中華民國第　四十七　屆中小學科學展覽會

作品說明書

類組：數學組

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：撿石頭遊戲的研究

關　鍵　詞：<u>拈</u>、<u>對局遊戲</u>、<u>威氏遊戲</u>

編　　號：

目錄

壹、摘要

一、棋子數 N 顆，取 1~k，其中 $1<k\leqq N$，必勝方法。
二、棋子數 N 顆，取 1~k，其中 $1<k\leqq N$，$A_i\neq B_i$(不可重複)，必勝方法。
三、棋子數 N 顆，取 m~k，其中 $1<m<k\leqq N$，必勝方法。
四、棋子數 N 顆，取 m~k，其中 $1<m<k\leqq N$，$A_i\neq B_i$(不可重複)，必勝方法。
五、棋子數 N 顆，取 $1\leqq B_i\leqq 2A_i$，$A_1\neq N-1$，必勝方法。
說明：A_i：先手第 i 次取棋，B_i：後手第 i 次取棋，N、m、k、i 均為正整數。

貳、研究動機

有種叫作「撿石頭」的遊戲，遊戲的規則很簡單，兩人輪流取石頭，每人每次需取一枚或一枚以上的石頭，但不能超過最大拿取數，直到最後，將石頭拿光的人贏得此遊戲；也可以做相反的規定，最後將石頭拿光的人輸。本研究將拿的次數稍做改變，並研究其中的規則。

參、研究動機

以前有玩過類似的遊戲，老師也推薦我們去探討這類的活動，因為二年級數學下學期的第一個單元就是等差數列，剛開始要找數的規律，所以我們就試著從「撿石頭」的這個遊戲看看可不可以發現什麼。於是我們就利用圍棋來研究我們所要進行的活動。

肆、研究目的

在探討的過程中，了解其中的規律。進而知道在每個不同的條件下，拿到一定的規律時，對方或自己是輸家還是贏家，並找出致勝的方法。

伍、研究設備及器材：

一、圍棋
二、筆記本、筆
三、A4 白紙(4×4、6×6)
四、電腦(Word、Excel、WWW…)

陸、研究過程及方法：

一、棋子數 N 顆，取 1~k，其中 $1<k\leqq N$，必勝方法。

(一)、說明

1.每次取 1~2 顆(當 k=2)

1	2	3	4	5	6	第一回
X	O	O	X	O	O	
7	8	9	10	11	12	第二回
X	O	O	X	O	O	

1^{1}→X先者輸

2^{1}_{2}→1^{1}→X先者勝
↘X先者輸

↗1^{1}→X先者輸
3^{1}_{2}→2^{1}_{2}→X先者勝
↘1^{1}→X先者勝

↗1^{1}→X先者勝
4^{1}_{2}→3^{1}_{2}→2^{1}_{2}→X先者輸
↘ ↘1^{1}→X先者輸
2^{1}_{2}→1^{1}→X先者輸
↘X先者勝

↗1^{1}→X先者輸
5^{1}_{2}→4^{1}_{2}→3^{1}_{2}→2^{1}_{2}→X先者勝
↓ ↘ ↘1^{1}→X先者勝
3^{1}_{2} 2^{1}_{2}→1^{1}→X先者勝
↓↘ ↘X先者輸
2^{1}_{2} 1^{1}→X先者輸
↓↘
1^{1} X先者輸
↓
X先者勝

↗1^{1}→X先者勝
↗2^{1}_{2}→X先者輸
↗3^{1}_{2}→1^{1}→X先者輸
4^{1}_{2}→2^{1}_{2}→1^{1}→X先者輸
↗ ↘X先者勝
6^{1}_{2}→5^{1}_{2}→3^{1}_{2}→2^{1}_{2}→1^{1}→X先者輸
↘ ↘1^{1}→X先者勝
4^{1}_{2}→3^{1}_{2}→2^{1}_{2}→1^{1}→X先者輸
↘ ↘ ↘X先者勝
2^{1}_{2}→1^{1}→X先者勝
↘X先者輸

當棋子數剩下 1、4、7、10…時必輸。必輸數爲首項 1，公差 3 的等差數列，記爲｛1；3｝。

2.每次取 1~3 顆(當 k=3)

第一回	1	2	3	4	5	6	7	8	第二回
	X	O	O	O	X	O	O	O	
第三回	9	10	11	12	13	14	15	16	第四回
	X	O	O	O	X	O	O	O	

1^{1}→X先者輸

2_{2}^{1}→1^{1}→X先者勝

↘X先者輸

↗1^{1}→X先者輸

↗2_{2}^{1}→X後者輸

$3_{\substack{2\\3}}^{1}$→1^{1}→X先者勝

↘X先者輸

↗1^{1}→X先者勝

↗2_{2}^{1}→X先者輸

↗$3_{\substack{2\\3}}^{1}$→1^{1}→X先者輸

↘X先者勝

$4_{\substack{2\\3}}^{1}$→2_{2}^{1}→1^{1}→X先者勝

↘1^{1}↘X先者勝

↘X先者勝

↗1^{1}→X先者輸

↗2_{2}^{1}→X先者勝

↗$3_{\substack{2\\3}}^{1}$→1^{1}→X先者勝

↘X先者輸

↗$4_{\substack{2\\3}}^{1}$→2_{2}^{1}→1→X先者勝

↘X先者輸

↘1^{1}→X先者輸

↗1^{1}→X先者勝

↗2_{2}^{1}→X先者輸

$5_{\substack{2\\3}}^{1}$→$3_{\substack{2\\3}}^{1}$→1^{1}→X先者輸

↘X先者勝

↗1^{1}→X先者輸

↘2_{2}^{1}→X先者勝

當棋子數剩下 1、5、9、13…時必輸。必輸數爲首項 1，公差 4 的等差數列，記爲｛1；4｝。

3.每次取 1~4 顆(當 k=4)

