中華民國第四十一屆中小學科學展覽會展品送展表

作品名稱	什麼時候好人受獎？壞人受罰？			科別	數學科
				組別	國中組
作者姓名	1.簡于婷	2.廖珮婷	3.林怡伶	4.賴晨亞	
出生日期					
就讀年級	一年級	年級	年級	年級	
工作項目及具體貢獻	1.引起動機 2.資料蒐集	1.問題探討 2.資料蒐集	1.資料處理 2.協助推算	1.資料分析 2.問題解答	
學校	（全名）宜蘭縣立壯圍國民中學			校長姓名	張弘儀
	地址：宜蘭縣壯圍鄉壯五路　號			電話	(03)9381773
指導人員	黃雅玲	指導項目及具體貢獻			

一、作者最多限填四人，詳列作者對本作品之具體貢獻，區分主要作者與次要作者，依序填寫作者姓名欄（1.為主要作者 2.為次要作者，餘類推），並請詳細填寫作者就讀年級。

二、指導人員最多限填二人，僅提供儀器、設備或行政支援均不得視同指導工作。未從事指導工作，而列入指導人員者，報請主管教育行政機關查明處理。

宜蘭縣第四十一屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

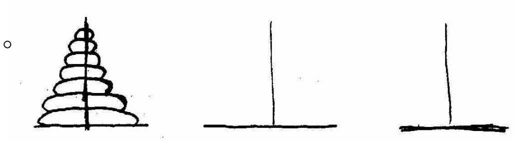
組　　別：國中組

作品名稱：什麼時候好人受獎？壞人受罰？

編號：

一、研究動機：

國小上電腦課時，老師讓我們玩益智遊戲，其中有一題是有 3 根棒子，另外有很多銀圈（如圖），然後去發現搬動銀圈所需的次數，而且每次搬動時，大的銀圈不能放在小的銀圈上面，那時是利用滑鼠在螢幕上移動，我想利用此深入探討，另外再變更一些條件，於是召集一些志同道合的同學一起來做研究，雖然不知道可以探討些什麼，但經過這些歷程我們的獲益將是很多的。



二、研究目的：

取任意個銀圈，再加上一些不同的條件，去探討所需搬移的次數。

三、文獻探討：

當我將我的想法告訴阿姨時，阿姨說她高中時好像有看過類似的題目，因為阿姨很懷舊。將以前的課本都留了下來，所以我們就奮力地找高中課本，終於皇天不負苦心人。在基礎數第一冊中找到了，為了不影響自己的想法，所以完全不看解答，題目上有下列的傳說：

在古印度一個廟裏有 64 個大小不同的銀圈，從大而小由下而上的排列在三根金棒中的一根（如上圖），從那時候開始，教士們就開始搬動銀圈，每次從一根金棒上搬動一個銀圈到別根金棒上，但大圈不能放在小圈的上面，他們的目的是要依照這個規則把這些銀圈全部搬到另一根金棒上，據說這個目的達到時，好人必受獎賞，而壞人將受懲罰。

四、研究用具：

(1)用卡紙製 4 根棒子來替代文中的金棒。

(2)以鐵絲做成 10 個大小不同的圓圈，再以童軍繩環繞其外，製成 10 銀圈。

(3)紙。

(4)筆。

五、研究過程和方法：

(一)有三根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到小→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來一樣，移動時不需考慮大小銀圈的排列順序。

n：表示銀圈的個數。

S_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

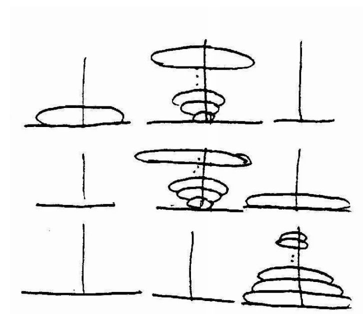
方法：一根金棒放 n 個銀圈，剩二根金棒是空的。

1.先將上面 $n-1$ 個銀圈依序移到同一根金棒上，需要 $n-1$ 次。

2.將最大的銀圈移到另一根空的金棒上，需要 1 次。

3.再將 $n-1$ 個銀圈移到最大的銀圈上，需要 $n-1$ 次。

所以總共需要 $(n-1)+1+(n-1)=n-1+1+n-1=\underline{2n-1}$ 次。



$n=1$ ，$S_1=1$

$n=2$ ，$S_2=3$

$n=3$ ，$S_3=5$

$n=4$ ，$S_4=7$

$n=5$ ，$S_5=9$

$n=6$ ，$S_6=11$

$n=7$ ，$S_7=13$

$n=8$ ，$S_8=15$

⋮

(二)有三根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到小→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來的一樣，移動時大銀圈一定要放在小銀圈下面。

