

中華民國第四十九屆中小學科學展覽會

作品說明書

類 別：數學類

科 別：數學領域

組 別：國中組



作 品 名 稱：最後的陷阱

關 鍵 詞：畫圈圈、對戰遊戲

編 號：

目錄

| | |
|-----------------|----|
| 壹、摘要..... | 3 |
| 貳、研究動機..... | 3 |
| 參、研究目的..... | 3 |
| 肆、研究設備及器材 | 4 |
| 伍、研究過程及方法 | 5 |
| 陸、研究結果..... | 6 |
| 柒、結論..... | 18 |
| 捌、未來發展性..... | 20 |
| 玖、照片..... | 21 |
| 拾、心得..... | 22 |

壹、摘要

以前玩過許多數學遊戲，但令我們印象最深刻的就是這個畫圈圈的遊戲，因為它的基本圖形不但呈現三角形，而且每一層的顆數都成等差，層數還可以無限延伸，學了這麼多年的數學，引起了我們對此遊戲的好奇心，除了想研究到底玩此遊戲的勝負是靠運氣、技巧，還是有其一定的秘技，我們還想藉此了解先出手、後出手、層數、總顆數或顆數成等差的三角形圖形是否皆會影響勝負。

貳、研究動機

從前從前有一個受詛咒的三角陸地，這個三角陸地有許多的洞；有一天兩個逃犯，不小心跑進這個三角陸地裡，這裡只有一個洞口，突然這個洞口關起來了！並跑出一位妖魔，它說：「每個人最多只能在 3 個洞前插旗子，最少也要在 1 個洞前插旗子，但在最後 1 個洞插旗子的那個人便會掉入陷阱，則另外一個人便可走出這個充滿詛咒的三角陸地。」要如何解開這個充滿詛咒的三角陸地呢？充滿冒險精神的我們，要如何破除這重重的關卡呢？

參、研究目的

其實這是一個遊戲，我們想研究如何才能快速突破重圍，順利找到出口。

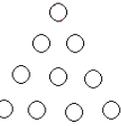
【遊戲規則說明】在一個用圈圈以等差的顆數及層數所組成的三角圖形上，一次能畫 1~3 顆圈圈為限，畫到最後一顆的那個人是輸家。

一、首先我們假設 n 為層數， m 為總顆數：

(1) 若 $n = 1$; $m = 1$, 則此圖形為 \bigcirc

(2) 若 $n = 2$; $m = 1 + 2 = 3$, 則此圖形為 

(3) 若 $n = 3$; $m = 1 + 2 + 3 = 6$, 則此圖形為 

(4) 若 $n = 4$; $m = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, 則此圖形為 

以此類推，共可衍生出 n 層，若共有 n 層，則共有 $(1 + n) * n / 2$ 個總顆數。

二、首先，我們先研究層數及總顆數是否為影響輸贏的關鍵，但經過多次各種層數及總顆數實驗後，發現層數及總顆數並不是影響輸贏的關鍵，而是最後剩下的顆數及剩下來的形狀才是影響輸贏的關鍵，於是我們便著手針對**剩下顆數及其排列的圖形**來做研究。

肆、研究設備及器材

- 一、A4 白紙
- 二、印表機
- 三、原子筆
- 四、電腦 (Word 、小畫家)
- 五、筆記本
- 六、隨身碟

伍、研究過程及方法

一、首先我們認為輸贏跟**層數與總顆數**有關，並想找出其是否為致勝關鍵，研究過程如下：

(一) 以等差級數的公式算出總顆數，並觀察比賽結果

(1) 若 $n = 1$; $m = 1$, 則此圖形為 \circ , 我們發現先出手一定必輸;

(2) 若 $n = 2$; $m = 1 + 2 = 3$, 則此圖形為 $\circ \circ \circ$, 先出手一定必贏;

(3) 若 $n = 3$; $m = 1 + 2 + 3 = 6$, 則此圖形為 $\circ \circ \circ \circ \circ \circ$, 先出手則是必輸;

(4) 若 $n = 4$; $m = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, 則此圖形為 $\circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ \circ$, 我們卻看到了許多種不同的組合, 不見得四層先出手就必輸或必贏, 最後卻發現輸贏與層數似乎並無明確且直接的相關性。當我們的想法出現錯誤後, 卻在不斷彼此互相比賽的過程當中意外發現, 只要比賽到最後出現一些固定的排列方式就會必輸或者必贏。