1	2	3	4	5	第一回
X	O	O	O	O	
6	7	8	9	10	第二回
X	O	O	O	O	
11	12	13	14	15	第三回
X	O	O	O	O	
16	17	18	19	20	第四回
X	O	O	O	O	

1^{1}→X先者輸

$2\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$→$1^{1}$→X先者勝
↘X先者輸

↗1^{1}→X先者輸
↗$2\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$→X先者勝
$3\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$→$1^{1}$→X先者勝
↘X先者輸

↗1^{1}→X先者勝
↗$2\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$ ↘
↗$3\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}$→$1^{1}$→X先者輸
↘X先者勝
↗1^{1}→X先者輸
↗$2\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$→X先者勝
$4\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix}$→$1^{1}$→X先者勝
↘X先者輸

↗ 1^{1} → X先者輸
↗ 2^{1}_{2} → X先者勝
↗ $3^{1}_{\substack{2\\3}}$ → 1^{1} → X先者勝
↘ X先者輸
↗ 1^{1} → X先者勝
↗ 2^{1}_{2} → X先者輸
↗ $4^{1}_{\substack{2\\3\\4}}$ → 1^{1} → X先者輸
↘ X先者勝
↗ 1^{1} → X先者勝
↗ 2^{1}_{2} → X先者輸
↗ $3^{1}_{\substack{2\\3}}$ → 1^{1} → X先者輸
↘ X先者勝
↗ 1^{1} → X先者輸
$5^{1}_{\substack{2\\3\\4}}$ → 2^{1}_{2} → X先者勝
↘ 1^{1} → X先者勝

當棋子數剩下 1、6、11、16…時必輸。必輸數爲首項 1，公差 5 的等差數列，記爲｛1；5｝。

4.每次取 1~5 顆(當 k=5)

1	2	3	4	5	6	第一回
X	O	O	O	O	O	
7	8	9	10	11	12	第二回
X	O	O	O	O	O	
13	14	15	16	17	18	第三回
X	O	O	O	O	O	

由 1~2、1~3、1~4 我們可得知規律爲 1+k 所以 1~5 就以 1 爲首項，1+5 爲公差，得：當棋子數剩下 1、7、13…時必輸。必輸數爲首項 1，公差 6 的等差數列，記爲｛1；6｝。

(二)歸納：棋子數 N 顆，取 1~k，其中 1<k≦N。我們可以發現棋子數爲 1 時，先者必敗。而棋子數爲 2~(1+k)時，先者必勝，如此爲一回。而每一輪先手取 h 顆棋子時，後手可以取(1+k)-h 顆，使得剩下棋數的狀況回到前一回的狀況。只要先者將棋子取到必敗點，後者必敗(先者必勝)。必敗點爲首項爲 1 公差爲 1+k 的等差數列，記爲｛1；1+k｝。

棋子數 N 顆，取 1~k，其中 1<k≦N，必勝方法
規律：只要先者將棋子取到必敗點，後者必敗(先者必勝)。必敗點爲首項爲 1 公差爲 1+k 的等差數列，記爲｛1；1+k｝

二、棋子數 N 顆，取 1~k，其中 1<k≦N，Ai≠Bi(不可重複)，必勝方法。

(一)說明：

1.每次取 1~2 顆不重複

1	2	3	4	5	6
X	O	O	X	O	O
7	8	9	10	11	12
X	O	O	X	O	O

狀況會跟可重複時一樣，當棋子數剩下 1、4、7、10…時必輸。必輸數爲首項 1，公差 3 的等差數列，記爲｛1；3｝。

2.每次取 1~3 顆不重複

1	2	3	4	5	6	7	8
X	O	O	O	X	O	O	O
9	10	11	12	13	14	15	16
X	O	O	O	X	O	O	O

我們把樹狀圖轉換成下面的表格，可以發現，棋子數 1~3 顆不可重複取的狀況會跟可重覆時一樣，每四個數爲一循環。

棋數	A1	B1	A2	B2
1(X)				
2(O)	*1(1)*	1(X)		
3(O)	*1(2)*	2(X)		
	2(1)	1(X)		
4(O)	1(3)	2(1)	1(X)	
		3(X)		
	2(2)	1(1)	1(X)	
	3(1)	1(X)		
5(X)	1(4)	2(2)	1(1)	1(X)
		3(1)	1(X)	
	2(3)	1(2)	2(X)	
		3(X)		
	3(2)	1(1)	1(X)	
		2(X)		

6(O)	***1(5)***	2、3(X)		
	2(4)	1(X)、3(O)		
	3(3)	1(O)、2(O)		
7(O)	***1(6)***	2(X)、3(X)		
	2(5)	1、3(X)		
	3(4)	1、2(X)		
8(O)	1(7)	2、3(O)		
	2(6)	1(O)、3(X)		
	3(5)	1、2(X)		
9(X)	1(8)	2(X)、3(O)		
	2(7)	1、3(O)		
	3(6)	1(O)、2(X)		