n：表示銀圈的個數。

S_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

方法：將銀圈編號，銀圈愈大，編號數字愈大。

1.n＝1，將 移到另一金棒上共需 1 次，所以 S_1＝1。

2.n＝2， 先將 移到另一根金棒上，需要 1 次。
將 移到另一空的金棒上，需要 1 次。 $2S_1+1$
再將 移到 上，需要 1 次。

所以總共需要 1＋1＋1＝2×1＋1＝3 次。

3.n＝3， 先將 移到同一棒上，需要 3 次
（也就是 S_2 次） $2S_2+1$
將 移到空的棒上，需要 1 次。
再將 移到 上，需要 3 次。

所以總共需要 3＋1＋1＝2×3＋1＝7 次。

4.n＝4， 先將 ～ 移到同一棒上，需要 7 次
（也就是 S_3 次） $2S_3+1$
將 移到空的棒上，需要 1 次。
再將 ～ 移到 上，需要 7 次。

所以總共需要 7＋1＋7＝2×7＋1＝15 次。

5.n＝5， 先將 ～ 移到同一棒上，需要 15 次
（也就是 S4 次） $2S_4+1$
將 移到空的棒上，需要 1 次。
再將 ～ 移到 上，需要 15 次。

所以總共需要 15＋1＋15＝2×15＋1＝31 次。

6.n＝6， 先將 ～ 移到同一棒上，需要 31 次
（也就是 S5 次） $2S_5+1$
將 移到空的棒上，需要 1 次。
再將 ～ 移到 上，需要 31 次。

所以總共需要 31＋1＋31＝2×31＋1＝63 次。

$n=1$ ，$S_1=1$

$n=2$ ，$S_2=3$

$n=3$ ，$S_3=7$

$n=4$ ，$S_4=15$

$n=5$ ，$S_5=31$

$n=6$ ，$S_6=63$

⋮

(三)有四根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來一樣，移動時不需考慮大小銀圈的排列順序。

n：表示銀圈的個數。

S_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

方法：一根金棒上放 n 個銀圈，剩三根金棒是空的。

1.先將上面 $n-1$ 個銀圈依序移到另二根金棒上，需要 $n-1$ 次。

2.將最大的銀圈移到空的金棒上，需要 1 次。

3.再將二根金棒上共 $n-1$ 個銀圈移到最大的銀圈上，需要 $n-1$ 次。

所以總共需要 $(n-1)+1+(n-1)=\underline{\underline{2n-1}}$ 次。

$n=1$ ，$S_1=1$

$n=2$ ，$S_2=3$

$n=3$ ，$S_3=5$

$n=4$ ，$S_4=7$

$n=5$ ，$S_5=9$

$n=6$ ，$S_6=11$

$n=7$ ，$S_7=13$

$n=8$ ，$S_8=15$

⋮

(四)有四根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到小→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來的一樣，移動時大銀圈一定要放在小銀圈的下面。

n：表示銀圈的個數。

S'_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

S_n：在(二)條件下，n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

方法：將銀圈編號，銀圈愈大，編號數字愈大。

（理論上）

1. $n=1$，$S'_1=1$
2. $n=2$，$S'_2=3$
3. $n=3$，$S'_3=5$
4. $n=4$，
$$S'_1+S_3+S'_1=1+7+1=9$$
$$S'_2+S_2+S'_2=3+3+3=9$$
$$S'_3+S_1+S'_3=5+1+5=11$$
$$\therefore S'_4=9$$

