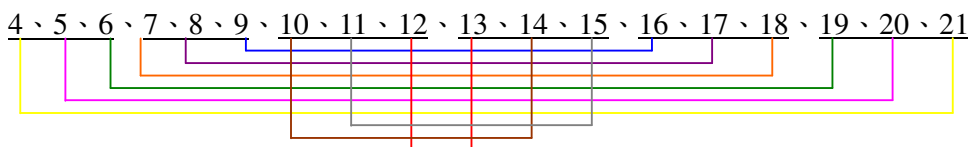


圖 1-6



### 7. 小結

由以上研究可得知，魔邊  $m$  數三角形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表 3 所示：

表 3 魔邊 m 數三角形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數三角形	魔邊偶數三角形
建立方式	(1) 先將三頂點填入 1、2、3，此時每邊和為 $1+2=3$ 、 $2+3=5$ 、 $3+1=4$ 。 (2) 將剩餘數依序每三數一組，可分成奇數組。 (3) 將最中間一組數依(1)中的已知和配對，3 配最大數，4 配次大數，5 配最小數，此時各邊和都會相等。 (4) 剩餘偶數組再依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，即可完成。	(1) 先將三頂點填入 1、2、3，此時每邊和為 $1+2=3$ 、 $2+3=5$ 、 $3+1=4$ 。 (2) 將剩餘數依序每三數一組，可分成偶數組。 (3) 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。 (4) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。

### (三)魔邊 m 數五邊形的研究

此部分將針對每邊個數不相等的五邊形，試圖建立出這些魔邊五邊形，假設每邊有 m 個數，則整個五邊形的數字總量為  $5(m-1)$  個，因此數字總和為  $1+2+3+\dots+5(m-1)=\frac{(5m-4)(5m-5)}{2}$ ，而因為頂點的數字會重覆計算，因此頂點和的範圍由  $1+2+3+4+5\sim(5m-1)+(5m-2)+(5m-3)+(5m-4)+(5m-5)$ ，以此即可算出總和的範圍，再將總和除以邊數 5 即可得到魔數範圍，以下將各部分內容列出，如表 4 所示：

表 4 魔邊 m 數五邊形的全部數字總和及魔數範圍

每邊個數	數字總量	全部數字總和	頂點和範圍	總和範圍	魔數範圍 (各邊數字總和)
3	10	55	15 ~ 40	70 ~ 95	14 ~ 19
4	15	120	15 ~ 65	135 ~ 185	27 ~ 37
5	20	210	15 ~ 90	225 ~ 300	45 ~ 60
6	25	325	15 ~ 115	340 ~ 440	68 ~ 88
7	30	465	15 ~ 140	480 ~ 605	96 ~ 121
8	35	594	15 ~ 165	645 ~ 795	129 ~ 159
:	:	:	:	:	:

我們希望能找出每種魔邊 m 數五邊形的一種組合，因此我們都從最小的魔數開始，並試圖找出其建立的規則。

### 1. 魔邊 3 數五邊形

由表 4 我們可知其最小的魔數為 14，也就是各邊 3 數之和為 14，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5，我們先將五個頂點的順序先排出，再填入剩餘數，以下及就各頂點的排列方式和其建立方式做討論：

(1) 將 1~5 依序填入各頂點，則此時各邊和與其填入數如下圖 2-1：

$$1+2=3 \rightarrow 14=3+\boxed{11} \text{ (1 ~ 10 內無此數)}$$

$$2+3=5 \rightarrow 14=5+9$$

$$3+4=7 \rightarrow 14=7+7$$

$$4+\boxed{5}=9 \rightarrow 14=9+\boxed{5} \text{ (5 重複出現兩次)}$$

$$5+1=6 \rightarrow 14=6+8$$

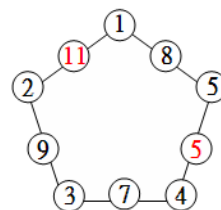


圖 2-1

由上我們可知此種填法會使得 5 兩數會重複出現兩次，且 11 不在範圍內亦出現，所以此種作法失敗。

(2) 將 1~5 依序且間隔一頂點再填入各頂點，則此時各邊和與其填入數如下圖

2-2，由圖可知此種頂點建立方法是可行的。

$$1+4=5 \rightarrow 14=5+9$$

$$4+2=6 \rightarrow 14=6+8$$

$$2+5=7 \rightarrow 14=7+7$$

$$5+3=8 \rightarrow 14=8+6$$

$$3+1=4 \rightarrow 14=4+10$$

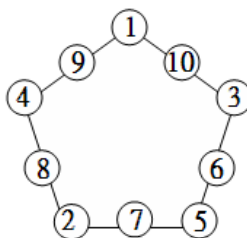


圖 2-2

### 2. 魔邊 4 數五邊形

由表 4 我們可知其最小的魔數為 27，也就是各邊 4 數之和為 27，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5，我們先將五個頂點的順序先排出，再填入剩餘數，依照上述的討論，我們直接採取第二種做法來排列頂點的位置，再將 6~15 填入使得每邊和為 27，其排列結果如圖 2-3：

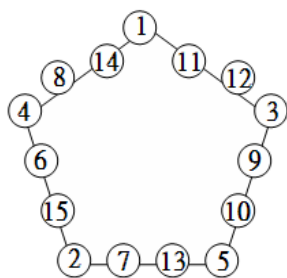


圖 2-3

$$1+4=5 \rightarrow 27=\underline{5}+\underline{22}=\underline{1+4}+\underline{8+14}$$

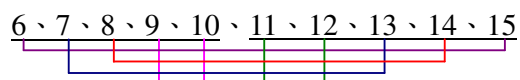
$$4+2=6 \rightarrow 27=\underline{6}+\underline{21}=\underline{4+2}+\underline{6+15}$$

$$2+5=7 \rightarrow 27=\underline{7}+\underline{20}=\underline{2+5}+\underline{7+13}$$

$$5+3=8 \rightarrow 27=\underline{8}+\underline{19}=\underline{5+3}+\underline{9+10}$$

$$3+1=4 \rightarrow 27=\underline{4}+\underline{23}=\underline{3+1}+\underline{11+12}$$

將 6~15 依序每五個數一組，共分成兩組再配對。



### 3. 魔邊 5 數五邊形

由表 4 我們可知其最小的魔數為 45，也就是各邊 5 數之和為 45，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5，我們先將五個頂點按照(二)的方式排出，再將 6~20 填入使得每邊和為 45，其排列結果如圖 2-4：



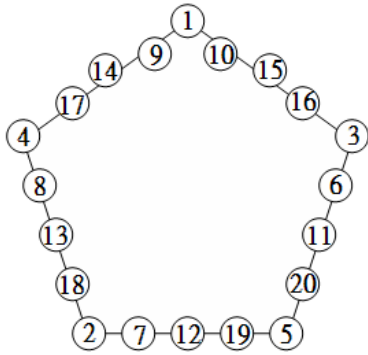
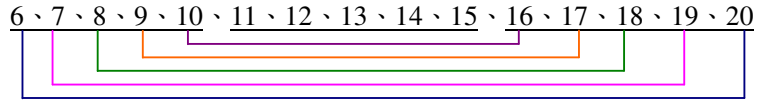


圖 2-4

$$\begin{aligned}
 1+4=5 &\rightarrow 45=\underline{5}+14+\underline{26}=\underline{1+4}+14+\underline{9+17} \\
 4+2=6 &\rightarrow 45=\underline{6}+13+\underline{26}=\underline{4+2}+13+\underline{8+18} \\
 2+5=7 &\rightarrow 45=\underline{7}+12+\underline{26}=\underline{2+5}+12+\underline{7+19} \\
 5+3=8 &\rightarrow 45=\underline{8}+11+\underline{26}=\underline{5+3}+11+\underline{6+20} \\
 3+1=4 &\rightarrow 45=\underline{4}+15+\underline{26}=\underline{3+1}+15+\underline{10+16}
 \end{aligned}$$

將 6 ~ 20 依序每五個數一組，共分成三組，先將最中間一組(11~15)分配至各邊，使得各邊和皆相同，剩餘大小配成和相同，即可任意填入各邊。



#### 4. 魔邊 6 數五邊形

由表 4 我們可知其最小的魔數為 68，也就是各邊 6 數之和為 68，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5，我們先將五個頂點按照(二)的方式排出，再將 6 ~ 25 填入使得每邊和為 68，其排列結果如圖 2-5：

$$\begin{aligned}
 1+4=5 &\rightarrow 68=\underline{5}+31+\underline{32}=\underline{1+4}+9+\underline{22+19+13} \\
 4+2=6 &\rightarrow 68=\underline{6}+31+\underline{31}=\underline{4+2}+8+\underline{23+20+11} \\
 2+5=7 &\rightarrow 68=\underline{7}+31+\underline{30}=\underline{2+5}+7+\underline{24+18+12} \\
 5+3=8 &\rightarrow 68=\underline{8}+31+\underline{29}=\underline{5+3}+6+\underline{25+14+15} \\
 3+1=4 &\rightarrow 68=\underline{4}+31+\underline{33}=\underline{3+1}+10+\underline{21+16+17}
 \end{aligned}$$

將 6 ~ 25 依序每五個數一組，共分成四組，先將頭尾兩組大小配成和為 31，剩餘再配對成每邊總和為 42。

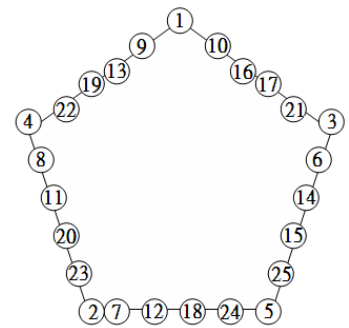
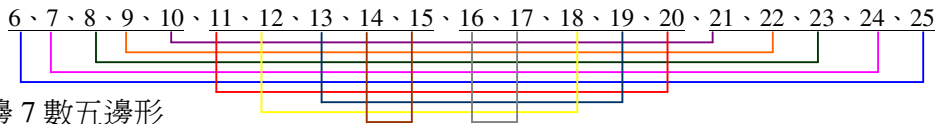


圖 2-5



#### 5. 魔邊 7 數五邊形

由表 4 我們可知其最小的魔數為 96，也就是各邊 7 數之和為 96，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5，我們先將五個頂點按照(二)的方式排出，再將 6 ~ 30 填入使得每邊和為 96，其排列結果如圖 2-6：

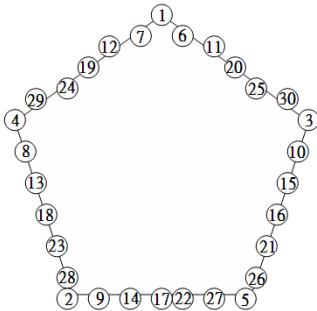


圖 2-6

$$\begin{aligned}
 1+4=5 &\rightarrow 96=\underline{5}+19+\underline{36 \times 2}=\underline{1+4}+19+\underline{9+27+14+22} \\
 4+2=6 &\rightarrow 96=\underline{6}+18+\underline{36 \times 2}=\underline{4+2}+18+\underline{8+28+13+23} \\
 2+5=7 &\rightarrow 96=\underline{7}+17+\underline{36 \times 2}=\underline{2+5}+17+\underline{7+29+12+24} \\
 5+3=8 &\rightarrow 96=\underline{8}+16+\underline{36 \times 2}=\underline{5+3}+16+\underline{6+30+11+25} \\
 3+1=4 &\rightarrow 96=\underline{4}+20+\underline{36 \times 2}=\underline{3+1}+20+\underline{10+26+15+21}
 \end{aligned}$$