當棋子數剩下 1、5、9、13…時必輸。必輸數為首項 1，公差 4 的等差數列，記為｛1；4｝。

3.每次取 1~4 顆不重複

1	2	3	4	5
X	O	O	O	O
6	7	8	9	10
X	O	O	O	O
11	12	13	14	15
X	O	O	O	O
16	17	18	19	20
X	O	O	O	O

狀況會跟可重複時一樣，當棋子數剩下 1、6、11、16…時必輸。必輸數為首項 1，公差 5 的等差數列，記為｛1；5｝。

4.每次取 1~5 顆不重複

1	2	3	4	5	6	7
X	O	O	O	O	O	O
8	9	10	11	12	13	
X	O	O	O	O	O	
14	15	16	17	18	19	20
X	O	O	O	O	O	O
21	22	23	24	25	26	
X	O	O	O	O	O	

我們發現當棋子數剩下 1~6 時，勝敗狀況與可重複時一樣，可是當棋子數剩 7 時，卻把可重複的”敗”翻盤成為”勝”，我們觀察改良後的樹狀表格(如下)可以發現：

(1)
在可重複的狀況中，當我們取 3，剩下 4 的時候，對手只要取 3，則會剩下 1，也就是我們必敗。但是在此規則內，因為不可重複，所以我們取 3 時，對手卻無法同時取 3，使我們因此可以獲勝。

(2)
而相同的狀況發生在棋子數為 14 時，若是我們取 3，使棋子剩下 11，對手可以取 5 使棋子剩下 6 顆，而我們不能取 5，於是敗。

(3)
於是我們利用當棋子數剩下 1、8、14、21…時必輸。推論必輸數為首項 1，公差 7、6 的等差數列，記為{1；7、6}。

(請參考附件一)

棋數	A1	B1	A2	B2
1(X)				
2(O)	***1(1)***	1(X)		
3(O)	***1(2)***	2(X)		
	2(1)	1(X)		
4(O)	1(3)	2(1)	1(X)	
		3(X)		
	2(2)	1(1)	1(X)	
	3(1)	1(X)		
5(O)	1(4)	2(2)	1(1)	1(X)
			2(X)	
		3(1)	1(X)	
		4(X)		
	2(3)	1(2)	2(X)	
		2(1)	1(X)	
		3(X)		
	3(2)	1(1)	1(X)	
		2(X)		
	4(1)	1(X)		
6(O)	1(5)	2、3(X)；4(O)		
	2(4)	1(X)；3(O)		
	3(3)	1、2(O)		
	4(2)	1(O)		
	5(1)	1(X)		
7(O)	1(6)	2、3、4(X)；5(O)		
	2(5)	1、3(X)；4(O)		
	3(4)	1、2(X)		
	4(3)	1、2(O)		
	5(2)	1(O)		
8(X)	1(7)	2、4、5(X)；3(O)		
	2(6)	1、3、4(X)；5(O)		
	3(5)	1、2(X)；4(O)		
	4(4)	1、2(X)；3(O)		
	5(3)	1、2、3(X)；4(O)		

5.每次取 1~6 顆不重複

1	2	3	4	5	6	7
X	O	O	O	O	O	O
8	9	10	11	12	13	14
X	O	O	O	O	O	O
15	16	17	18	19	20	21
X	O	O	O	O	O	O

狀況會跟可重複時一樣，當棋子數剩下 1、8、15…時必輸。必輸數爲首項 1，公差 7 的等差數列，記爲｛**1；7**｝。

6.每次取 1~7 顆不重複

1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	O	O	O	O	O	O	O	O
10	11	12	13	14	15	16	17	
X	O	O	O	O	O	O	O	
18	19	20	21	22	23	24	25	26
X	O	O	O	O	O	O	O	O
27	28	29	30	31	32	33	34	
X	O	O	O	O	O	O	O	

當棋子數剩下 1、10、18、27…時必輸。必輸數爲首項 1，公差 9、8 的等差數列，記爲｛**1；9、8**｝。

棋子數 N 顆，取 1~k，其中 1<k≦N，Ai≠Bi(不可重複)，必勝方法。
規律：1+k 若爲奇數，則必勝法則與研究一(可重複取)相同，必敗數爲｛**1；1+k**｝；若 1+k 爲偶數(4 除外)時，必敗數爲首項爲 1，公差爲 1+k，k 的雙等差數列，記爲｛**1；1+k、k**｝。

三、棋子數 N 顆　，取 m~k，其中 1<m<k≦N，必勝方法。

(一)、說明：

1.取 2~3 顆可重複

1	2	3	4	5
X	X	O	O	O
6	7	8	9	10
X	X	O	O	O

1^{1}→X先者輸。

2^{2}→X先者輸。

3^{2}_{3}→1^{1}→X先者贏。

↘

X先者輸。

4^{2}_{3}→2^{2}→X先者贏。

↘

1^{1}→X先者贏。

1^{1}→X先者輸。

↗

5^{2}_{3}→3^{2}_{3}→X先者贏。

↘

2^{2}→X先者贏。

由上面的樹狀圖可以知道棋數 1~2 顆必敗，因爲取棋數是從 2 開始。而棋數 3~5 顆時必勝，因爲可以分別取 2~3 顆，使棋數剩下 1~2 顆對手必敗，則先者必勝，6~10 顆也是一樣的道理。當棋子數剩下 1、2、6、7…時必輸。必輸數爲首項 1、2，公差 5 的雙等差數列，記爲 {**1**、**2**；**5**}。