二、以**剩餘顆數**的排列圖形來研究

當我們確定四層以上的層數及總顆數不是影響比賽輸贏的關鍵時, 我們則以剩餘顆數這個方向來開始我們的研究(以 P 來代表剩餘顆數), 從剩餘 2 顆的圖形即 $P=2、3、4、\dots\dots 7$, 並選定不會佔太大版面且不影響剩餘顆數排列範圍的六層圖形來作為研究的基本圖形。

(一) 找出剩餘顆數及其排列的**圖形**是否會成為比賽輸贏的關鍵。

(二) 找出剩餘顆數及其排列的圖形時, 以**不同的劃記**方式是否會改變比賽的輸贏, 並加以記錄。

(三) 找出剩餘顆數的各種排列方式後統計其輸與贏的比例是否有其一定的規律性。

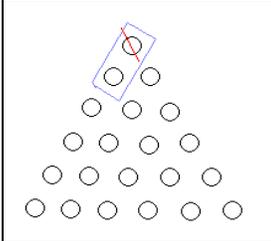
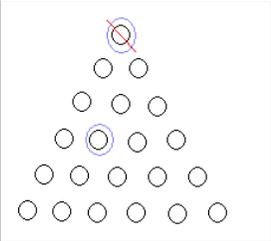
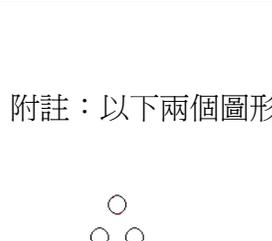
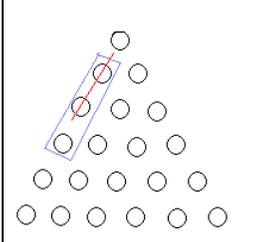
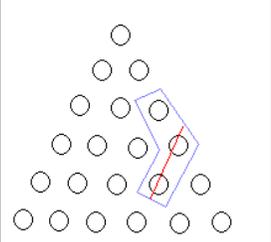
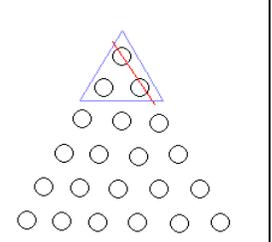
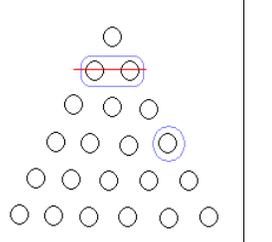
陸、研究結果

我們先依剩下的顆數，依序統整出其可以排列出來的圖形，並把各種圖形其必贏及必輸的方式做劃記。附註：(以六層，總數共二十一顆，可以排列出來的圖形作為研究範圍)

一、先出手必贏的劃記類型

—— 以紅色表示先出手的一方

以 ○ 圈記表示為剩餘的顆數

| 若最後只剩下 2 顆，即 P=2 | | | |
|---|--|--|---|
|  |  | 附註：以下兩個圖形視為同種類型 | |
|  |  | | |
| 剩下連 2 顆時，先出手只要畫 1 顆必贏 | 剩下 2 顆都分別各落單時，先出手只要畫 1 顆必贏 | | |
| 若最後只剩下 3 顆，即 P=3 | | | |
|  |  |  |  |
| 剩下連 3 顆時，先出手畫連 2 顆必贏 | 剩下連 3 顆呈上圖時，先出手畫連 2 顆必贏 | 剩下 3 顆呈三角形時，先出手只要先畫連 2 顆就必贏 | 先出手只要先畫連 2 顆就必贏 |