將 6 ~ 30 依序每五個數一組，共分成五組，先將最中間一組(16~20)分配至各邊，使得各邊和皆相同，剩餘大小配成和相同，即可任意填入各邊。



## 6. 魔邊 8 數五邊形

由表 4 我們可知其最小的魔數為 129，也就是各邊 8 數之和為 129，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5，我們先將五個頂點按照(二)的方式排出，再將 6~35 填入使得每邊和為 129，其排列結果如圖 2-7：

$$\begin{aligned}
 1+4=5 &\rightarrow 129 = \underline{5} + \underline{41 \times 2} + \underline{42} = \underline{1+4} + \underline{9+32} + \underline{14+27} + \underline{24+18} \\
 4+2=6 &\rightarrow 129 = \underline{6} + \underline{41 \times 2} + \underline{41} = \underline{4+2} + \underline{8+33} + \underline{13+28} + \underline{25+16} \\
 2+5=7 &\rightarrow 129 = \underline{7} + \underline{41 \times 2} + \underline{40} = \underline{2+5} + \underline{7+34} + \underline{12+29} + \underline{23+17} \\
 5+3=8 &\rightarrow 129 = \underline{8} + \underline{41 \times 2} + \underline{39} = \underline{5+3} + \underline{6+35} + \underline{11+30} + \underline{19+20} \\
 3+1=4 &\rightarrow 129 = \underline{4} + \underline{41 \times 2} + \underline{43} = \underline{3+1} + \underline{10+31} + \underline{15+26} + \underline{21+22}
 \end{aligned}$$

將 6~35 依序每五個數一組，共分成六組，先將頭尾四組大小配成和為 41，剩餘再配對成每邊總和為 42。

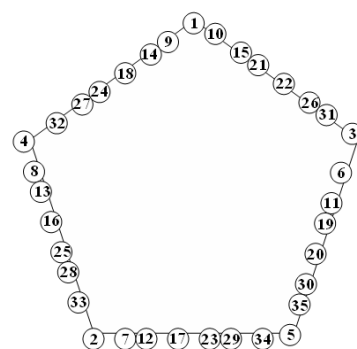
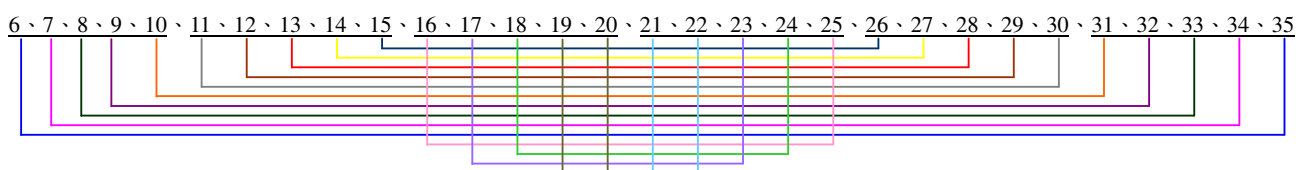


圖 2-7



## 7. 小結

由以上研究可得知，魔邊  $m$  數五邊形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表 5 所示：

表 5 魔邊  $m$  數五邊形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數五邊形	魔邊偶數五邊形
建立方式	<ol style="list-style-type: none"> <li>先將五頂點間隔一數依序填入 1~5，此時每邊和為 <math>1+4=5</math>、<math>4+2=6</math>、<math>2+5=7</math>、<math>5+3=8</math>、<math>3+1=4</math>。</li> <li>將剩餘數依序每五數一組，可分成奇數組。</li> <li>將最中間一組數依(1)中的已知和配對，依照大數配小數的原則，使得各邊和都會相等。</li> <li>剩餘數再依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，即可完成。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>先將五頂點間隔一數依序填入 1~5，此時每邊和為 <math>1+4=5</math>、<math>4+2=6</math>、<math>2+5=7</math>、<math>5+3=8</math>、<math>3+1=4</math>。</li> <li>將剩餘數依序每五數一組，可分成偶數組。</li> <li>將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。</li> <li>依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。</li> </ol>

## (四)魔邊 $m$ 數七邊形的研究

此部分將針對每邊個數不相等的七邊形，試圖建立出這些魔邊七邊形，假設每邊有  $m$  個數，則整個七邊形的數字總量為  $7(m-1)$  個，因此數字總和為  $1+2+3+\dots+7(m-1)=$

$$\frac{(7m-6)(7m-7)}{2}$$

，而因為頂點的數字會重覆計算，因此頂點和的範圍由  $1+2+\dots+7 \sim (7m-1)$

$+(7m-2)+\cdots+(7m-6)+(7m-7)$ ，以此即可算出總和的範圍，再將總和除以邊數 7 即可得到魔數範圍，以下將各部分內容列出，如表 6 所示：

表 6 魔邊  $m$  數七邊形的全部數字總和及魔數範圍

每邊個數	數字總量	全部數字總和	頂點和範圍	總和範圍	魔數範圍 (各邊數字總和)
3	14	105	28 ~ 77	133 ~ 182	19 ~ 26
4	21	231	28 ~ 126	259 ~ 357	37 ~ 51
5	28	406	28 ~ 175	434 ~ 581	62 ~ 83
6	35	630	28 ~ 224	658 ~ 854	94 ~ 122
7	42	903	28 ~ 273	931 ~ 1176	133 ~ 168
8	49	1225	28 ~ 322	1253 ~ 1547	179 ~ 221
:	:	:	:	:	:

我們希望能找出每種魔邊  $m$  數七邊形的一種組合，因此我們都從最小的魔數開始，並試圖找出其建立的規則。

### 1. 魔邊 3 數七邊形

由表 6 我們可知其最小的魔數為 19，也就是各邊 3 數之和為 19，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7，我們先將七個頂點的順序先按照魔邊五邊形的方式填入，再將 8 ~ 14 填入使得每邊和為 19，其排列結果如圖 3-1：

$$\begin{aligned}
 1+5=6 &\rightarrow 19=6+13 \\
 5+2=7 &\rightarrow 19=7+12 \\
 2+6=8 &\rightarrow 19=8+11 \\
 6+3=9 &\rightarrow 19=9+10 \\
 3+7=10 &\rightarrow 19=10+9 \\
 7+4=11 &\rightarrow 19=11+8 \\
 4+1=5 &\rightarrow 19=5+14
 \end{aligned}$$

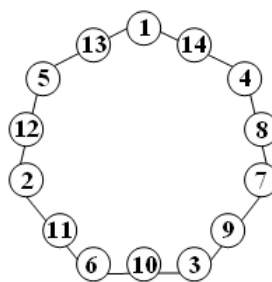


圖 3-1

### 2. 魔邊 4 數七邊形

由表 6 我們可知其最小的魔數為 37，也就是各邊 4 數之和為 37，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7，我們先將七個頂點的順序先按照魔邊五邊形的方式填入，再將 8 ~ 21 填入使得每邊和為 37，其排列結果如圖 3-2：

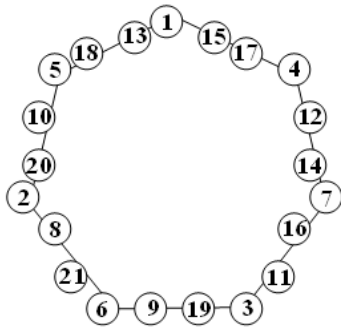
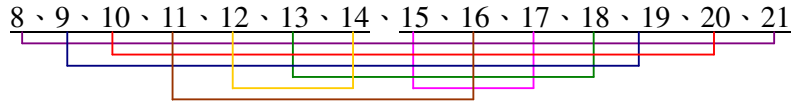


圖 3-2

$1+5=6 \rightarrow 37 = \underline{6} + \underline{31} = \underline{1+5} + \underline{13+18}$   
 $5+2=7 \rightarrow 37 = \underline{7} + \underline{30} = \underline{5+2} + \underline{10+20}$   
 $2+6=8 \rightarrow 37 = \underline{8} + \underline{29} = \underline{2+6} + \underline{8+21}$   
 $6+3=9 \rightarrow 37 = \underline{9} + \underline{28} = \underline{6+3} + \underline{9+19}$   
 $3+7=10 \rightarrow 37 = \underline{10} + \underline{27} = \underline{3+7} + \underline{11+16}$   
 $7+4=11 \rightarrow 37 = \underline{11} + \underline{26} = \underline{7+4} + \underline{12+14}$   
 $4+1=5 \rightarrow 37 = \underline{5} + \underline{32} = \underline{4+1} + \underline{15+17}$   
 將 8 ~ 21 依序每七個數一組，共分成兩組再配對。



### 3. 魔邊 5 數七邊形

由表 6 我們可知其最小的魔數為 62，也就是各邊 5 數之和為 62，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7，我們先將七個頂點的順序先按照魔邊五邊形的方式填入，再將 8 ~ 28 填入使得每邊和為 62，其排列結果如圖 3-3：

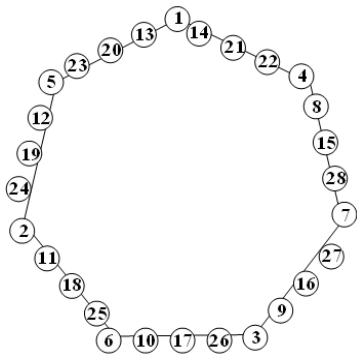
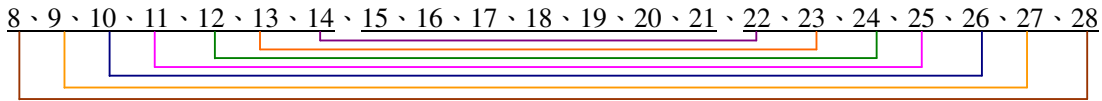


圖 3-3

$1+5=6 \rightarrow 62 = \underline{6} + \underline{20} + \underline{36} = \underline{1+5} + \underline{20} + \underline{13+23}$   
 $5+2=7 \rightarrow 62 = \underline{7} + \underline{19} + \underline{36} = \underline{5+2} + \underline{19} + \underline{12+24}$   
 $2+6=8 \rightarrow 62 = \underline{8} + \underline{18} + \underline{36} = \underline{2+6} + \underline{18} + \underline{11+25}$   
 $6+3=9 \rightarrow 62 = \underline{9} + \underline{17} + \underline{36} = \underline{6+3} + \underline{17} + \underline{10+26}$   
 $3+7=10 \rightarrow 62 = \underline{10} + \underline{16} + \underline{36} = \underline{3+7} + \underline{16} + \underline{9+27}$   
 $7+4=11 \rightarrow 62 = \underline{11} + \underline{15} + \underline{36} = \underline{7+4} + \underline{15} + \underline{8+28}$   
 $4+1=5 \rightarrow 62 = \underline{5} + \underline{21} + \underline{36} = \underline{4+1} + \underline{21} + \underline{14+22}$   
 將 8 ~ 28 依序每七個數一組，共分成三組，先將最中間一組(15~21)分配至各邊，使得各邊和皆相同，剩餘大小配成和相同，即可任意填入各邊。



### 4. 魔邊 6 數七邊形

由表 6 我們可知其最小的魔數為 94，也就是各邊 6 數之和為 94，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7，我們先將七個頂點的順序先按照魔邊五邊形的方式填入，再將 8 ~ 35 填入使得每邊和為 94，其排列結果如圖 3-4：