2.取 2~4 顆可重複

1	2	3	4	5	6
X	X	O	O	O	O
7	8	9	10	11	12
X	X	O	O	O	O

同取 2~3 顆的狀況，可以知道棋數 1~2 顆必敗，因爲取棋數是從 2 開始。而棋數 3~6 顆時必勝，因爲可以分別取 2~4 顆，使棋數剩下 1~2 顆對手必敗，則先者必勝，7~12 顆也是一樣的道理。當棋子數剩下 1、2、7、8…時必輸。必輸數爲首項 1、2，公差 6 的雙等差數列，記爲 {**1**、**2**；**6**}。

1^{1}→X先者輸。

2^{2}→X先者輸。

$3_{3}^{2} \rightarrow 1^{1} \rightarrow$ X先者贏。

↘

X先者輸。

$2^{2} \rightarrow$ X先者贏。

↗

$4_{\substack{3\\4}}^{2} \rightarrow 1^{1} \rightarrow$ X先者贏。

↘

X先者輸。

X先者贏。

↗

$3_{3}^{2} \rightarrow$ X先者輸。

↗

$5_{\substack{3\\4}}^{2} \rightarrow 2^{2} \rightarrow$ X先者贏。

↘

$1^{1} \rightarrow$ X先者贏。

$2^{2} \rightarrow$ 先者輸。

↗

$4_{\substack{3\\4}}^{2} \rightarrow 1^{1} \rightarrow$ X先者贏。

↗ ↘

↑ X先者贏。

↑ $1^{1} \rightarrow$ X先者輸。

↑ ↗

$6_{\substack{3\\4}}^{2} \rightarrow 3_{3}^{2} \rightarrow$ X先者贏。

↘

$2^{2} \rightarrow$ X先者贏。

3.取 2~5 顆可重複

1	2	3	4	5	6	7
X	X	O	O	O	O	O
8	9	10	11	12	13	14
X	X	O	O	O	O	O

由上面取棋數的方法可以知道棋數 1~2 顆必敗，因爲取棋數是從 2 開始。而棋數 3~7 顆時必勝，因爲可以分別取 2~5 顆，使棋數剩下 1~2 顆對手必敗，則先者必勝。必輸數爲｛1、2；7｝

4.取 3~4 顆可重複

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	O	O	O	O
8	9	10	11	12	13	14
X	X	X	O	O	O	O

可以知道棋數 1~3 顆必敗，因爲取棋數是從 3 開始。而棋數 4~7 顆時必勝，因爲可以分別取 3~4 顆，使棋數剩下 1~3 顆對手必敗，則先者必勝。當棋子數剩下 1、2、3、8、9、10…時必輸。必輸數爲首項 1、2、3，公差 7 的三等差數列，記爲｛**1**、2、3；**7**｝。

5.取 3~5 顆可重複

1	2	3	4	5	6	7	8
X	X	X	O	O	O	O	O
9	10	11	12	13	14	15	16
X	X	X	O	O	O	O	O

同取 3~4 顆的狀況，可以知道棋數 1~3 顆必敗，因爲取棋數是從 3 開始。而棋數 4~8 顆時必勝，因爲可以分別取 3~5 顆，使棋數剩下 1~3 顆對手必敗，則先者必勝當棋子數剩下 1、2、3、9、10、11…時必輸。必輸數爲首項 1、2、3，公差 8 的三等差數列，記爲｛**1**、2、3；**8**｝。

(二)、例子說明

假設棋子數有 73 顆，則取棋數爲 5~6 顆的話，先拿的會贏，說明如下：
用上面資料可以推斷出，取 5~6 顆的必敗數爲｛1、2、3、4、5；**11**｝

1~5 顆一定要拿所以輸了	6~11 顆是贏
12~16 顆是輸	17~22 顆是贏
23~27 顆是輸	28~26 顆是贏 ………以此類推

我們可以知道，若是棋子數除以 11 餘 1~5，則先取者必敗，而棋子數除以 11 餘 6~10 或者是整除時，則先取者必勝。於是我們將 73 除以 11，發現餘 7，所以先者必勝，因爲只要先者取 4 或 5，則狀況會回到剩下 3 與 2 的狀況，所以先者必勝。

棋子數 N 顆　，取 m~k，其中 1<m<k≦N，必勝方法。
規律：只要先者將棋子取到必敗點，後者必敗(先者必勝)。必敗點爲首項分別爲 1~m，公差爲 m+k 的多等差數列，記爲｛**1~m**；**m+k**｝。

四、棋子數 N 顆，取 m~k，其中 1<m<k≦N，Ai≠Bi(不可重複)，必勝方法。

1.取 2~3 顆不可重複

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	X	O	O	O	X	X	O	O	O
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	X	O	O	O	X	X	O	O	O

當棋子數剩下 1、2、6、7、11、12、16、17…時必輸。必輸數為首項 1、2，公差 5 的雙等差數列，記為｛1、2；5｝。可以知道棋數 1~2 顆必敗，因為取棋數是從 2 開始。而棋數 3~5 顆時必勝，因為可以分別取 2~3 顆，使棋數剩下 1~2 顆對手必敗，則先者必勝，6~10 顆也是一樣的道理。

2.取 2~4 顆不可重複

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X	O	O	O	O	X	X	O	O	O	O
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	X	O	O	O	O	X	X	O	O	O	O