5.n＝5， $S'_1+S_4+S'_1=1+15+1=17$

$S'_2+S_3+S'_2=3+7+3=13$

$S'_3+S_2+S'_3=5+3+5=13$

$S'_4+S_1+S'_4=9+1+9=19$

$\therefore S'_5=13$

6.n＝6， $S'_1+S_5+S'_1=1+31+1=33$

$S'_2+S_4+S'_2=3+15+3=21$

$S'_3+S_3+S'_3=5+7+5=17$

$S'_4+S_2+S'_4=9+3+9=21$

$S'_5+S_1+S'_5=13+1+13=27$

$\therefore S'_6=17$

7.n＝7， $S'_1+S_6+S'_1=1+63+1=65$

$S'_2+S_5+S'_2=3+31+3=37$

$S'_3+S_4+S'_3=5+15+5=25$

$S'_4+S_3+S'_4=9+7+9=25$

$S'_5+S_2+S'_5=13+3+13=29$

$S'_6+S_1+S'_6=17+1+17=35$

$\therefore S'_7=25$

8.n＝8， $S'_1+S_7+S'_1=1+127+1=129$

$S'_2+S_6+S'_2=3+63+3=69$

$S'_3+S_5+S'_3=5+31+5=41$

$S'_4+S_4+S'_4=9+15+9=33$

$S'_5+S_3+S'_5=13+7+13=33$

$S'_6+S_2+S'_6=17+3+17=37$

$S'_7+S_1+S'_7=25+1+25=51$

$\therefore S'_8=33$

9.n＝9， $S'_1+S_8+S'_1=1+255+1=257$

$S'_2+S_7+S'_2=3+127+3=133$

$S'_3+S_6+S'_3=5+63+5=73$

$S'_4+S_5+S'_4=9+31+9=49$

$S'_5+S_4+S'_5=13+15+13=41$

$S'_6+S_3+S'_6=17+7+17=41$

$S'_7+S_2+S'_7=25+3+25=53$

$S'_8+S_1+S'_8=33+1+33=67$

$\therefore S'_9=41$

10.n＝10， $S'_1+S_9+S'_1=1+511+1=513$

$S'_2+S_8+S'_2=3+255+3=261$

$S'_3+S_7+S'_3=5+127+5=137$

$S'_4+S_6+S'_4=9+63+9=81$

$S'_5+S_5+S'_5=13+31+13=57$

$S'_6+S_4+S'_6=17+15+17=49$

$S'_7+S_3+S'_7=25+7+25=57$

$S'_8+S_2+S'_8=33+3+33=69$

$S'_9+S_1+S'_9=41+1+41=83$

$\therefore S'_{10}=49$

由上我們發現要求 S'_n 的最少次數，大概發生在 $\begin{cases} S'_{\frac{n-1}{2}}+S_{\frac{n+1}{2}}+S'_{\frac{n-1}{2}} \\ S'_{\frac{n}{2}}+S_{\frac{n}{2}}+S'_{\frac{n}{2}} \\ S'_{\frac{n+1}{2}}+S_{\frac{n-1}{2}}+S'_{\frac{n+1}{2}} \end{cases}$