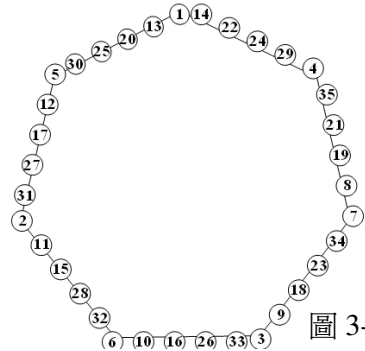
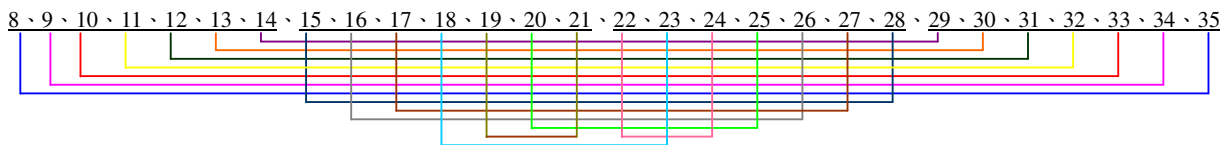


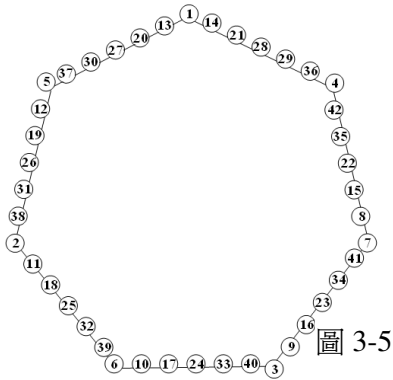
圖 3-4

$1+5=6 \rightarrow 94 = \underline{6} + \underline{43} + \underline{45} = \underline{1+5} + \underline{13+30} + \underline{20+25}$   
 $5+2=7 \rightarrow 94 = \underline{7} + \underline{43} + \underline{44} = \underline{5+2} + \underline{12+31} + \underline{17+27}$   
 $2+6=8 \rightarrow 94 = \underline{8} + \underline{43} + \underline{43} = \underline{2+6} + \underline{11+32} + \underline{15+28}$   
 $6+3=9 \rightarrow 94 = \underline{9} + \underline{43} + \underline{42} = \underline{6+3} + \underline{10+33} + \underline{16+26}$   
 $3+7=10 \rightarrow 94 = \underline{10} + \underline{43} + \underline{41} = \underline{3+7} + \underline{9+34} + \underline{18+23}$   
 $7+4=11 \rightarrow 94 = \underline{11} + \underline{43} + \underline{40} = \underline{7+4} + \underline{8+35} + \underline{19+21}$   
 $4+1=5 \rightarrow 94 = \underline{5} + \underline{43} + \underline{46} = \underline{4+1} + \underline{14+29} + \underline{22+24}$   
 將 8 ~ 35 依序每七個數一組，共分成四組，先將頭尾兩組大小配成和為 43，剩餘再配對成每邊總和為 94。



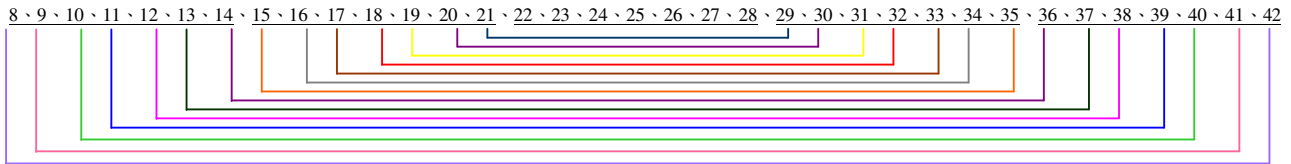
### 5. 魔邊 7 數七邊形

由表 6 我們可知其最小的魔數為 133，也就是各邊 7 數之和為 133，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7，我們先將七個頂點的順序先按照魔邊五邊形的方式填入，再將 8 ~ 42 填入使得每邊和為 133，其排列結果如圖 3-5：



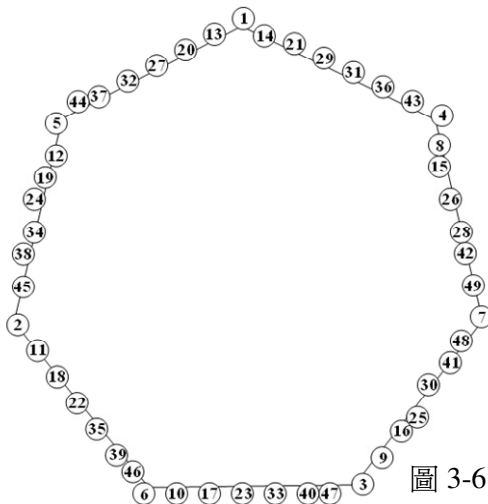
$$\begin{aligned}
 1+5=6 &\rightarrow 133=\underline{6}+27+\underline{50\times 2}=\underline{1+5}+27+\underline{13+37}+\underline{20+30} \\
 5+2=7 &\rightarrow 133=\underline{7}+26+\underline{50\times 2}=\underline{5+2}+26+\underline{12+38}+\underline{19+31} \\
 2+6=8 &\rightarrow 133=\underline{8}+25+\underline{50\times 2}=\underline{2+6}+25+\underline{11+39}+\underline{18+32} \\
 6+3=9 &\rightarrow 133=\underline{9}+24+\underline{50\times 2}=\underline{6+3}+24+\underline{10+40}+\underline{17+33} \\
 3+7=10 &\rightarrow 133=\underline{10}+23+\underline{50\times 2}=\underline{3+7}+23+\underline{9+41}+\underline{16+34} \\
 7+4=11 &\rightarrow 133=\underline{11}+22+\underline{50\times 2}=\underline{7+4}+22+\underline{8+42}+\underline{15+35} \\
 4+1=5 &\rightarrow 133=\underline{5}+28+\underline{50\times 2}=\underline{4+1}+28+\underline{14+36}+\underline{21+29}
 \end{aligned}$$

將 8 ~ 42 依序每七個數一組，共分成五組，先將最中間一組 (22~28) 分配至各邊，使得各邊和皆相同，剩餘大小配成和相同，即可任意填入各邊。



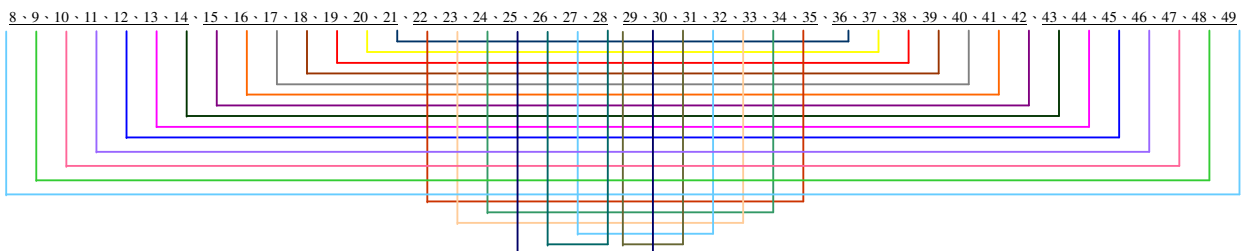
### 6. 魔邊 8 數七邊形

由表 6 我們可知其最小的魔數為 179，也就是各邊 7 數之和為 179，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7，我們先將七個頂點的順序先按照魔邊五邊形的方式填入，再將 8 ~ 49 填入使得每邊和為 179，其排列結果如圖 3-6：



$$\begin{aligned}
 1+5=6 &\rightarrow 179=\underline{6}+57\times 2+\underline{59}=\underline{1+5}+13+\underline{44}+\underline{20+37}+\underline{27+32} \\
 5+2=7 &\rightarrow 179=\underline{7}+57\times 2+\underline{58}=\underline{5+2}+12+\underline{45}+\underline{19+38}+\underline{24+34} \\
 2+6=8 &\rightarrow 179=\underline{8}+57\times 2+\underline{57}=\underline{2+6}+11+\underline{46}+\underline{18+39}+\underline{22+35} \\
 6+3=9 &\rightarrow 179=\underline{9}+57\times 2+\underline{56}=\underline{6+3}+10+\underline{47}+\underline{17+40}+\underline{23+33} \\
 3+7=10 &\rightarrow 179=\underline{10}+57\times 2+\underline{55}=\underline{3+7}+9+\underline{48}+\underline{16+41}+\underline{25+30} \\
 7+4=11 &\rightarrow 179=\underline{11}+57\times 2+\underline{54}=\underline{7+4}+8+\underline{49}+\underline{15+42}+\underline{26+28} \\
 4+1=5 &\rightarrow 179=\underline{5}+57\times 2+\underline{60}=\underline{4+1}+14+\underline{43}+\underline{21+36}+\underline{29+31}
 \end{aligned}$$

將 8 ~ 49 依序每五個數一組，共分成六組，先將頭尾四組大小配成和為 57，剩餘再配對成每邊總和為 179。



## 7. 小結

由以上研究可得知，魔邊  $m$  數七邊形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表

7 所示：

表 7 魔邊  $m$  數七邊形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數五邊形	魔邊偶數五邊形
建立方式	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將七頂點間隔一數依序填入 1~7，此時每邊和為 <math>1+5=6</math>、<math>5+2=7</math>、<math>2+6=8</math>、<math>6+3=9</math>、<math>3+7=10</math>、<math>7+4=11</math>、<math>4+1=5</math>。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每七數一組，可分成奇數組。</li> <li>(3) 將最中間一組數依(1)中的已知和配對，依照大數配小數的原則，使得各邊和都會相等。</li> <li>(4) 剩餘數再依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，即可完成。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將七頂點間隔一數依序填入 1~7，此時每邊和為 <math>1+5=6</math>、<math>5+2=7</math>、<math>2+6=8</math>、<math>6+3=9</math>、<math>3+7=10</math>、<math>7+4=11</math>、<math>4+1=5</math>。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每七數一組，可分成偶數組。</li> <li>(3) 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。</li> <li>(4) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。</li> </ol>

### (五)結論

由以上魔邊三、五、七邊形的結論我們可以歸納得知：奇數邊的魔邊  $m$  數多邊形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表 8 所示：

表 8 魔邊  $m$  數奇數邊多邊形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數奇數邊多邊形(邊數： $2n-1$ )	魔邊偶數奇數邊多邊形(邊數： $2n-1$ )
建立方式	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將頂點位置依照<u>間隔一數</u>的原則依序填入 1~(<math>2n-1</math>)。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每(<math>2n-1</math>)個數一組，可分成奇數組。</li> <li>(3) 將最中間一組數依(1)中的已知和(每邊的兩頂點和)配對，依照大數配小數的原則，使得各邊和都會相等。</li> <li>(4) 剩餘數再依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，即可完成。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將頂點位置依照<u>間隔一數</u>的原則依序填入 1~(<math>2n-1</math>)。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每(<math>2n-1</math>)個數一組，可分成偶數組。</li> <li>(3) 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。</li> <li>(4) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。</li> </ol>