| 若最後只剩下 4 顆，即 P=4 | | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|--|--|
| | | | |
| 剩下連 4 顆時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下連 4 顆呈人字型時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下連 3 顆和落單的 1 顆時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下連 3 顆呈上圖和落單 1 顆時，先出手畫連 3 顆的中間那 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下連 2 顆和落單的 2 顆時，先出手畫連 2 顆中的其中 1 顆必贏 | 剩下 4 顆分別各落單時，先出手畫 1 顆必贏 | | |
| 若最後只剩下 5 顆，即 P=5 | | | |
| | | | |
| 剩下連五顆時，畫中間那 1 顆時必贏 | 剩下連 4 顆和落單 1 顆時，先出手畫連 4 顆中的連 2 顆必贏 | 剩下連 4 顆呈菱形和落單 1 顆時，先出手畫連 4 顆中其中一顆必贏畫落單 1 顆也可以贏 | 剩下連 4 顆呈 L 字型和落單 1 顆時，先出手畫連 4 顆中其中 1 顆必贏 |
| | | | |
| 先出手畫連 4 顆的上下連 2 顆必贏 | 先出手畫連 4 顆中的中間連 2 顆必贏 | 先出手畫連 4 顆的倒數第 2 顆必贏 | 先出手畫連 3 顆旁 1 顆必贏 |

| | | | |
|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| | | | |
| 先出手畫落單其中 1 顆必贏 | 先出手畫連 3 顆中 其中 1 顆或連 2 顆 中的其中 1 顆必贏 | 先出手畫連 3 顆中 的連 2 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈上 圖時，先出手畫 中間連 2 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下連 5 顆呈上圖 時，先出手畫連 3 顆中的中間那 1 顆 必贏 | 剩下的 5 顆呈上圖 時，畫連 3 顆的倒 數兩顆，使剩餘落 單必贏 | 剩下 5 顆呈 厂 字型 時，畫中間的那 1 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈上 圖時，畫最左邊 連 3 顆的中間那 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下 5 顆時呈 厶 字 型，畫連兩顆呈上 圖必贏 | 剩下連 5 顆呈 冂 字 型時，先出手畫中 間的 1 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈上圖 時，畫中間的那 1 顆必贏 | 剩下兩對連 2 顆 和 1 顆落單時， 先出手畫落單的 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下連 2 顆和落單 分別各 3 顆時，先 出手畫連 2 顆必贏 | | | |

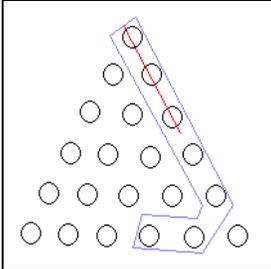
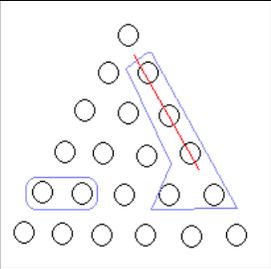
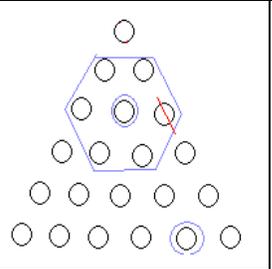
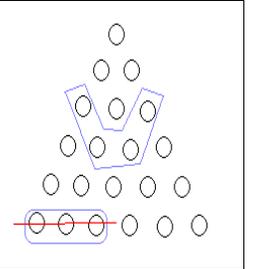
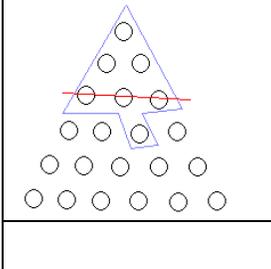
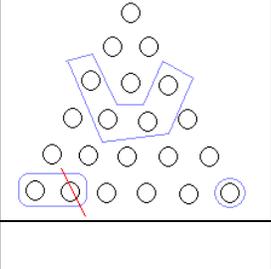
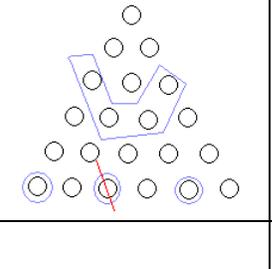
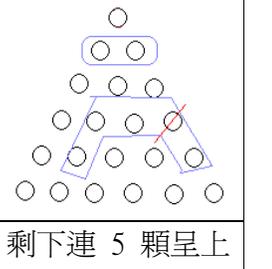
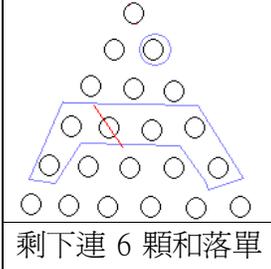
| 若最後只剩下 6 顆，即 P=6 | | | |
|-----------------------------|--|---|--------------------------------------|
| | | | |
| 剩下連 6 顆時，先出手畫中間連 2 顆必贏 | 剩下兩對連 3 顆呈三角形時，先出手畫任意連 2 顆都必贏 | 剩下連 5 顆和落單 1 顆時，先出手畫連 5 顆中的中間連 3 顆必贏 | 剩下連 6 顆呈 L 字形時，先出手畫連 2 顆呈上圖必贏 |
| | | | |
| 剩下連 6 顆呈上圖時，先出手畫呈上圖的連 2 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈上圖和落單 1 顆時，先出手畫連 5 顆中最旁邊的連 2 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈 11 字型和落單 1 顆時，先出手畫連 5 顆中的連 3 顆必贏 | 剩下連 4 顆和落單分別各 2 顆時，先出手畫連 4 顆中連 3 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下連 6 顆呈上圖時，先出手畫上圖連 2 顆必贏 | 剩下連 4 顆和連 2 顆時，先出手畫連 4 顆中左邊或右邊連 2 顆必贏 | 剩下連 2 顆和連 4 顆呈上圖時，先出手畫連 4 顆中的連 2 顆必贏 | 剩下 6 顆呈 11 字型，先出手畫呈上圖的 2 顆必贏 |

