無『三』不成形

摘要

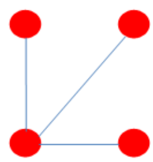
此研究主要是在探討「在 n 個點上，對任兩點作連接線段，並且在線段不得重複選取情況下，所能作出最多的三角形個數為何？」，我們研究結果發現，點數 N 與殘留邊 r 及最多三角形的個數 M△ 間有密切關係：

一、殘留邊 r 與點數 N 的關係：K＞0 的整數

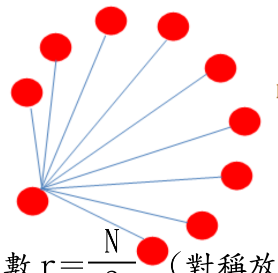
(一)N＝6K－3 ➡ 殘留邊數 r＝0

(二)N＝6K－2 ➡ 殘留邊數 r＝N－1（放射狀）

N=4

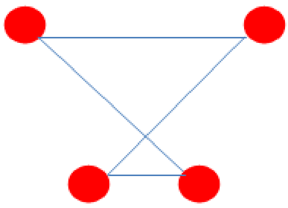


N=10

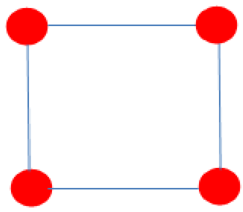


(三)N＝6K－1 ➡ 殘留邊數 r＝4（4 線相連狀）

N=5

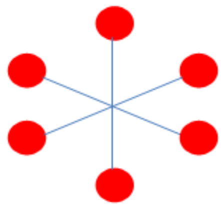


N=11

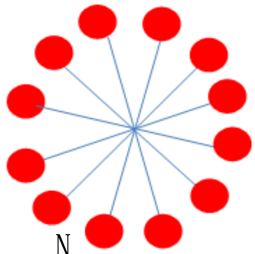


(四)N＝6K ➡ 殘留邊數 r＝$\frac{N}{2}$（對稱放射狀）

N=6



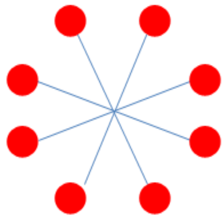
N=12



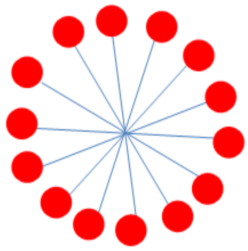
(五)N＝6K＋1 ➡ 殘留邊數 r＝0

(六)N＝6K＋2 ➡ 殘留邊數 r＝$\frac{N}{2}$（對稱放射狀）

N=8



N=14



二、點數 N 與殘留邊 Mr 及最多 M△ 三角形的關係：

$$M_{\triangle}=\frac{C_2^N-r}{3}$$

壹、研究動機

心中有個疑問：『老師說兩點可以連成一條直線，不共線的三點可以畫出一個三角形，那如果現在有四

點、五點、六點------N 點，它究竟可以畫出幾個三角形呢? 』。

於是利用下課去請教老師，老師說:「這其實是『組合』問題，屬高中範圍，若想算出，只要利用組合之基本運算 C^n_3 即可求得。但如果再加上『線段不能重複使用』的條件，那它最多可以作出多少個三角形？你要不要去研究看看。」於是在老師的建議下，找了兩位好朋友，一起探討點、線和三角形之間的關係。

貳、研究目的

想要了解在數個點上，對其作出兩點間的連接線段後，在線段不重複選取的情況下，所能作出最多的三角形個數。並且探討「殘留邊」與「增點」及三角形個數之間是否存在某種的關係？是否存在規則性？

參、研究設備及器材

一、白紙、筆、尺、擦子。

二、吸管、保力龍球、剪刀、保力龍膠。

三、電腦 Word 檔

肆、名詞解釋與先備知識

一、M  ：表示「三角形個數的最大值」。

二、M r ：表示「殘留邊的個數」。

三、 ：表示「點」。

四、N ：表示「點數量」。

五、 ：表示「新點」。

六、 ：表示「殘留邊線」

七、如果有 n 個不同物，欲取出 m 個(無須排列)，則有 C^n_m 種取法(組合)。

$$C^n_m = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\cdots\times(n-m+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times(m-1)\times m}$$ 。