## (六)檢驗

利用上述歸納的方法隨意檢驗數個奇數邊多邊形，如附件七~十，我們發現這些建立規則皆適用。

### 三、偶數邊之魔邊 m 數多邊形

#### (一)魔邊 m 數四邊形的研究

我們先計算出各種魔數，如表 9 所示：

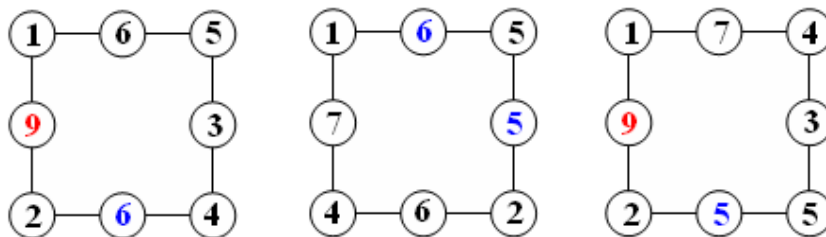
表 9 魔邊 m 數四邊形的全部數字總和及魔數範圍

每邊個數	數字總量	全部數字總和	頂點和範圍	總和範圍	魔數範圍 (各邊數字總和)
3	8	36	10 ~ 26	46 ~ 62	11.5 ~ 15.5
4	12	78	10 ~ 42	88 ~ 120	22 ~ 30
5	16	136	10 ~ 58	146 ~ 194	36.5 ~ 48.5
6	20	210	10 ~ 74	220 ~ 284	55 ~ 71
7	24	300	10 ~ 90	310 ~ 390	77.5 ~ 97.5
8	28	406	10 ~ 106	416 ~ 512	104 ~ 128
:	:	:	:	:	:

#### 1. 魔邊 3 數四邊形

由表 9 中我們可得知，其最小魔數為 11.5，非整數，所以我們找大於 11.5 的最小整數為 12，其總和為 48，頂點和為 12 其情形有兩種 1、2、4、5 和 1、2、3、6，接下來就其排列位置來討論。

(1) 頂點為 1、2、4、5，其排列方式有以下三種：



在魔邊 3 數四邊形，只能出現數字 1~8，且每個數字只能出現一次，由上可知，此三種排列方式皆不符合。

(2) 頂點為 1、2、3、6，其排列方式有以下三種：

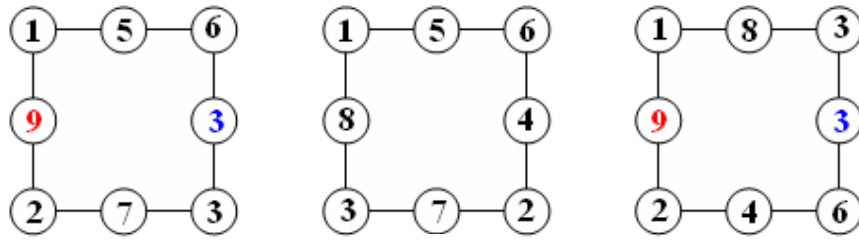


圖 4-1

由上可知，只有中間的排列方式(圖 4-1)符合，也就是將 1、2、3、6 依序按照對角線填入。

### 2. 魔邊 4 數四邊形

由表 9 中我們可得知，其最小魔數為 22，也就是各邊 4 數之和為 22，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4 依序填入，再將 5 ~ 12 填入使得每邊和為 22，其排列結果如圖 4-2：

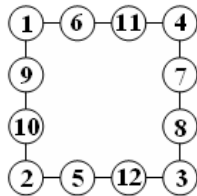
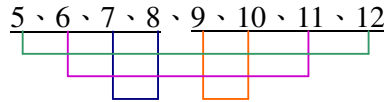


圖 4-2



### 3. 魔邊 5 數四邊形

由表 9 中我們可得知，其最小魔數為 36.5，非整數，所以我們找大於 36.5 的最小整數為 37，其總和為 148，頂點和為 12。因為要找出規律來建立這些魔邊四邊形，因此根據 1.(2)，我們將頂點採取 1、2、3、6 來排列，並依序排在對角線上，如下圖 4-3：

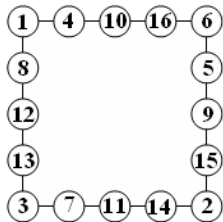
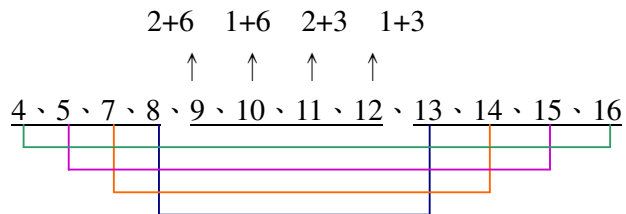


圖 4-3



### 4. 魔邊 6 數四邊形

由表 9 中我們可得知，其最小魔數為 55，也就是各邊 6 數之和為 55，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4 依序填入，再將 5 ~ 20 填入使得每邊和為 55，其排列結果如圖 4-4：



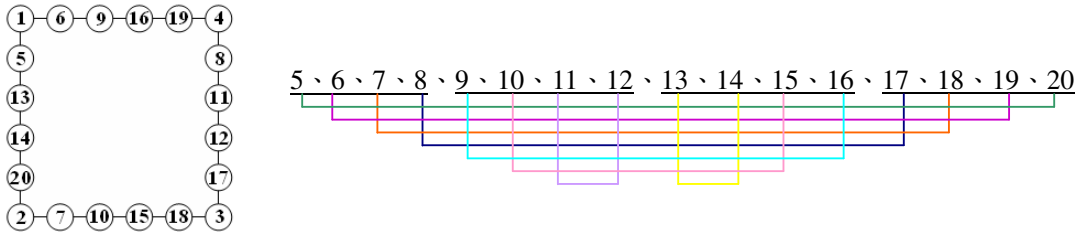


圖 4-4

### 5. 魔邊 7 數四邊形

由表 9 中我們可得知，其最小魔數為 77.5，非整數，所以我們找大於 77.5 的最小整數為 78，其總和為 312，頂點和為 12。與 3. 相同的理由，我們將頂點採取 1、2、3、6 來排列，並依序排在對角線上，如下圖 4-5：

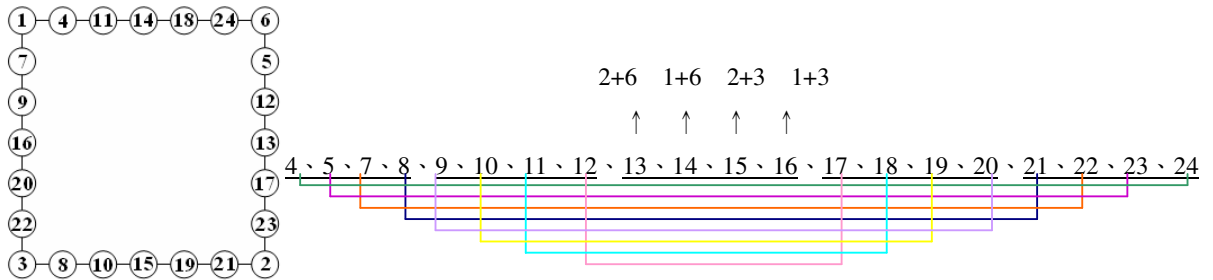


圖 4-5

### 6. 魔邊 8 數四邊形

由表 9 中我們可得知，其最小魔數為 104，也就是各邊 8 數之和為 104，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4 依序填入，再將 5 ~ 28 填入使得每邊和為 104，其排列結果如圖 4-6：

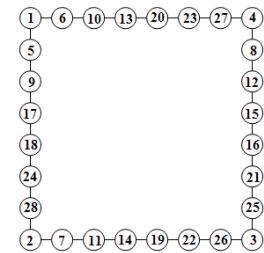
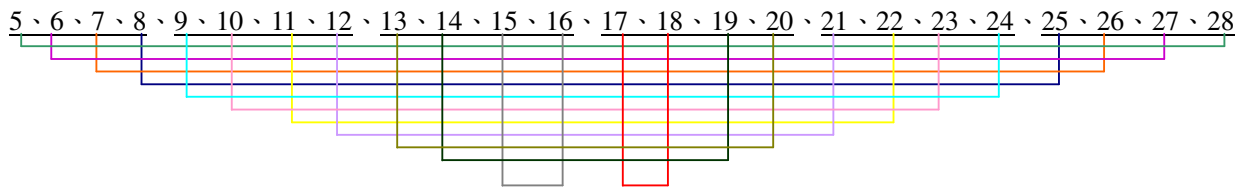


圖 4-6



### 7. 小結

由以上研究可得知，當魔數非整數時，頂點數字是不可能會出現連續數，因此討論此部分的情形會比較複雜，但只要先找到一種方式填入頂點，所有此種類型的四邊形皆可適用；當魔數為整數時，即可以連續數 1~4 依序填入各頂點，比較容易找出其組合，因此魔邊  $m$  數四邊形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表 10 所示：

表 10 魔邊 m 數四邊形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數四邊形 (最小魔數非整數)	魔邊偶數四邊形 (最小魔數為整數)
建立方式	(1) 先將 1、2、3、6 四數按對角線依序填入，此時每邊和為 $1+3=4$ 、 $3+2=5$ 、 $2+6=8$ 、 $6+1=7$ 。 (2) 將剩餘數依序每四數一組，可分成奇數組。 (3) 將最中間一組數依(1)中排定的頂點和配對，按大數配小數的原則填入各邊，此時每邊和有兩種結果。 (4) 剩餘組數再依序頭尾配成數對，再按照(3)的結果以及依照 excel 算出的魔數來填入即可。	(1) 先將 1、2、3、4 依序填入頂點 (2) 將剩餘數依序每四數一組，可分成偶數組。 (3) 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。 (4) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。

## (二)魔邊 m 數六邊形的研究

我們先計算出各種魔數，如表 11 所示：

表 11 魔邊 m 數六邊形的全部數字總和及魔數範圍

每邊個數	數字總量	全部數字總和	頂點和範圍	總和範圍	魔數範圍 (各邊數字總和)
3	12	78	21 ~ 57	99 ~ 135	16.5 ~ 22.5
4	18	171	21 ~ 93	192 ~ 264	32 ~ 44
5	24	300	21 ~ 129	321 ~ 429	53.5 ~ 71.5
6	30	465	21 ~ 165	486 ~ 630	81 ~ 105
7	36	666	21 ~ 201	687 ~ 867	114.5 ~ 145
8	42	903	21 ~ 237	924 ~ 1140	154 ~ 190
:	:	:	:	:	:

我們希望能找出每種魔邊 m 數六邊形的一種組合，因此我們都從最小的魔數開始，並試圖找出其建立的規則。

### 1. 魔邊 3 數六邊形

由表 11 中我們可得知，其最小魔數為 16.5，非整數，所以我們找大於 16.5 的最小整數為 17，其總和為 102，頂點和為 24 其情形有三種 1、2、3、5、6、7，1、2、3、4、6、8 和 1、2、3、4、5、9，爲了找出和魔邊四邊形的共同規則性，我們只討論 1、2、3、4、5、9 的排列位置，如下圖。