當棋子數剩下 1、2、7、8、13、14、19、20…時必輸。必輸數為首項 1、2，公差 6 的雙等差數列，記為｛1、2；6｝。同取２~3 顆的狀況，可以知道棋數 1~2 顆必敗，因為取棋數是從 2 開始。而棋數 3~6 顆時必勝，因為可以分別取 2~4 顆，使棋數剩下 1~2 顆對手必敗，則先者必勝，7~12 顆也是一樣的道理。

3.取 2~5 顆不可重複

1	2	3	4	5	6	7
X	X	O	O	O	O	O
8	9	10	11	12	13	14
X	X	O	O	O	O	O

當棋子數剩下 1、2、8、9…時必輸。必輸數為首項 1、2，公差 7 的雙等差數列，記為｛1、2；7｝。同取２~3 顆的狀況，可以知道棋數 1~2 顆必敗，因為取棋數是從 2 開始。而棋數 3~7 顆時必勝，因為可以分別取 2~5 顆，使棋數剩下 1~2 顆對手必敗，則先者必勝，6~10 顆也是一樣的道理。

4.取 3~4 顆不可重複

1	2	3	4	5	6	7
X	X	X	O	O	O	O
8	9	10	11	12	13	14
X	X	X	O	O	O	O

當棋子數剩下 1、2、3、8、9、10…時必輸。必輸數為首項 1、2、3，公差 7 的三等差數列，記為｛1、2、3；7｝，可以知道棋數 1~3 顆必敗，因為取棋數是從 3 開始。而棋數 4~7 顆時必勝，因為可以分別取 3~4 顆，使棋數剩下 1~3 顆對手必敗，則先者必勝，8~14 顆也是一樣的道理。

5.取 3~5 顆不可重複

1	2	3	4	5	6	7	8
X	X	X	O	O	O	O	O
9	10	11	12	13	14	15	16
X	X	X	O	O	O	O	O

當棋子數剩下 1、2、3、9、10、11…時必輸。必輸數爲首項 1、2、3，公差 8 的三等差數列，記爲｛1、2、3；8｝。同取 3~4 顆的狀況，可以知道棋數 1~3 顆必敗，因爲取棋數是從 3 開始。而棋數 4~8 顆時必勝，因爲可以分別取 3~5 顆，使棋數剩下 1~3 顆對手必敗，則先者必勝，9~16 顆也是一樣的道理。

由上面可得知，可重複跟不可重複的結果都是一樣的。

棋子數 N 顆，取 m~k，其中 1<m<k≦N，Ai≠Bi(不可重複)，必勝方法。
規律：同可重複的狀況，只要先者將棋子取到必敗點，後者必敗(先者必勝)。 必敗點爲首項分別爲 1~m，公差爲 m+k 的多等差數列，記爲｛1~m；m+k｝。

五、棋子數 N 顆，取 1≦Bi≦2Ai，A_1≠N-1，必勝方法。

規則：1.只能取 1≦Bi≦2Ai，A_1≠N-1

2.一開始不可惡意取棋至一顆(只有兩顆時除外)

(一)、說明：

1.假設 N 爲 01 時，先取棋者必輸，因爲取到最後一顆的人輸。

2.假設 N 爲 02 時，先取棋者必贏，因爲當棋數爲兩顆時，先者取一顆，其狀況便回到一顆的局面。

3.假設 N 爲 03 時，先取棋者必輸，因爲當棋數爲三顆時，因規則二的限制因此無法將其狀況回到一顆棋時，我們只能取一顆棋子，所以局面便回到棋數爲二的時候。

4.而假設 N 爲 04 時，因取一顆時會到三的局面（此局面有些特別因爲三的局面因爲是第二回因此可取至兩顆），而取兩顆時會回到二的局面，因此必輸。

5.假設 N 爲 05 時，先取棋者必贏，因爲可以取 1 顆回到四顆的局面，使後者必輸，所以先取棋者必贏。

6.假設 N 爲 06 時，先者必輸，因爲在六顆時，先者取 1 到五顆的局面，先者取 2 大四顆時，後者因第一條規則便可取顆使先者輸。

7.假設 N 爲 07 時，先者 1 取回到六顆回到局面便可獲勝。

8.假設 N 爲 08 時，先者取 2 回到六顆即可獲勝。

9.假設 N 爲 09 時，先者取 1 回到八的局面(對方獲勝)，先者取 2 回到七顆的局面(對方獲勝)，而取 3 回到六顆的局面(在這個局面因規則一所以後者可取 5 顆)，因此先者必輸。

10.假設 N 爲 10 和 11 和 12 和 13 的局面都如同狀況 05 和 07 和 08 將他們取到必輸的數上。

（就上面幾點我們推出了下列的表格）

棋子顆數	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
結果	x	o	x	x	o	x	o	o	x	o	o	o	o	x
取 1		o	x	x	o	x	o	x	x	o	x	x	o	x
取 2			o	x	x	x	x	o	x	x	o	x	x	x
取 3				o	x	x	x	x	x	x	x	o	x	x
取 4					o	x	x	x	x	x	x	x	x	x
取 5						o	x	x	x	x	x	x	x	x
取 6							o	x	x	x	x	x	x	x
取 7								o	x	x	x	x	x	x
取 8									o	x	x	x	x	x
取 9										o	x	x	x	x
取 10											o	x	x	x
取 11												o	x	x
取 12													o	x
取 13														o