| | | | |
|---------------------------------------|--------------------------------|---|------------------------------|
| | | | |
| 剩下連 3 顆呈三角形和連 3 顆時，先出手畫連 3 顆中的連 2 顆必贏 | 剩下連 3 顆和落單分別各 3 顆時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下連 6 顆呈上圖時，先出手畫連 2 顆必贏 | 剩下連 6 顆呈上圖時，先出手畫最上面連 2 顆必贏 |
| | | | |
| 先出手畫連 2 顆必贏 | 先出手畫一對連 2 顆必贏 | 先出手畫連 2 顆中其中 1 顆必贏 | 先出手畫呈上圖連 2 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下 6 顆呈環狀，先出手畫隨意連 2 顆必贏 | 剩下分別落單 6 顆時，先出手畫必贏 | | |
| 若最後只剩下 7 顆，即 $P=7$ | | | |
| | | | |
| 剩下連 3 顆和落單分別各 4 顆時，先出手畫連 3 顆中的連 2 顆必贏 | 剩下連 2 顆和落單 5 顆時，先出手畫連 2 顆必贏 | 剩下連 2 顆和連 4 顆還有 1 顆落單時，先出手畫連 4 顆的中間 1 顆必贏 | 剩下一對連 3 顆和落單的 1 顆時，先出手畫落單顆必贏 |

| | | | |
|--|---|-------------------------------------|---|
| | | | |
| 剩下連 7 顆呈環字型，先出手畫中間連 3 顆必贏 | 剩下連 6 顆呈 L 字型和落單 1 顆時，先出手畫連 4 顆的第 1 顆必贏 | 剩下連 6 顆呈三角形和 1 顆落單時，先出手畫最旁邊的連 3 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈上圖和 2 顆落單時，先出手畫梯形中連 3 顆的第 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下一個連 3 顆和一個連 4 顆時，先出手畫連 4 顆第 2 顆必贏 | 剩下連 3 顆和落單 4 顆時，先出手畫連 3 顆的連 2 顆必贏 | 剩下連 4 顆落單 3 顆時，先出手畫連 4 顆的中間 2 顆必贏 | 剩下 2 個連 3 顆和落單 1 顆時，先出手畫落單 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下 1 個連 3 顆和兩個連 2 顆時，先出手畫連 2 顆的其中 1 顆或畫連 3 顆必贏 | 剩下三個連 2 顆和一個落單顆時，先出手畫連 2 顆的其中 1 顆必贏 | 剩下 2 個連 2 顆和落單 3 顆時，先出手的畫落單 1 顆必贏 | 剩下一個連 3 顆呈三角形和一個連 4 顆呈上圖時，先出手畫連 3 顆必贏 |
| | | | |
| 先出手畫連 3 顆必贏 | 先出手畫連 2 顆的其中 1 顆必贏 | 先出手畫菱形最上面的 1 顆必贏 | 先出手畫連 3 顆的連 2 顆必贏 |