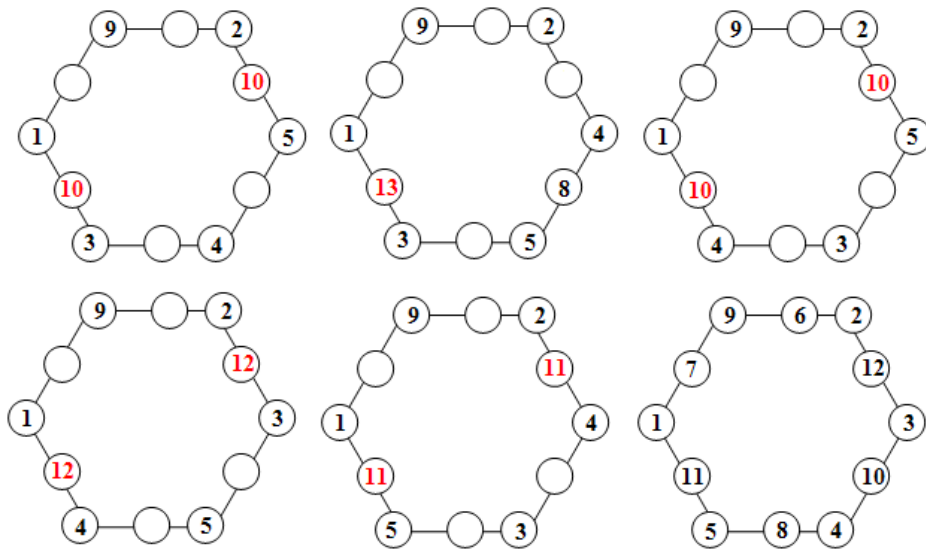


圖 5-1

由上可知，只有最後的排列方式(圖 5-1)符合。

### 2. 魔邊 4 數六邊形

由表 11 中我們可得知，其最小魔數為 32，也就是各邊 4 數之和為 32，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6 依序填入，再將 7 ~ 18 填入使得每邊和為 32，其排列結果如圖 5-2：

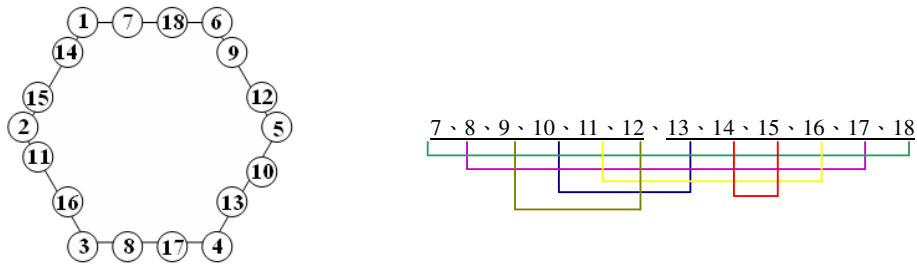


圖 5-2

### 3. 魔邊 5 數六邊形

由表 11 中我們可得知，其最小魔數為 53.5，非整數，所以我們找大於 53.5 的最小整數為 54，其總和為 324，頂點和為 24。因為要找出規律來建立這些魔邊六邊形，因此根據 1.(2)的排列方式來填入頂點位置，如下圖 5-3：

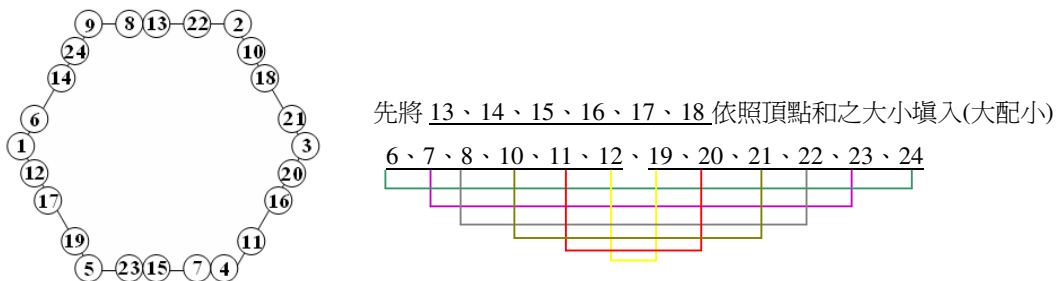


圖 5-3

#### 4. 魔邊 6 數六邊形

由表 11 中我們可得知，其最小魔數為 81，也就是各邊 6 數之和為 81，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6 依序填入，再將 7~30 填入使得每邊和為 81，其排列結果如圖 5-4：

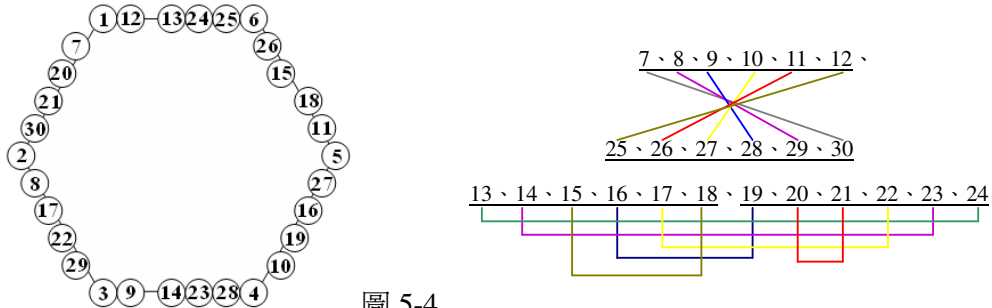


圖 5-4

#### 5. 魔邊 7 數六邊形

由表 11 中我們可得知，其最小魔數為 114.5，非整數，所以我們找大於 114.5 的最小整數為 115，其總和為 312，頂點和為 24。與 3. 相同的理由，我們將頂點採取 1、2、3、4、5、9 來排列，如下圖 5-5：

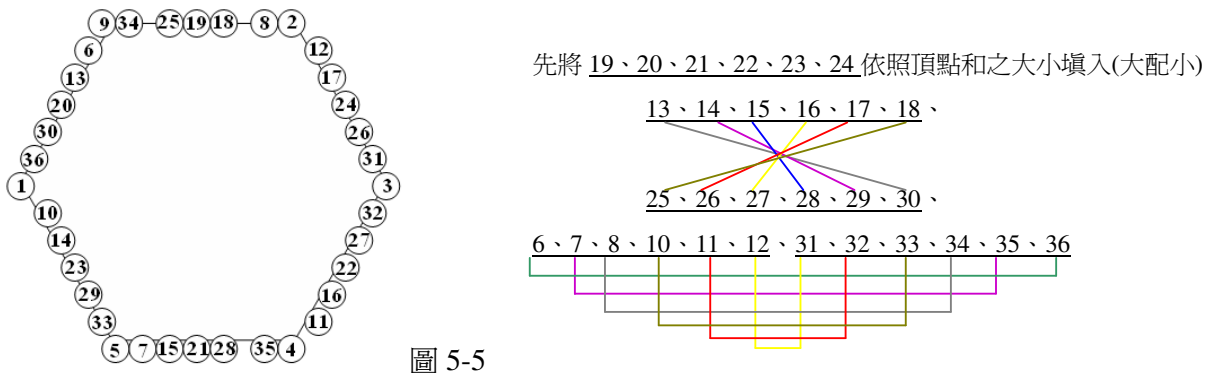


圖 5-5

#### 6. 魔邊 8 數六邊形

由表 11 中我們可得知，其最小魔數為 154，也就是各邊 8 數之和為 154，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6 依序填入，再將 7~42 填入使得每邊和為 154，其排列結果如圖 5-6：

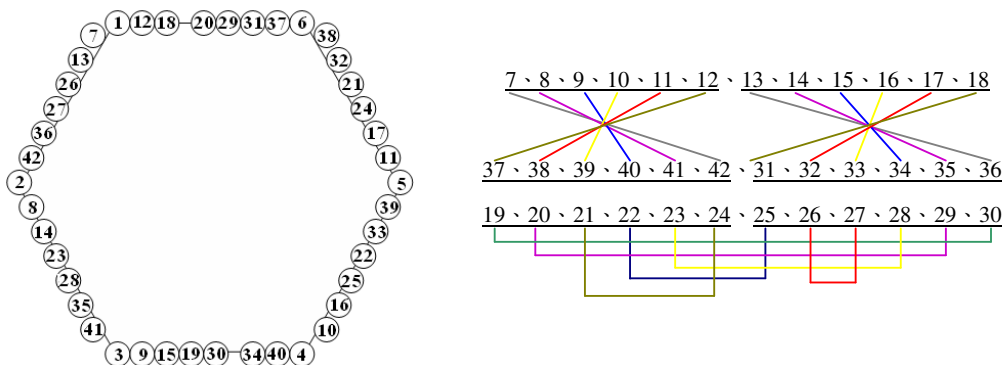


圖 5-6

## 7. 小結

由以上研究可得知，當魔數非整數時，頂點數字是不可能會出現連續數，因此討論此部分的情形會比較複雜，但只要先找到一種方式填入頂點，所有此種類型的六邊形皆可適用，而其填入頂點的方式似乎和魔邊四邊形之間沒有共同的規則性；當魔數為整數時，即可以連續數 1~6 依序填入各頂點，比較容易找出其組合，因此魔邊  $m$  數六邊形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表 12 所示：

表 12 魔邊  $m$  數六邊形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數六邊形 (最小魔數非整數)	魔邊偶數六邊形 (最小魔數為整數)
建立方式	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將 1~5 和 9 六數按分析所得的排列方式填入(無規則性)。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每六數一組，可分成奇數組。</li> <li>(3) 將最中間一組數依(1)中排定的頂點和配對，按大數配小數的原則填入各邊，此時每邊和有兩種結果。</li> <li>(4) 剩餘組數再依序頭尾配成數對，再按照(3)的結果以及依照 excel 算出的魔數來填入。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將 1~6 依序填入頂點。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每六數一組，可分成偶數組。</li> <li>(3) 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。</li> <li>(4) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。</li> </ol>

### (三)魔邊 $m$ 數八邊形的研究

我們先計算出各種魔數，如表 13 所示：

表 13 魔邊  $m$  數八邊形的全部數字總和及魔數範圍

每邊個數	數字總量	全部數字總和	頂點和範圍	總和範圍	魔數範圍 (各邊數字總和)
3	16	136	36 ~ 100	172 ~ 236	21.5 ~ 29.5
4	24	300	36 ~ 164	336 ~ 464	42 ~ 58
5	32	528	36 ~ 228	564 ~ 756	70.5 ~ 94.5
6	40	820	36 ~ 292	856 ~ 1112	107 ~ 139
7	48	1176	36 ~ 356	1212 ~ 1532	151.5 ~ 191.5
8	56	1596	36 ~ 420	1632 ~ 2016	204 ~ 252
:	:	:	:	:	:

我們希望能找出每種魔邊  $m$  數八邊形的一種組合，因此我們都從最小的魔數開始，並試圖找出其建立的規則。

### 1. 魔邊 3 數八邊形

由表 13 中我們可得知，其最小魔數為 21.5，非整數，所以我們找大於 21.5 的最小整數為 22，其總和為 176，頂點和為 40，為了找出和魔邊四、六邊形的共同規則性，我們只討論 1、2、3、4、5、6、7、12 的排列位置，但因情形眾多，以下只列出排列成功之圖形，如下圖 6-1-1、6-1-2、6-1-3。