如：我們知道兩點決定一條直線(或線段)，則任意 5 點最多可決定 C^{5}_{2}個線段 (直線)。

即 $C^{5}_{2}=\frac{5\times4}{1\times2}=10$，可作 10 個線段(直線)。

八、高斯符號〔m〕：表比 m 小之最大整數。如〔3.1〕=3；〔－2.3〕=－3。

九、1－k－1、2－h－1 表立體圖形之上、中、下間所在的點數。

伍、研究過程

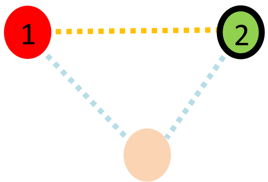
一開始，我們先從一個點開始討論：

一、當 N=1

只有一個點，無法組合成，也無法留下「殘留邊」；需要多一個點才能形成線。

＊＊＊小結：M＝0　；Mr＝0

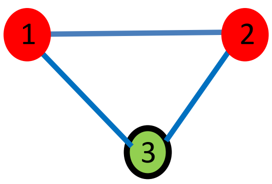
二、當 N=2



(一)只有兩個點，無法組合成，但可留下 1 個「殘留邊」；需要多一個點才能形成三角形。

＊＊＊小結：M＝0　；Mr＝1

三、當 N=3



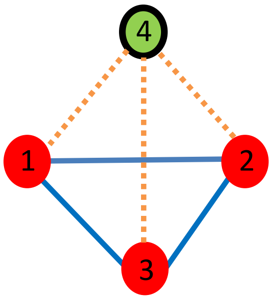
(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=3 可作出 $C^{3}_{2}=\frac{3\times2}{1\times2}=3$ 條線段，

(二)剛好圍成一個，無「殘留邊」。

＊＊＊小結：M  ＝1　；Mr＝0

＊＊＊小結：M ＝2　；Mr＝4

四、當 N=4



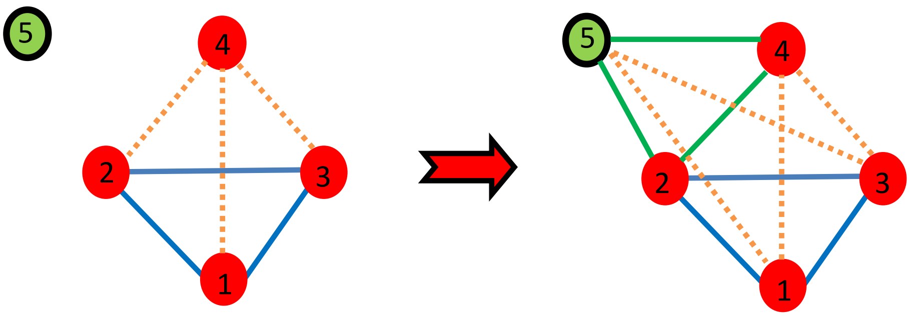
(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=4 可作出 $C_2^4=\frac{4\times3}{1\times2}=6$ 條線段

(二)因為只有 6 條線段，故最多能作出〔$\frac{6}{3}$〕＝2 個不重複邊之三角形。

(三)觀察後，因邊不能重複使用，所以只能圍成一個  ，留下 3 個「殘留邊」。

＊＊＊小結：M  ＝1　；Mr＝3

五、當 N=5



(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=5 可作出 $C_2^5=\frac{5\times4}{1\times2}=10$ 條線。

(二)因為有 10 條線段，故最多只能作出〔$\frac{10}{3}$〕＝3 個不重複邊之三角形，其必存在殘留邊。

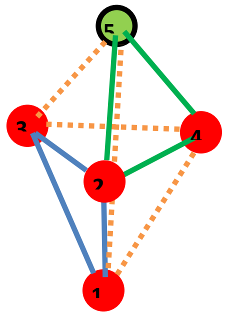
(三)由於點 1、2、3 兩兩間均不為殘留線，故新增一點無法與點 1、2、3 之任二個做出新的三角形，故只能找點 4 與 1、2、3 其中一點作出新的三角形(如上右圖)。