11.n＝11， $S'_5+S_6+S'_5=13+63+13=89$

$S'_6+S_5+S'_6=17+31+17=65$

$S'_7+S_4+S'_7=25+15+25=65$

$\therefore S'_{11}=65$

12.n＝12， $S'_5+S_7+S'_5=13+127+13=153$

$S'_6+S_6+S'_6=17+63+17=97$

$S'_7+S_5+S'_7=25+31+25=81$

$\therefore S'_{12}=81$

13.n＝13， $S'_6+S_7+S'_6=17+127+17=161$

$S'_7+S_6+S'_7=25+63+25=113$

$S'_8+S_5+S'_8=33+31+33=97$

$\therefore S'_{13}=97$

14.n＝14， $S'_6+S_8+S'_6=17+255+17=289$

$S'_7+S_7+S'_7=25+127+25=177$

$S'_8+S_6+S'_8=33+63+33=129$

$S'_9+S_5+S'_9=41+31+41=113$

$\therefore S'_{14}=113$

15.n＝15， $S'_7+S_8+S'_7=25+255+25=305$

$S'_8+S_7+S'_8=33+127+33=193$

$S'_9+S_6+S'_9=41+63+41=145$

$S'_{10}+S_5+S'_{10}=49+31+49=129$

$\therefore S'_{15}=129$

16.n＝16， $S'_8+S_8+S'_8=33+255+33=321$

$S'_9+S_7+S'_9=41+127+41=209$

$S'_{10}+S_6+S'_{10}=49+63+49=161$

$S'_{11}+S_5+S'_{11}=65+31+65=161$

$\therefore S'_{16}=161$

17.n＝17， $S'_8+S_9+S'_8=33+511+33=577$

$S'_9+S_8+S'_9=41+255+41=347$

$S'_{10}+S_7+S'_{10}=49+127+49=225$

$S'_{11}+S_6+S'_{11}=65+63+65=193$

$\therefore S'_{17}=193$

18.n＝18， $S'_9+S_9+S'_9=41+511+41=593$

$S'_{10}+S_8+S'_{10}=49+255+49=343$

$S'_{11}+S_7+S'_{11}=65+127+65=257$

$S'_{12}+S_6+S'_{12}=81+63+81=225$

$\therefore S'_{18}=225$

19.n＝19， $S'_9+S_{10}+S'_9=41+1023+41=1105$

$S'_{10}+S_9+S'_{10}=49+511+49=609$

$S'_{11}+S_8+S'_{11}=65+255+65=385$

$S'_{12}+S_7+S'_{12}=81+127+81=289$

$S'_{13}+S_6+S'_{13}=97+63+97=257$

$\therefore S'_{19}=257$

20.n＝20， $S'_{10}+S_{10}+S'_{10}=49+1023+49=1121$

$S'_{11}+S_9+S'_{11}=65+511+65=637$

$S'_{12}+S_8+S'_{12}=81+255+81=417$

$S'_{13}+S_7+S'_{13}=97+127+97=321$

$S'_{14}+S_6+S'_{14}=113+63+113=289$

$\therefore S'_{20}=289$

21.n＝21， $S'_{12}+S_9+S'_{12}=81+511+81=673$

$S'_{13}+S_8+S'_{13}=97+255+97=449$

$S'_{14}+S_7+S'_{14}=113+127+113=353$

$S'_{15}+S_6+S'_{15}=129+63+129=321$

$\therefore S'_{21}=321$

22.n＝22， $S'_{13}+S_9+S'_{13}=97+511+97=705$

$S'_{14}+S_8+S'_{14}=113+255+113=481$

$S'_{15}+S_7+S'_{15}=129+127+129=385$

$S'_{16}+S_6+S'_{16}=161+63+161=385$

$\therefore S'_{22}=385$

$n=1$，$S'_1=1$

$n=2$，$S'_2=3$

$n=3$，$S'_3=5$

$n=4$，$S'_4=9$

$n=5$，$S'_5=13$

$n=6$，$S'_6=17$

$n=7$，$S'_7=25$

$n=8$，$S'_8=33$

$n=9$，$S'_9=41$

$n=10$，$S'_{10}=49$

$n=11$，$S'_{11}=65$

$n=12$，$S'_{12}=81$

$n=13$，$S'_{13}=97$

$n=14$，$S'_{14}=113$

$n=15$，$S'_{15}=129$

$n=16$，$S'_{16}=161$

$n=17$，$S'_{17}=193$

$n=18$，$S'_{18}=225$

$n=19$，$S'_{19}=257$

$n=20$，$S'_{20}=289$

$n=21$，$S'_{21}=321$

$n=22$，$S'_{22}=385$

$\vdots$

六、研究結果：

(一)有三根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到小→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來一樣，移動時不需考慮銀圈大小的排列順序。

n：表示銀圈的數。

S_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）

$n=1$，$S_1=1$

$n=2$，$S_2=3$

$n=3$，$S_3=5$

$n=4$，$S_4=7$

$n=5$，$S_5=9$

$n=6$，$S_6=11$

$n=7$，$S_7=13$

$n=8$，$S_8=15$

⋮

結果：我們發現 $S_1=2\times1-1$，$S_2=2\times2-1$，$S_3=2\times3-1$，$S_4=2\times4-1$，$S_5=2\times5-1$，$S_6=2\times6-1$，$S_7=2\times7-1$，$S_8=2\times8-1$，由以上我們可以推論出 $S_n=2\times n-1=2n-1$，所以當銀圈有 64 個，即 $n=64$，$S_{64}=2\times64-1=127$，也就是說有 64 個銀圈，在上述條件下需搬移 127 次。