| | | | |
|---|---|---|---------------------------------------|
| | | | |
| 先出手的畫連 3 顆的連 2 顆必贏 | 先出手畫菱形中的左右其中 1 顆必贏 | 先出手畫連 2 顆的其中 1 顆必贏 | 先出手畫連 2 顆的其中 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下連 4 顆和落單 3 顆先出手畫指定顆必贏 | 剩下一個連三顆和一個連 2 顆和落單 2 顆時，先出手畫落單一顆必贏 | 剩下一個連 3 顆呈三角形和一個連 3 顆還有一個落單顆時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下連 4 顆和 3 顆呈三角形時，先出手畫連 4 顆的連 3 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下一個連 2 顆和一個連 5 顆如上圖時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆呈梯型時，先出手畫連 3 顆的中間 1 顆必贏 | 剩下一個連 2 顆和一個連 5 顆時，先出手畫連 5 顆中的連 3 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆時，先出手畫連 5 顆的中間 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下一個連 2 顆和一個連 5 顆呈 L 字型時，先出手畫連 4 顆中的連 3 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 4 顆的中間 1 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 5 顆的中間 1 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 3 顆的最後 1 顆必贏 |

| | | | |
|---|---|--|---|
| | | | |
| 先出手畫連 3 顆必贏 | 先出手畫連 3 顆必贏 | 先出手畫連 5 顆的中間 1 顆必贏 | 先出手畫連 4 顆的中間 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下一個連 5 顆呈上圖落單 2 顆時，先出手畫連 5 顆的中間 1 顆必贏 | 剩下一個連 5 顆呈上圖落單 2 顆時，先出手畫落單的任 1 顆必贏 | 剩下一個連 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下一個連 5 顆呈上圖和落單 2 顆時，先出手畫連 3 顆的中間 1 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 5 顆的中間 1 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 4 顆的中間 2 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 3 顆的左邊第 1 顆必贏 | 剩下一個連 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 3 顆必贏 |
| | | | |
| 剩下一個連 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫 1 顆呈上圖必贏 | 剩下一個連 5 顆呈上圖和落單 2 顆時，先出手畫連 5 顆的中間 1 顆必贏 | 剩下一個連 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下落單 2 顆和一個連 5 顆呈上圖時，先出手畫連 2 顆(呈上圖)必贏 |

| | | | |
|---|---|--|---|
|  |  |  |  |
| 剩下連 7 顆呈上圖時，先出手畫連 3 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈上圖和連 2 顆時，先出手畫連 3 顆呈上圖必贏 | 剩下連 6 顆呈上圖和落單 1 顆時，先出手畫環狀的最右邊的 1 顆必贏 | 剩下連 4 顆呈上圖和連 3 顆時，先出手畫連 3 顆必贏 |
|  |  |  |  |
| 先出手畫掉三角形底部的連 3 顆必贏 | 先出手畫掉連 2 顆其中 1 顆必贏 | 先出手畫掉落單 1 顆必贏 | 剩下連 5 顆呈上圖和連 2 顆時，先出手畫如上圖標示的地方必贏 |
|  | | | |
| 剩下連 6 顆和落單 1 顆時，先出手畫如上圖標示的地方必贏 | | | |

二、先出手必輸的圖形類型

此類圖形並不是在劃記有輸有贏的圖形必輸的型態，而是只要先出手的一方在面

對此圖形時，不管如何劃記都必輸。

以  圈記表示為剩餘的顆數

— 紅色表先出手的一方 — 藍色表後出手的一方

| 若最後只剩下 3 顆，即 $P=3$ | |
|---|---------------------------------------|
| | <p>附註：剩餘三顆必輸的圖形共有一種類型。</p> |
| <p>剩下落單分別各 3 顆時，先出手畫必輸</p> | |
| 若最後只剩下 4 顆，即 $P=4$ | |
| | |
| <p>剩下一對連 2 顆時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> | <p>剩下連 4 顆呈菱形時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> |
| | |
| <p>剩下連 3 顆呈三角形和落單 1 顆時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> | <p>剩下連 4 顆呈上圖時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> |
| | <p>附註： 剩餘四顆必輸的圖形有五種類型。</p> |
| <p>剩下連 4 顆呈上圖時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> | |