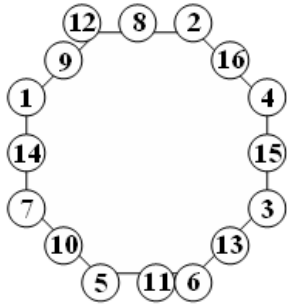


圖 6-1-1

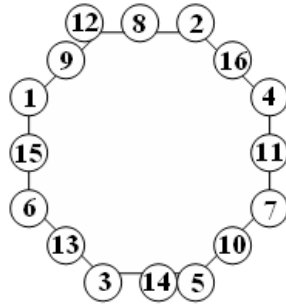


圖 6-1-2

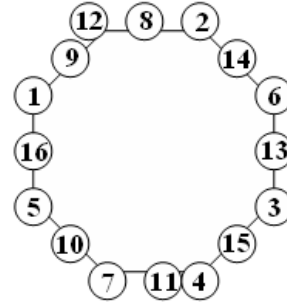


圖 6-1-3

將以上三圖和魔邊四、六邊形的非整數魔數的圖形比較，似乎找不出其頂點排列位置的共通性，因此接下來探討非整數魔數的圖形時，只呈現圖 6-1-1 的頂點排列方式。

### 2. 魔邊 4 數八邊形

由表 13 中我們可得知，其最小魔數為 42，也就是各邊 4 數之和為 42，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7、8 依序填入，再將 9~24 填入使得每邊和為 42，其排列結果如圖 6-2：

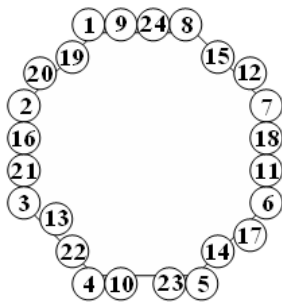
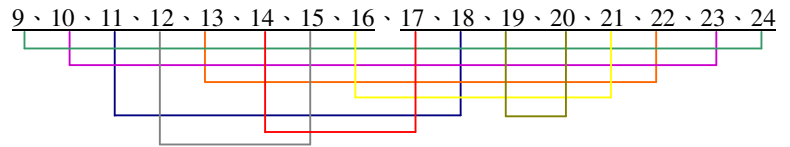


圖 6-2



### 3. 魔邊 5 數八邊形

由表 13 中我們可得知，其最小魔數為 70.5，非整數，所以我們找大於 70.5 的最小整數為 71，其總和為 568，頂點和為 40。根據圖 6-1-1 的排列方式來填入頂點位置，如下圖 6-3：

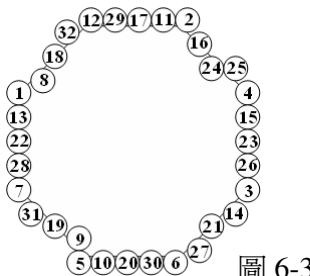
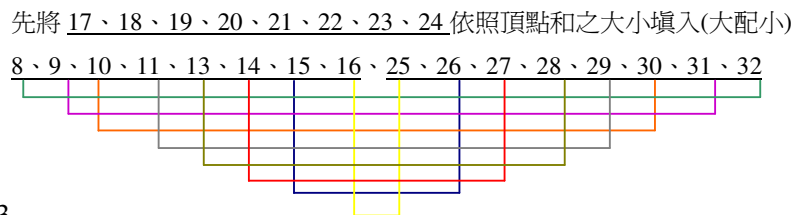
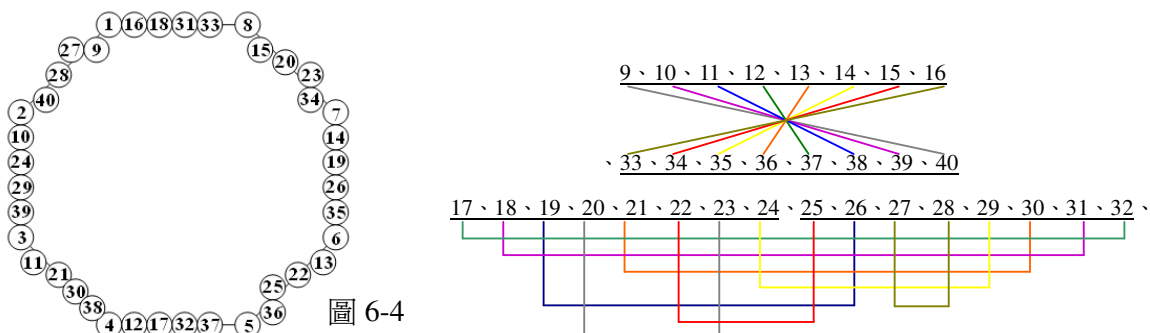


圖 6-3



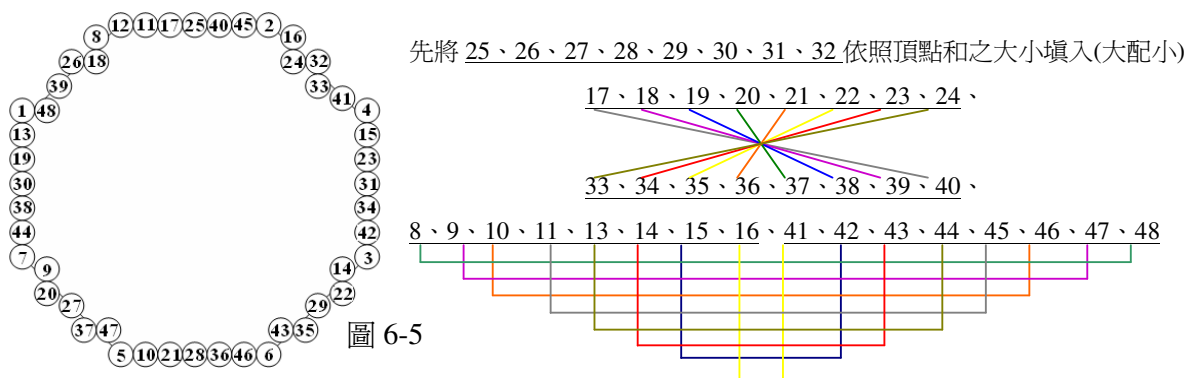
#### 4. 魔邊 6 數八邊形

由表 13 中我們可得知，其最小魔數為 107，也就是各邊 6 數之和為 107，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7、8 依序填入，再將 9~40 填入使得每邊和為 107，其排列結果如圖 6-4：



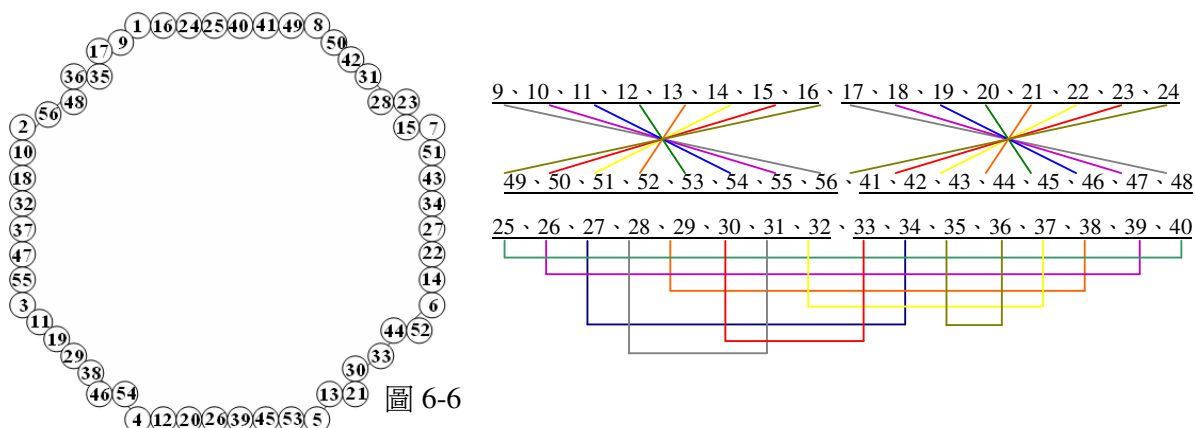
#### 5. 魔邊 7 數八邊形

由表 13 中我們可得知，其最小魔數為 151.5，非整數，所以我們找大於 151.5 的最小整數為 152，其總和為 1216，頂點和為 40。根據圖 6-1-1 的排列方式來填入頂點位置，如下圖 6-5：



#### 6. 魔邊 8 數八邊形

由表 13 中我們可得知，其最小魔數為 204，也就是各邊 8 數之和為 204，因此頂點放置的數字為 1、2、3、4、5、6、7、8 依序填入，再將 9~56 填入使得每邊和為 154，其排列結果如圖 6-6：



## 7. 小結

由以上研究可得知，當魔數非整數時，頂點數字是不可能會出現連續數，因此討論此部分的情形會比較複雜，但只要先找到一種方式填入頂點，所有此種類型的八邊形皆可適用，而其填入頂點的方式似乎和魔邊四、六邊形之間沒有共同的規則性；當魔數為整數時，即可以連續數 1~8 依序填入各頂點，比較容易找出其組合，因此魔邊  $m$  數八邊形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表 14 所示：

表 14 魔邊  $m$  數六邊形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數八邊形 (最小魔數非整數)	魔邊偶數八邊形 (最小魔數為整數)
建立方式	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將 1~7 和 12 八數按分析所得的排列方式填入(無規則性)。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每八數一組，可分成奇數組。</li> <li>(3) 將最中間一組數依(1)中排定的頂點和配對，按大數配小數的原則填入各邊，此時每邊和有兩種結果。</li> <li>(4) 剩餘組數再依序頭尾配成數對，再按照(3)的結果以及依照 excel 算出的魔數來填入。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將 1~8 依序填入頂點。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每八數一組，可分成偶數組。</li> <li>(3) 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。</li> <li>(4) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。</li> </ol>

## (五)結論

由以上魔邊四、六、八邊形的結論我們可以歸納得知：偶數邊的魔邊  $m$  數多邊形可以分成兩類型，並分析其建立方式，如下表 15 所示：

表 15 魔邊  $m$  數偶數邊多邊形的類型與建立方式

類型	魔邊奇數偶數邊多邊形(邊數： $2n$ )	魔邊偶數偶數邊多邊形(邊數： $2n$ )
建立方式	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將 1~<math>(2n-1)</math>和 <math>3n</math> 此 <math>2n</math> 個數填入頂點位置，但須在每邊 3 數多邊形時找出規則，此部分無規律性。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每 <math>2n</math> 個數一組，可分成奇數組。</li> <li>(3) 將最中間一組數依(1)中的已知和(每邊的兩頂點和)配對，按大數配小數的原則填入各邊。</li> <li>(4) 再將中間組的前後組依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後剩下最外側兩組。</li> <li>(5) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最外側的兩組數依需要來配對，即可完成。</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>(1) 先將頂點位置依序填入 1~<math>2n</math>。</li> <li>(2) 將剩餘數依序每 <math>2n</math> 個數一組，可分成偶數組。</li> <li>(3) 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。</li> <li>(4) 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。</li> </ol>



## (六)檢驗

利用上述歸納的方法隨意檢驗數個偶數邊多邊形，如附件十一~十二，我們發現這些建立規則皆適用。

## 伍、研究結果

一、奇數邊( $2n-1$  個邊)魔邊多邊形的建立方法可分為兩種：

(一)每邊個數為奇數的奇數邊魔邊多邊形：

1. 先將頂點位置依照間隔一數的原則依序填入  $1\sim(2n-1)$ 。
2. 將剩餘數依序每 $(2n-1)$ 個數一組，可分成奇數組。
3. 將最中間一組數依(1)中的已知和(每邊的兩頂點和)配對，依照大數配小數的原則，使得各邊和都會相等。
4. 剩餘數再依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，即可完成。

(二)每邊個數為偶數的奇數邊魔邊多邊形：

1. 先將頂點位置依照間隔一數的原則依序填入  $1\sim(2n-1)$ 。
2. 將剩餘數依序每 $(2n-1)$ 個數一組，可分成偶數組。
3. 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。
4. 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。