(二)有三根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到小→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來一樣，移動時大銀圈一定要放在小銀圈下面。

n：表示銀圈的個數。

S_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

$n=1$ ，$S_1=1$

$n=2$ ，$S_2=3$

$n=3$ ，$S_3=7$

$n=4$ ，$S_4=15$

$n=5$ ，$S_5=31$

$n=6$ ，$S_6=63$

$n=7$ ，$S_7=127$

$\vdots$

結果：1.我們發現 $S_n=2\times S_{n-1}+1=2S_{n-1}+1$，但是當我們要知道 S_{64} 等於多少必須知道 S_{63} 是多少，要知道 S_{63} 又必須知道 S_{62}，以此類推，我必須知道 S_1 推 S_2，知道 S_2 推 S_3，………，S_1、S_2、S_3……S_{63} 都必須要知道，雖然此法可行，但是不夠快速。

2.我們發現 1　3　7　15　31　………

2　$4=2^2$　$8=2^3$　$16=2^4$

我們可以將 S_n 改寫：$S_1=1$，$S_2=1+2^1$，
$S_3=3+2^2=1+2^1+2^2$，$S_4=7+2^2=1+2^1+2^2+2^3$，
$S_5=15+2^4=1+2^1+2^2+2^3+2^4$，………，所以我們可以推論出 $S_n=1+2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots+2^{n-1}$，又因任何數的零次方都是 1，所以我們可以改寫：$S_n=2^0+2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots+2^{n-1}$。因爲 2^0、2^1、2^2、………2^{n-1}，前後項是呈倍數關係，於是試了很多方法，我想到了指數律，因此我先找出 $2S_n$（因爲後面的數是前面的數的 2 倍，所以找 $2S_n$，如果是 5 倍就找 $5S_n$）。

$2S_n=2(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots\cdots+2^{n-1})$再利用分配律乘開

$=2\times2^0+2\times2^1+2\times2^2+\cdots\cdots+2\times2^{n-1}$，再利用指數律合併

$=2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots+2^n$

$2S_n-S_n=(2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n)-(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})$

去括號原則，括號前面是＋號去括號不變號，括號前面是－號，去括號要變號

$(2-1)S_n=2^1+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^n-2^0-2^1-2^2-\cdots\cdots-2^{n-1}$

相反數相加爲零

$1S_n=2^n-2^0$

$S_n=2^n-1$

當 $n=64$，$S_{64}=2^{64}-1$，用計算機我們只能算到 $2^{26}=67108864$，還要再乘以 2^{28}，因此 2^{64} 是非常龐大的，必須要利用電腦才可能算得出來，那麼要完成古印度傳說，可能要花費很多的時間。

(三)有四根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到小→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來一樣，移動時不需考慮銀圈大小的排列順序。

n：表示銀圈的個數。

S_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

$n=1$ ，$S_1=1$

$n=2$ ，$S_2=3$

$n=3$ ，$S_3=5$

$n=4$ ，$S_4=7$

$n=5$ ，$S_5=9$

$n=6$ ，$S_6=11$

$n=7$ ，$S_7=13$

$n=8$ ，$S_8=15$

⋮

結果：S_1、S_2………S_8 得到的結果和(一)是一樣的，所以 $S_n=2n-1$，

所以 $S_{64}=2\times 64-1=127$

(四)有四根金棒，10 個大小不同的銀圈在同一根金棒上（排列方式：由大到小→由下到上），將這些銀圈移到另一根金棒上，排列方式和原來一樣，移動時大銀圈一定要在小銀圈下面。