| 若最後只剩下 5 顆，即 P=5 | | | |
|--|--|---|---|
| | <p>附註：剩餘五顆必輸的圖形只有一種類型。</p> | | |
| <p>剩下分別各落單 5 顆時，先出手必輸</p> | | | |
| 若最後只剩下 6 顆，即 P=6 | | | |
| | | | |
| <p>剩下連 6 顆呈三角形時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> | <p>剩下連 5 顆呈上圖和落單 1 顆時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> | <p>剩下兩對連 3 顆時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或是 3 顆都必輸</p> | <p>剩下落單 1 顆、連 2 顆和連 3 顆時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> |
| | | | |
| <p>先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆，都必輸</p> | | <p>先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆時，都必輸</p> | |

| | |
|---|--|
| | |
| <p>剩下連 4 顆呈上圖和落單分別各 2 顆時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> | <p>剩下連 4 顆呈上圖和落單分別各 2 顆時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> |
| | |
| <p>剩下連 3 顆呈三角形和落單分別各 3 顆時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> | <p>剩下連 3 顆呈上圖和連 2 顆還有落單 1 顆時，先出手無論畫 1 顆或 2 顆都必輸</p> |
| | <p>附註：剩餘六顆必輸的圖形共有十一種類型。</p> |
| <p>剩下 5 顆呈上圖和落單 1 顆時，先出手畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> | |
| <p>若最後只剩下 7 顆，即 $P=7$</p> | |
| | <p>剩下 2 對連 3 顆呈三角形和落 1 顆時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> |
| | <p>剩下連 6 顆和落單 1 顆時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> |

| | |
|--|----------------------------|
| | <p>附註：剩餘七顆必輸的圖形共有三種類型。</p> |
| <p>剩下連三顆呈三角形和兩對連 2 顆時，先出手無論畫 1 顆、2 顆或 3 顆都必輸</p> | |

柒、結論

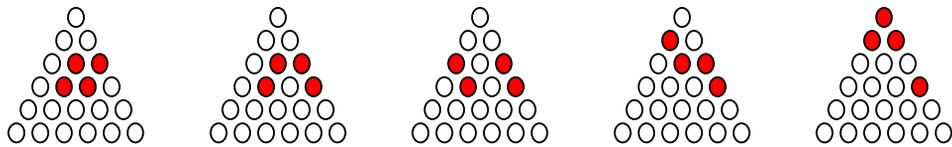
當我們研究剩餘顆數及其排列出來的各種圖形時，發現有些圖形並不是固定必輸或必贏，而輸贏的關鍵是在於先出手的人劃記的位置，於是，我們將所有依剩餘顆數排列出來的圖形針對其必贏的位置做劃記，做為必贏的秘訣。

整理出這麼多種類型的組合圖形，縱使大部份的圖形都要依先出手的人劃記的位置來決定輸贏，但我們還是發現有些圖形已經決定了正要出手的人無論怎麼劃記都註定會輸，我們把它整理成如下。

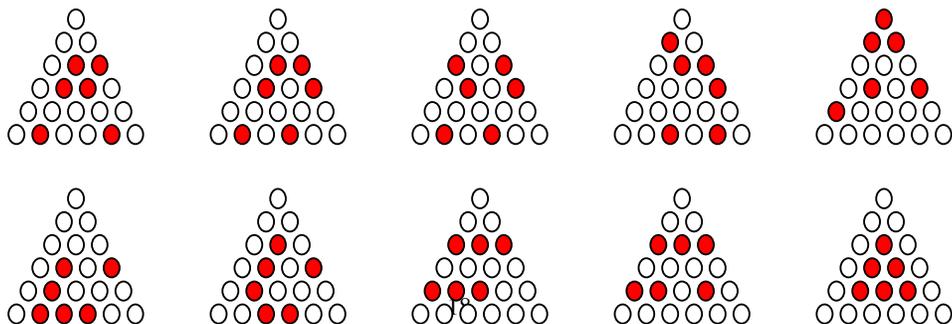
一、若正要出手的人面對以下用紅色所組成的圖形，則此局必輸

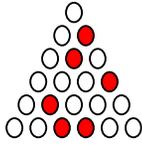
(1) 剩下奇數顆類型（例如：剩下一顆、三顆、五顆．．．等以此類推），並且其分別落單無法彼此串連。