二、偶數邊( $2n$  個邊)魔邊多邊形的建立方法可分為兩種：

(一)每邊個數為奇數的偶數邊魔邊多邊形：

1. 先將  $1\sim(2n-1)$ 和  $3n$  此  $2n$  個數填入頂點位置，但須在每邊  $3$  數多邊形時找出規則，此部分無規律性。
2. 將剩餘數依序每  $2n$  個數一組，可分成奇數組。
3. 將最中間一組數依(1)中的已知和(每邊的兩頂點和)配對，按大數配小數的原則填入各邊。
4. 再將中間組的前後組依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後剩下最外側兩組。
5. 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最外側的兩組數依需要來配對，即可完成。

(二)每邊個數為偶數的偶數邊魔邊多邊形：

1. 先將頂點位置依序填入  $1\sim 2n$ 。
2. 將剩餘數依序每  $2n$  個數一組，可分成偶數組。
3. 將各組數依序頭尾配成各組和皆相等的數對，可任意將數對填入各邊，最後只剩下中間兩組。
4. 依照 excel 算出的魔數來計算各邊的剩餘數，再將最中間的兩組數依需要來配對，即可完成。

## 陸、討論

一、想找出魔邊奇數偶數邊多邊形的頂點建立規則？在找頂點的填入法時，魔邊  $3$  數四邊形只找到一種，魔邊  $3$  數六邊形找到三種、而魔邊  $3$  數八邊形找到四種，比對其排列位置，都沒有發現有共同的規律性，不知是不是沒有將所有的排列組合全部找盡或思考方向仍

不夠周延。

二、從魔邊  $m$  數奇數邊多邊形和魔邊  $m$  數偶數邊多邊形的最後歸納結論中，我們發現魔邊偶數奇數邊多邊形和魔邊偶數偶數邊多邊形的排列規則是一樣的，只差在頂點的填入方式不同。

## 柒、結論

一、藉由本文探討可知建立魔邊  $m$  數奇數邊多邊形和魔邊  $m$  數偶數邊多邊形的方法，都可分為每邊個數為奇數和偶數兩種。

二、研究出魔邊奇數偶數邊多邊形的建立規則，是我們接下來的目標。

三、研究出各種魔邊  $m$  數多邊形可以變幻的個數總數，是我們將來努力的目標。

四、在找尋魔邊  $m$  數多邊形的規則中，學會了怎麼運用學過的數學概念去思考、探討、預測、檢驗，並從中體會到學習數學的樂趣。

## 捌、參考資料及其他

一、**畫說數學之妙** (民 92)。華旦純，編譯：楊大石。臺北市：書泉出版社。

二、**國中數學第四冊** (民 99)。陳冒海。臺南市：南一書局。

## 參展心得及活動照片

在一年級時，聽別班的同學在做科展，心、手都覺得癢癢的，躍躍欲試。終於在二年級時有機會可以讓我們好好發揮一下。

還記得一開始研究魔邊多邊形時，我們什麼也不懂，總是摸不著頭緒，利用紙筆計算隨意亂湊數字，結果越研究越有興趣，想要找尋各種魔邊多邊形的建立方法。

每天中午以及無數個假日，都會看到我們每個人使出渾身解數，低頭認真的在研究，每每想出一個解決的辦法，心中就興奮不已，大家的士氣也隨之被激起，而且每寫一次研究過程，就會有另一種不同的想法在心中產生，再和同學一起切磋，更鼓舞我們繼續研究的動力。雖然這份研究看起來似乎是簡單的，不過我們盡心盡力地讓它成為一份精湛的研究，我們相信唯有付出、努力才會有收穫。

不管結果會如何，科展是一個學習、充實自己的好機會，而且在做研究的過程中我們不但學會了怎麼將學過的知識概念活用，也從過程中領悟到了團隊合作精神的重要性。



和同學討論檢驗的結果



利用電腦找出魔數

## 附件

附件一：魔邊 m 數三角形用 Excel 計算的魔數

每邊個數	總個數	總數和	最小頂點和	最大頂點和	最小總數和+頂點和	最小魔數	最大總數和+頂點和	最大魔數
3	6	21	6	15	27	9	36	12
4	9	45	6	24	51	17	69	23
5	12	78	6	33	84	28	111	37
6	15	120	6	42	126	42	162	54
7	18	171	6	51	177	59	222	74
8	21	231	6	60	237	79	291	97
9	24	300	6	69	306	102	369	123
10	27	378	6	78	384	128	456	152

附件二：魔邊 m 數四邊形用 Excel 計算的魔數

每邊個數	總個數	總數和	最小頂點和	最大頂點和	最小總數和+頂點和	最小魔數	最大總數和+頂點和	最大魔數
3	8	36	10	26	46	11.5	62	15.5
4	12	78	10	42	88	22	120	30
5	16	136	10	58	146	36.5	194	48.5
6	20	210	10	74	220	55	284	71
7	24	300	10	90	310	77.5	390	97.5
8	28	406	10	106	416	104	512	128
9	32	528	10	122	538	134.5	650	162.5
10	36	666	10	138	676	169	804	201

附件三：魔邊 m 數五邊形用 Excel 計算的魔數

每邊個數	總個數	總數和	最小頂點和	最大頂點和	最小總數和+頂點和	最小魔數	最大總數和+頂點和	最大魔數
3	10	55	15	40	70	14	95	19
4	15	120	15	65	135	27	185	37
5	20	210	15	90	225	45	300	60
6	25	325	15	115	340	68	440	88
7	30	465	15	140	480	96	605	121
8	35	630	15	165	645	129	795	159
9	40	820	15	190	835	167	1010	202
10	45	1035	15	215	1050	210	1250	250

附件四：魔邊 m 數六邊形用 Excel 計算的魔數

每邊個數	總個數	總數和	最小頂點和	最大頂點和	最小總數和+頂點和	最小魔數	最大總數和+頂點和	最大魔數
3	12	78	21	57	99	16.5	135	22.5
4	18	171	21	93	192	32	264	44
5	24	300	21	129	321	53.5	429	71.5
6	30	465	21	165	486	81	630	105
7	36	666	21	201	687	114.5	867	144.5
8	42	903	21	237	924	154	1140	190
9	48	1176	21	273	1197	199.5	1449	241.5
10	54	1485	21	309	1506	251	1794	299

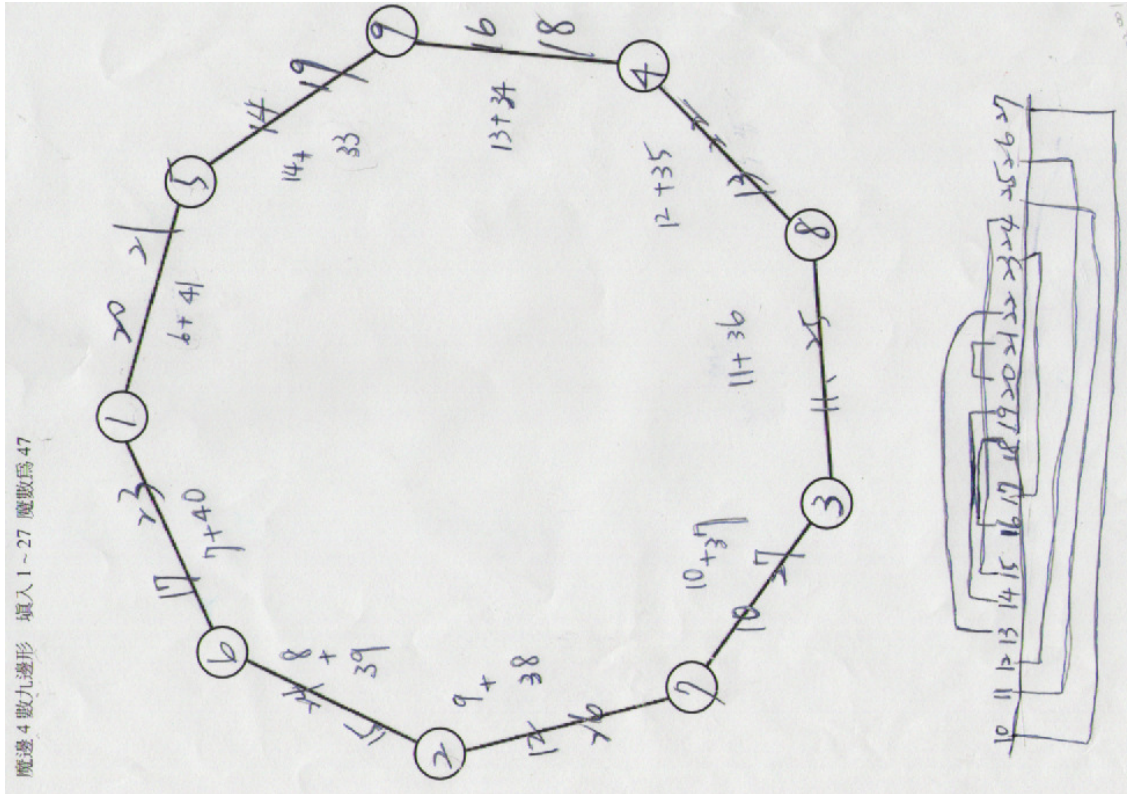
附件五：魔邊 m 數七邊形用 Excel 計算的魔數

每邊個數	總個數	總數和	最小頂點和	最大頂點和	最小總數和+頂點和	最小魔數	最大總數和+頂點和	最大魔數
3	14	105	28	77	133	19	182	26
4	21	231	28	126	259	37	357	51
5	28	406	28	175	434	62	581	83
6	35	630	28	224	658	94	854	122
7	42	903	28	273	931	133	1176	168
8	49	1225	28	322	1253	179	1547	221
9	56	1596	28	371	1624	232	1967	281
10	63	2016	28	420	2044	292	2436	348