n：表示銀圈的個數。

S'_n：表示 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

S_n：符合(二)之 n 個銀圈所需搬移的次數（最少次數）。

$n=1$，$S'_1=1$

$n=2$，$S'_2=3$

$n=3$，$S'_3=5$

$n=4$，$S'_4=9$

$n=5$，$S'_5=13$

$n=6$，$S'_6=17$

$n=7$，$S'_7=25$

$n=8$，$S'_8=33$

$n=9$，$S'_9=41$

$n=10$，$S'_{10}=49$

$n=11$，$S'_{11}=65$

$n=12$，$S'_{12}=81$

$n=13$，$S'_{13}=97$

$n=14$，$S'_{14}=113$

$n=15$，$S'_{15}=129$

$n=16$，$S'_{16}=161$

$n=17$，$S'_{17}=193$

$n=18$，$S'_{18}=225$

$n=19$，$S'_{19}=257$

$n=20$，$S'_{20}=289$

$n=21$，$S'_{21}=321$

$n=22$，$S'_{22}=385$

⋮

結果：我們依序將 S'_1、S'_2、S'_3………寫出發現

$n=1$，$S'_1=1$		
	$2=2^1$	共 1+1 個 2^1
$n=2$，$S'_2=3$		
	2	
$n=3$，$S'_3=5$		
	$4=2^2$	
$n=4$，$S'_4=9$		
	4	共 2+1 個 2^2
$n=5$，$S'_5=13$		
	4	
$n=6$，$S'_6=17$		
	$8=2^3$	
$n=7$，$S'_7=25$		
	8	共 3+1 個 2^3
$n=8$，$S'_8=33$		
	8	
$n=9$，$S'_9=41$		
	8	
$n=10$，$S'_{10}=49$		
	$16=2^4$	
$n=11$，$S'_{11}=65$		
	16	
$n=12$，$S'_{12}=81$		
	16	共 4+1 個 2^4
$n=13$，$S'_{13}=97$		
	16	
$n=14$，$S'_{14}=113$		
	16	
$n=15$，$S'_{15}=129$		
	$32=2^5$	
$n=16$，$S'_{16}=161$		
	32	
$n=17$，$S'_{17}=193$		
	32	共 5+1 個 2^5
$n=18$，$S'_{18}=225$		
	32	
$n=19$，$S'_{19}=257$		
	32	
$n=20$，$S'_{20}=289$		
	32	
$n=21$，$S'_{21}=321$		
	$64=2^6$	
$n=22$，$S'_{22}=385$		

前後項間的差有 2^1、2^2、2^3、2^4、2^5、2^6、………而且有一定的規律存在 當差數是 2^1 時，這個差數會出現 $1+1$ 次，當差數是 2^2

時，這個差數會出現 2＋1 次，當差數是 2^3 時，這個差數會出現 3＋1 次，………，也就是說當差數是 2^m 時，這個差數會出現 m＋1 次。這個問題裏我們發現它的規律性，但是就我們目前所學的，我們無法歸納出一個通式來表示這個問題的結果，所以只能進行到此。

七、討論：

前述之(一)和(三)很容易操作。

但是(二)、(四)如果要操作起來會比較麻煩，在操作的過程中你必須注意一些原則才不會影響搬移的次數。

例如：(二)中，當 n＝7 時，我們會先設法將　～　搬移到另一根金棒上，剩下的二根金棒上有一個是空的，一個放置　這個最大的銀圈，因為條件中有規定小銀圈不能在大銀圈之下，所以　我們可以〝視而不見〞，但為了完成目標我們必須利用這二根金棒，將　～　移至有　的那根金棒上。

因為　～　總共有 6 為 2 的倍數(這個 2 是因為剩下二根金棒)為了要讓　～　可以順利，不需多花次數，放在　上，所以要移　～　時，需先移　而且必須從沒有任何銀圈的那根金棒開始。

當 n＝8 時，　將　～　，移到另一根金棒。

將　移到另一根空的金棒。

因　～　總共有 7 個，不是 2 的倍數，所以要移動　～　時，需先移　，而且必須從放有　的那根金棒開始。

而(四)更是麻煩，所以我們只是就理論來討論所需搬移的次數，又因為現在所學有限，如要歸納出一個結論，則必須做更深一層的探討。