（圖一）由上圖我們可知取至 3、4、6、9、14………的人會輸。

(二)、根據前面幾項我們知道推出必輸的數很重要，而我們在討論的時候也注意到這個現象，因此我們將他整理出一個由小到大的數列，並列出它的差。

<table>
<tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>9</td><td>14</td><td>22</td><td>35</td><td>56</td><td>90</td><td>(必輸的數)</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">8</td><td colspan="2">21</td><td></td><td rowspan="2">(差)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">13</td><td colspan="2">34</td></tr>
</table>

（必輸數的表格與差）

就上表我們看見必輸的數和它們的差，一般來說差是數列中最重要的角色，因此我們將差列出。

1	2	3	5	8	13	21	34	(差)
就(圖一)推出來	就(圖一)推出來	1+2	2+3	3+5	5+8	8+13	13+21	(由來)

(前幾項必須由工推出)

(三)、因爲必輸的數列已推出，所以不管任何數都爲先取者佔盡優勢(除了先者取到必輸的數列)，只要先取者將棋子數取至最近的必輸數。

(四)、推論：必輸的數列和公式

３、４、６、９、１４、２２、３５、５６、９０、１４５、２３４…………

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	(數字)	
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8		(差)

就上述表格來說，因 $a_2 - a_1 = d_1 \quad a_3 - a_2 = d_2 \quad a_4 - a_3 = d_3 \quad a_5 - a_4 = d_4 \quad a_6 - a_5 = d_5$

而差的規律是 $d_1 + d_2 = d_3 \quad d_2 + d_3 = d_4 \quad d_3 + d_4 = d_5 \quad d_4 + d_5 = d_6$ ……以此類推

而且 $a_1 + d_1 = a_2 \quad a_2 + d_2 = a_3 \quad a_3 + d_3 = a_4 \quad a_4 + d_4 = a_5 \quad a_5 + d_5 = a_6$ ……以此類推

柒、研究結果

一、棋子數 N 顆，取 1~k，其中 1<k≦N，必勝方法。

只要先者將棋子取到必敗點，後者必敗(先者必勝)。必敗點爲首項爲 1 公差爲 1+k 的等差數列。

二、棋子數 N 顆，取 1~k，其中 1<k≦N，Ai≠Bi(不可重複)，必勝方法。

1. 當 1+k 爲奇數時，則必勝法則與研究一(可重複取)相同，必敗數爲｛1；1+k｝
2. 若 1+k 爲偶數(4 除外)時，必敗數爲首項爲 1，公差爲 1+k，k 的雙等差數列｛1；1+k、k｝。

三、棋子數 N 顆，取 m~k，其中 1<m<k≦N，必勝方法。

只要先者將棋子取到必敗點，後者必敗(先者必勝)。必敗點爲首項分別爲 1~m，公差爲 m+k 的多等差數列，記爲｛1~m；m+k｝。

四、棋子數 N 顆，取 m~k，其中 1<m<k≦N，Ai≠Bi(不可重複)，必勝方法。

同可重複的狀況，只要先者將棋子取到必敗點，後者必敗(先者必勝)。必敗點爲首項分別爲 1~m，公差爲 m+k 的多等差數列，記爲｛1~m；m+k｝。

五、棋子數 N 顆，取 1≦Bi≦2Ai，A_1≠N-1，必勝方法。

必輸點爲 1 與 3、4、6、9、14…的有規律數列，其規律爲 $a_n = a_{n-1} + d_{n-1}$ 其中 n>3；$a_1 = 3$；$a_2 = 4$；$a_3 = 6$；$d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$。(可參考附件一)

捌、討論

一、在研究(二)的必勝狀況中，我們發現，當 1+k 爲偶數時，必敗數爲首項 1，公差 1+k 的等差數列，然而，1+k 爲 4(當取棋數爲 1~3 時)，卻是例外!，利用觀察樹狀表格後，我們可以發現，1+k 爲偶數時與可重複的狀況有差異，是因爲當我們取 $\frac{1+k}{2}$ 這個數時，對手不能同時取相同的數(因爲不可重複)，而不能讓取棋狀況回到上一個循環內，以至於會有翻盤的狀況產生。但是因爲 k=3 時數字太小，所以無法產生翻盤的狀況。

二、在研究(五)中，如果將上限調整為 3 倍時，會不會有相同的規律呢？於是我們利用 Excel 軟體，將 1~100 的狀況找出來，發現當棋子數剩下 3、4、5、7、9、12、16、22、30、41、56、77 時為必敗點，但是其中的規律，因為時間有限，在我們的研究期限中，還沒有辦法找出來，或許可以留做以後繼續研究的內容。

玖、結論

一、藉由本文討論，可知在玩撿石頭遊戲時，單純的遊戲利用規則的變化之後，其實很有挑戰性，而且藉由表格、樹狀圖、電腦的協助，可以發現大部分的規律都跟我們學過的等差有關聯性。