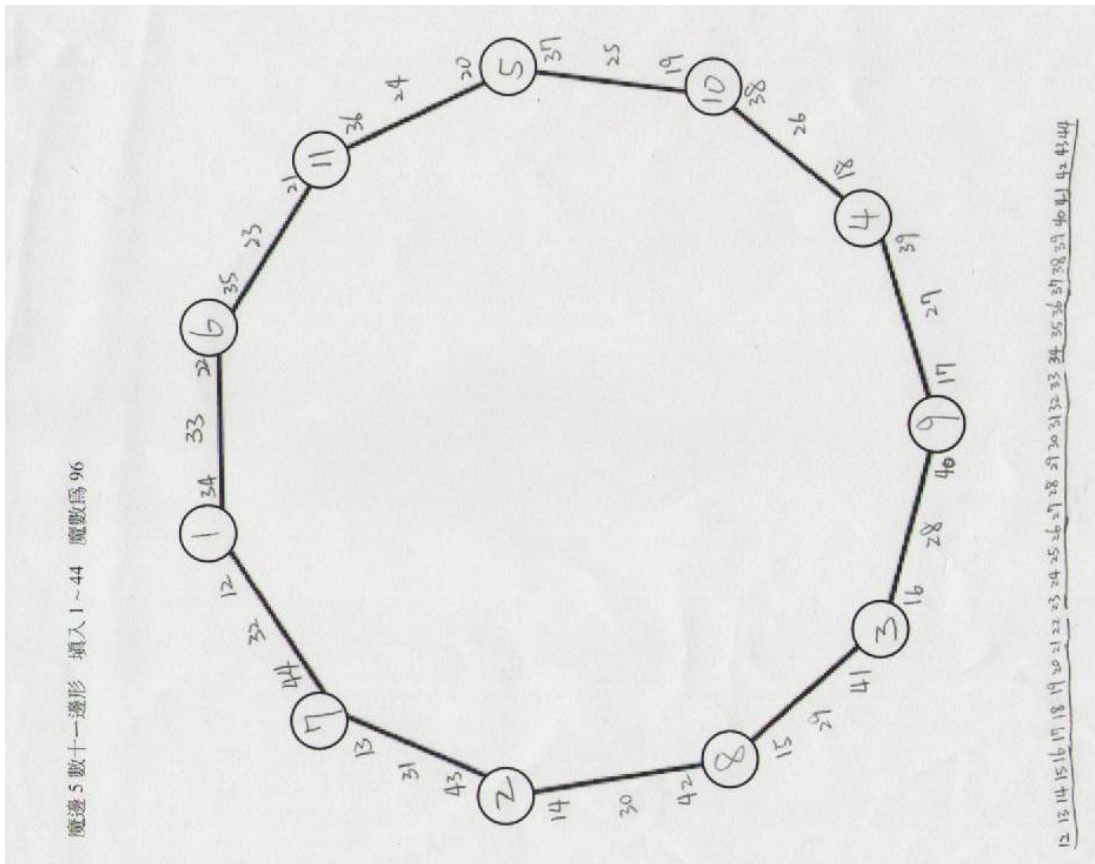
附件六：魔邊 m 數八邊形用 Excel 計算的魔數

每邊個數	總個數	總數和	最小頂點和	最大頂點和	最小總數和+頂點和	最小魔數	最大總數和+頂點和	最大魔數
3	16	136	36	100	172	21.5	236	29.5
4	24	300	36	164	336	42	464	58
5	32	528	36	228	564	70.5	756	94.5
6	40	820	36	292	856	107	1112	139
7	48	1176	36	356	1212	151.5	1532	191.5
8	56	1596	36	420	1632	204	2016	252
9	64	2080	36	484	2116	264.5	2564	320.5
10	72	2628	36	548	2664	333	3176	397

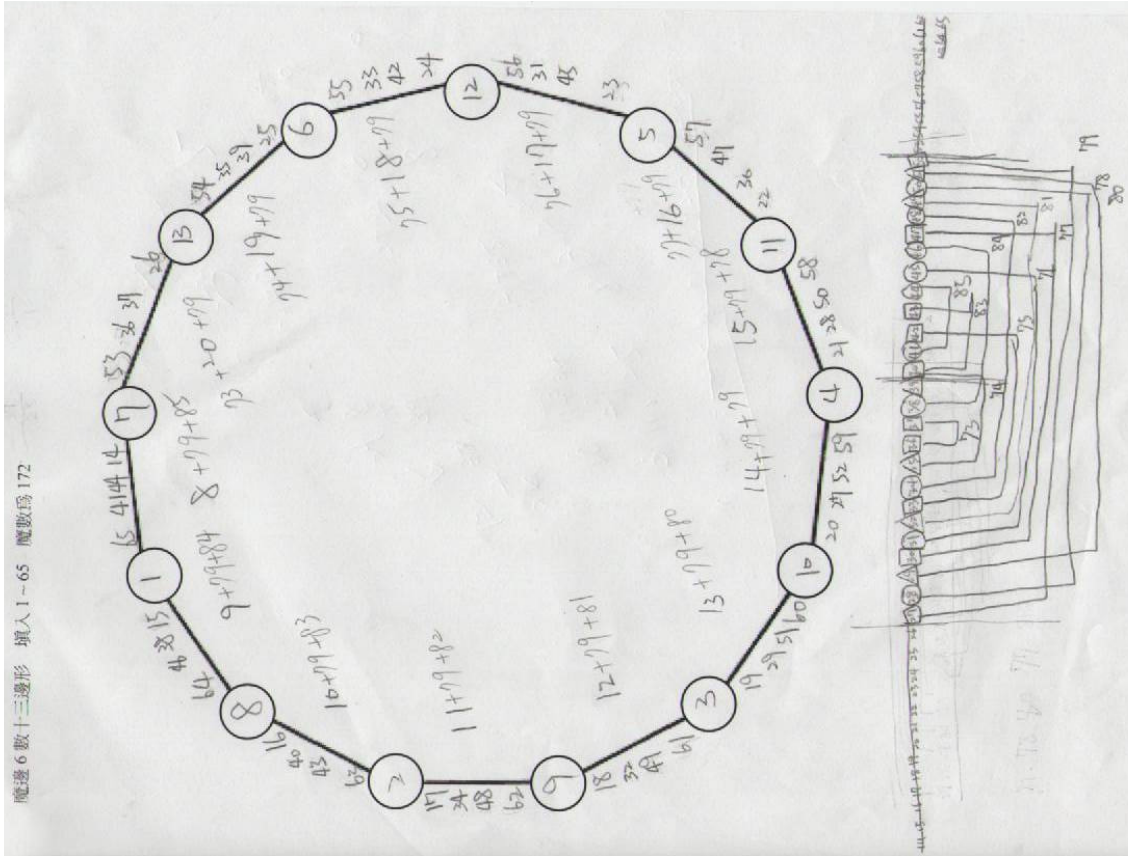
附件七：魔邊 4 數九邊形



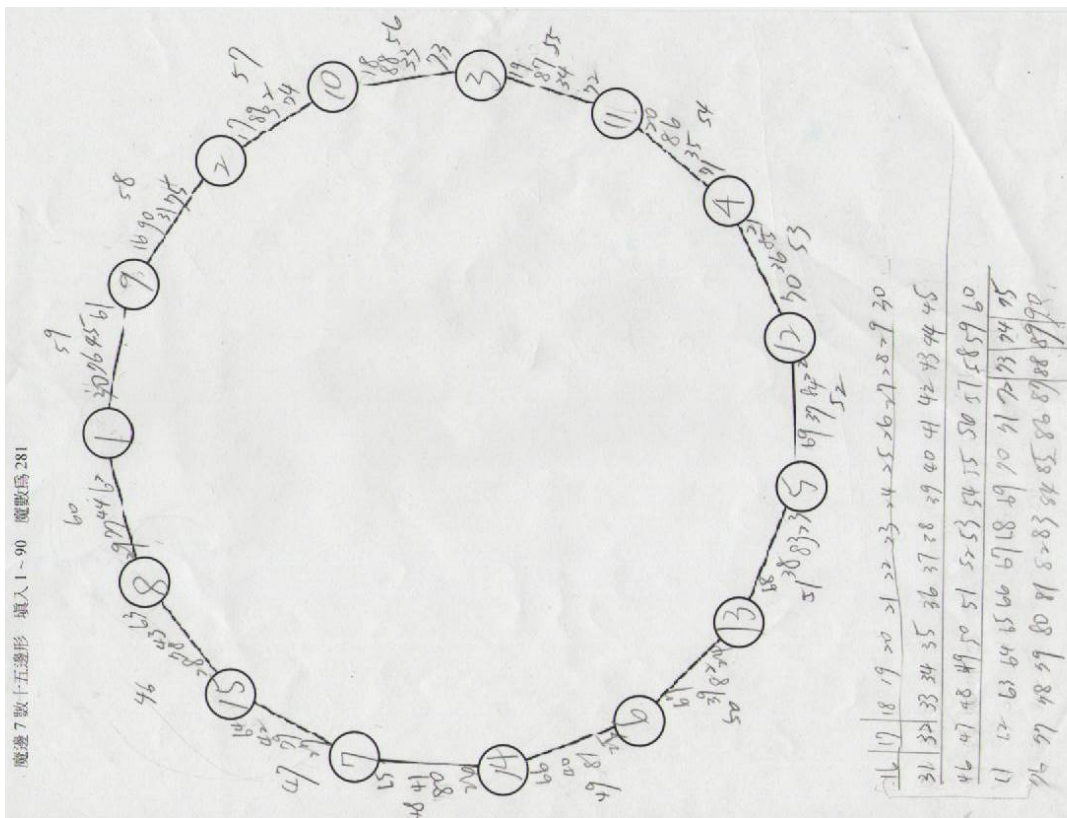
附件八：魔邊 5 數十一邊形



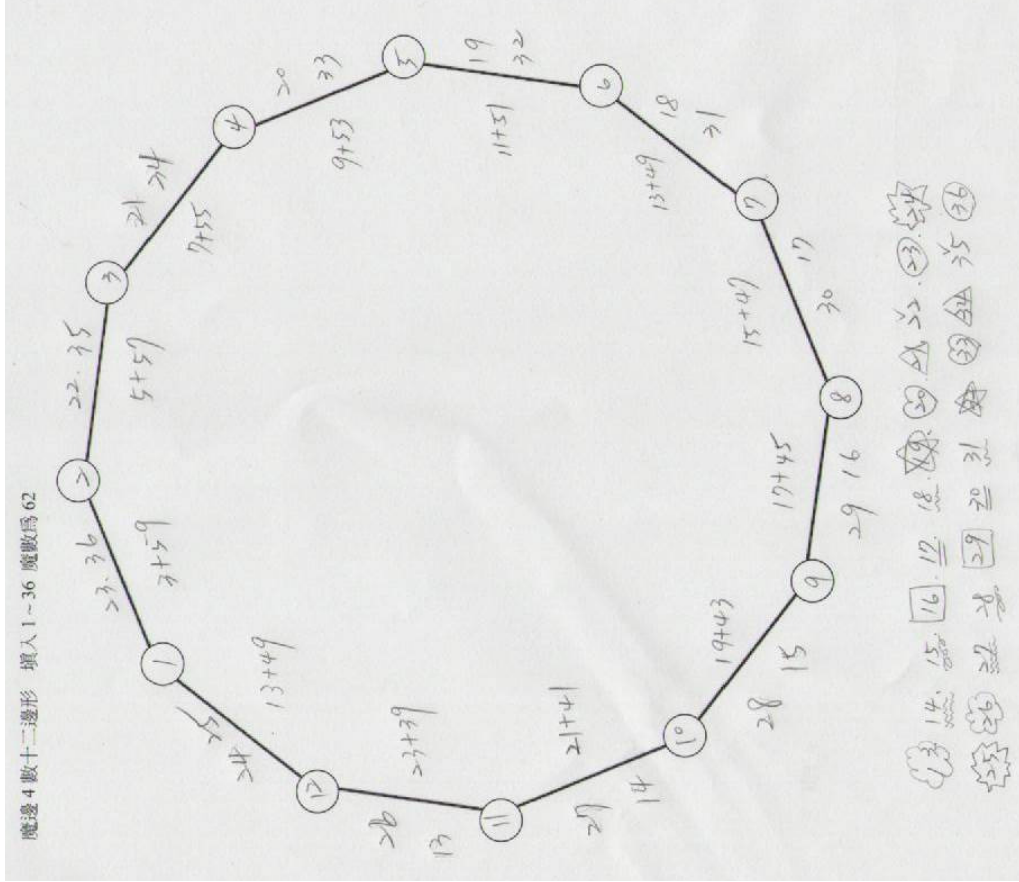
附件九：魔邊 6 數十三邊形



附件十：魔邊 7 數十五邊形



附件十一：魔邊 4 數十二邊形



附件十二：魔邊 7 數十四邊形