(2) 剩下四顆，其排列方式如下，先出手必輸的類型：

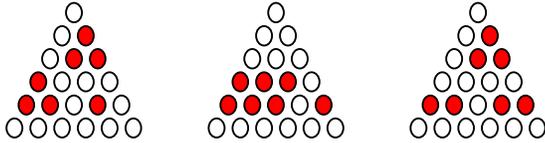


(3) 剩下六顆，其排列方式如下，先出手必輸的類型：





(4) 剩下七顆，其排列方式如下，先出手必輸的類型：



二、若正要出手的人面對以下的圖形，則必贏

- (1) 剩下偶數顆類型（例如：剩下二顆、四顆、六顆...，等以此類推），並且其分別落單無法彼此串連。
- (2) 剩下二顆的任何排列組合必贏。
- (3) 剩下三顆的任何排列組合，除去其分別落單無法彼此串連的情況，其餘的圖形只要劃記對的地方皆可贏。
- (4) 剩下五顆的任何排列組合，除去其分別落單無法彼此串連的情況，其餘的圖形只要劃記對的地方皆可贏。
- (5) 只要留給對方如上列第一大點的圖形組合，皆可贏。

三、贏與輸的比例是否固定

- (1) 剩 2 顆贏與輸的比例是 2 : 0
- (2) 剩 3 顆贏與輸的比例是 4 : 1
- (3) 剩 4 顆贏與輸的比例是 6 : 5
- (4) 剩 5 顆贏與輸的比例是 21 : 1
- (5) 剩 6 顆贏與輸的比例是 22 : 11
- (6) 剩 7 顆贏與輸的比例是 61 : 3

利用比例式的性質檢驗，我們發現剩餘各種顆數其贏與輸的比例彼此並無特別的比例關係，但是我們可以看出若正要出手所面對的剩餘顆數為奇數顆，則贏

得此比賽的機率大很多。

四、數學領域相關教材的運用

(1) 等差級數公式 $a_n = (a_1 + a_n) * n / 2$

(註： a_n 為末項； a_1 為首項； n 為項數)

(2) 未知數的運用 (ex: 設 n 為層數； m 為總數； p 為剩餘的顆數)

(3) 比例式的驗算

(4) 幾何圖形的運用

捌、未來發展性

- 一、這個遊戲我們只討論到剩餘七顆的排列組合，其中剩餘三顆及五顆除了分別落單無法串連的情況下必輸外，其餘組合必贏，將來更可延伸至剩餘八顆、剩餘九顆...等，也許它有一定的規律性。
- 二、這個遊戲除了圖形可用三角形外，還可以排列成其它種的幾何圖形，例如正方形、長方形或菱形...等，我們認為不同圖形可能會增減其剩餘顆數的排列方式，對於必輸或必贏的圖形可能就會產生其它不同的組合及比例。
- 三、我們研究的剩餘類型中，針對各種圖形只有劃記出必贏的地方，但卻沒有針對可贏可輸的圖形劃記出其必輸的地方，因此，若再加上此部份將更完整。

玖、照片

| | |
|---|--|
|  |  |
| <p>科展討論開始了!一開始還摸不太著頭緒說... (加油啊!才剛開始別氣餒啲!)</p> | <p>討論出題目後現在要找出規律啦! (桌上的食物,隨時補充體力!呵呵!)</p> |
|  |  |
| <p>三角形圈圈畫來畫去,滿腦子都是圓圈圈哩! 加油加油!><</p> | <p>學用電腦畫圓圈圈,就不用再用手畫了,更加便利勒!</p> |
|  |  |
| <p>經過老師的指導,我們更加了解整個作品的架構了!</p> | <p>就快完成了,記下自己的心得吧!(喜怒哀樂的心情全部記下來吧)</p> |

拾、心得

很榮幸我們可以被選來做數學科展，我們四個人從完全不知道要從哪裡下手到整個科展討論完整，我們一天一天慢慢的有了方向，當科展的結果討論出來後，我們頓時間有種莫名的成就感。這是我們四人第一次參加科展，我們很高興彼此能一起做這些研究；過程中，我們利用寒假、每天中午午休、社團課和輔導課的時間製作數學科展的研究，雖然很辛苦也很累，但是看到大家那麼努力的樣子，就會覺得自己的辛苦真的不算什麼，這種大家一起努力的感覺真好，我們在過程中有時快要把自己搞瘋了！而有時也會因為找到結論開心的要命，現在我們可能看到○就想吐，這些日子來我們一天一天的努力，經過了度日如年的時間，終於完成我們的討論。