二、我們將來的目標，是研究出不同規則時(例如取棋數上限為 3 倍等)，撿石頭的必勝法則，或許可以出一本專屬的撿石頭遊戲攻略。

三、在尋找撿石頭遊戲規律中，我們學會了如何運用學過的數學概念去思考、探討、預測，並從中體會到學習數學的樂趣。

拾、參考資料及其他

一、http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_03_2_02/index.html

二、http://residence.educities.edu.tw/oddest/math242.htm#op1

三、中華民國第四十六屆中小學科學展覽活動優勝作品專輯。

四、沖田浩(民 96)：**一玩就上癮的數學遊戲**，究竟出版社

參展心得與活動照片

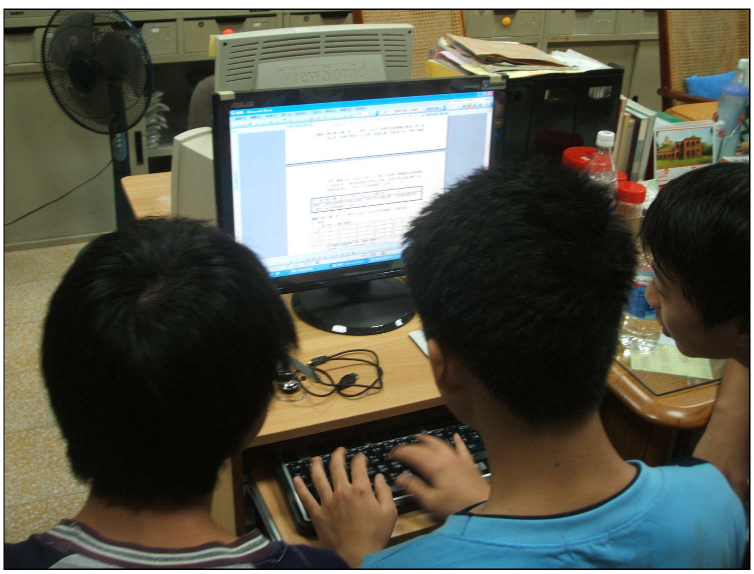
一、其實我對數學根本沒有什麼天份，可以說是算爛的那種。可是其他人，都很鼓勵我去科展，因為可以學到很多東西，而且也可以充實自己的數學能力。來到之後，雖然聽不大懂，可是還蠻好玩的。有時候他們會耍白痴，但更多時候他們會努力想出解決方式，是很可靠啦！過程中，我都笑個不停，因為他們常常說一些很無聊的東西。討論的時候，他們腦筋動的很快，有人就曾經想到發燒，想的出來，他們多辛苦。

二、我個人的表達能力不太好，總是要講很久，他們才聽的懂我個人的想法，當我跟其中一人討論科展和其他東西的時候，也有同學用心的自己一個人的在陰暗的小角落，自己跟自己討論。我不知道我們是不是最好的一組，可是我知道我們是做的最快樂的一組！

三、我是一位對數學很有興趣的人，這次老師找我做數學的科展，我二話不說的答應了。雖然有理解力，可是卻沒有細心，因為這樣所以我的考試都考的很不好，不過做任何事我都會盡心盡力去把它完成，而我沒有興趣的事情，當然也就沒有動力去做。剛開始做的時候，感覺很難，不過越做越深、越做越難，到後來就知道原來是這樣推出來的。

四、我發現科展就像玩遊戲一樣，是很刺激的一件事。而刺激到頭腦，頭就越來越痛了，有時還會出現很好笑的事情，不過老師能找我來做科展，我真的很開心！不過最重要的是我們從中的到的知識與經驗，更能使我們了解到數學家的偉大及辛勞。我希望我們的作品能被看好，因為這是我們心血的結晶，也是死了無數腦細胞後的想法。

照片一：用棋子取數，絞盡腦汁想辦法找出規律，紀錄過後的紙張散落在桌面上。



照片二：努力的打著研究後的書面資料。其他人七嘴八舌的補充內容。

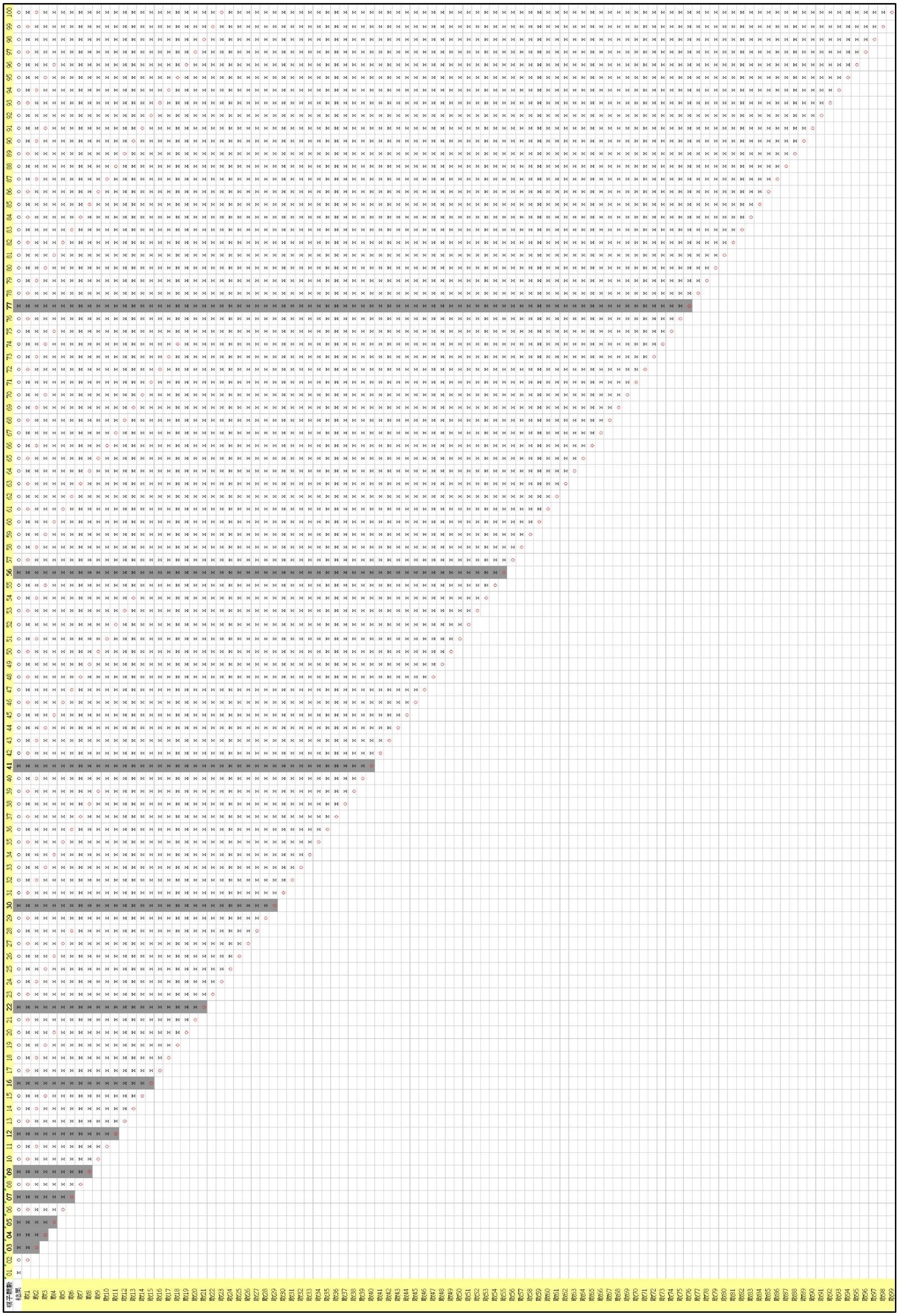
附件一：取棋數 1~5 不可重複，N=21 的樹狀表格。

棋數	A1	B1	A2	B2
1(X)				
2(O)	*1(1)*	1(X)		
3(O)	*1(2)*	2(X)		
	2(1)	1(X)		
4(O)	1(3)	2(1)	1(X)	
		3(X)		
	2(2)	1(1)	1(X)	
	3(1)	1(X)		
5(O)	1(4)	2(2)	1(1)	1(X)
			2(X)	
		3(1)	1(X)	
		4(X)		
	2(3)	1(2)	2(X)	
		2(1)	1(X)	
		3(X)		
	3(2)	1(1)	1(X)	
		2(X)		
	4(1)	1(X)		
6(O)	1(5)	2、3(X)；4(O)		
	2(4)	1(X)；3(O)		
	3(3)	1、2(O)		
	4(2)	1(O)		
	5(1)	1(X)		
7(O)	1(6)	2、3、4(X)；5(O)		
	2(5)	1、3(X)；4(O)		
	3(4)	1、2(X)		
	4(3)	1、2(O)		
	5(2)	1(O)		
8(X)	1(7)	2、4、5(X)；3(O)		
	2(6)	1、3、4(X)；5(O)		
	3(5)	1、2(X)；4(O)		
	4(4)	1、2(X)；3(O)		
	5(3)	1、2、3(X)；4(O)		

棋數		
9(O)	*1(8)*	2、3、4、5(X)
	2(7)	3(O)
	3(6)	5(O)
	4(5)	1、2、3、5(X)
	5(4)	3(O)
10(O)	1(9)	1(O)
	2(8)	1、3、4、5(X)
	3(7)	1、2、4、5(X)
	4(6)	5(O)
	5(5)	4(O)
11(O)	1(10)	2、3(O)
	2(9)	1(O)
	3(8)	1、2、4、5(X)
	4(7)	3(O)
	5(6)	1、2、3、4(X)
12(O)	1(11)	3、5
	2(10)	3
	3(9)	1
	4(8)	X
	5(7)	3
13(O)	1(12)	4
	2(11)	3、5
	3(10)	2
	4(9)	1
	5(8)	X
14(X)	1(13)	5
	2(12)	4
	3(11)	5
	4(10)	2、3
	5(9)	1
15(O)	*1(14)*	X
	2(13)	5
	3(12)	4
	4(11)	3、5
	5(10)	2、3

棋數		
16(O)	*1(15)*	X
	2(14)	X
	3(13)	5
	4(12)	X
	5(11)	3
17(O)	1(16)	2、4
	2(15)	1
	3(14)	X
	4(13)	5
	5(12)	4
18(O)	1(17)	3
	2(16)	1、4
	3(15)	1
	4(14)	X
	5(13)	X
19(O)	1(18)	4、5
	2(17)	3
	3(16)	1、2、4
	4(15)	1
	5(14)	X
20(O)	1(19)	5
	2(18)	4、5
	3(17)	X
	4(16)	1、2
	5(15)	1
21(O)	1(20)	6
	2(19)	4、6
	3(18)	X
	4(17)	1、3
	5(16)	2

附件二：棋子數 N 顆，取 1≦Bi≦2Ai，A_1≠N-1，N=100 的狀況圖。



附件三：棋子數 N 顆，取 $1 \leqq B_i \leqq 3A_i$，$A_1 \neq N-1$，N=100 的狀況圖。