(四)觀察後可以找出 1＋1＝2 個△，留下 $C_2^5-2\times3=4$ 個「殘留邊」。

＊＊＊小結：M▲＝2　;　Mr＝4

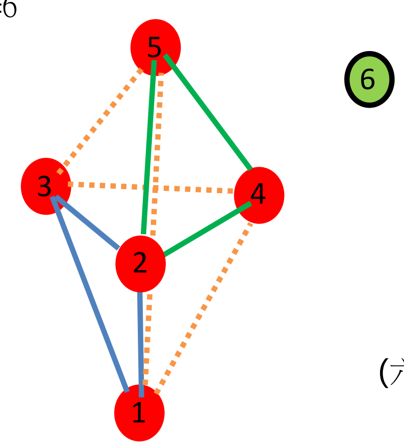
但此時，我們突然發現，平面上欲找出不重複邊之三角形個數，其所畫出的線段似乎非常紊亂。經過討論想改以「立體」思考模式進行，但「立體」又該如何克服呢？老師建議我們，可以利用保麗龍球與吸管，將其作成立體圖形來觀察。於是我們重新將 5 個點作成立體圖(如右下圖)進行觀察，果然容易觀察很多。

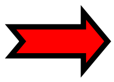
(五個點之立體圖)

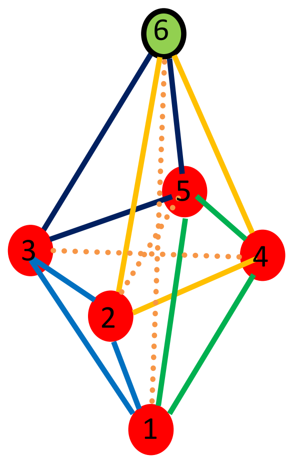


於是接下來的探討，我們都製作成立體模型來進行觀察。

六、當 N=6







(六個點之立體圖)

(一)利用組合的公式，我們了解到，當 **N=6** 可作出 $C_2^6=\frac{6\times5}{1\times2}=15$ 條線。

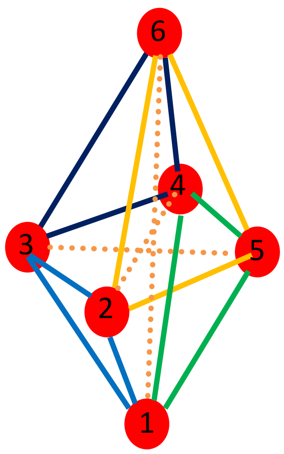
(二)因為有 15 條線段，故最多只能作出〔$\frac{15}{3}$〕＝5 個不重複邊之三角形。

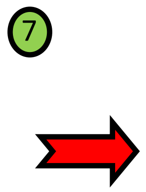
(三)同理，上左圖，由於點(1、2、3)與點(2、4、5)兩組群，兩兩間均不為殘留線，故新增一點無法與點(1、2、3)與點(2、4、5)兩組群之其中任二點做出新的三角形，故只能找殘留邊之點作出新的三角形，故新的點 6，可與之配成點(3、5、6)及(1、4、6)或(1、5、6)及(3、4、6)。接著，我們發現若將其分為 1—n—1 討論時，其分析方式更為明確而簡易(如上右圖)。

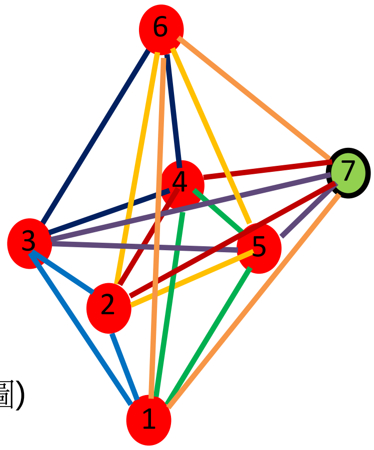
(四)觀察後可以找出 2＋2＝4 個▲，留下 $C_2^6-4\times3=3$ 個「殘留邊」。

＊＊＊小結：M ▲ ＝4　；Mr＝3

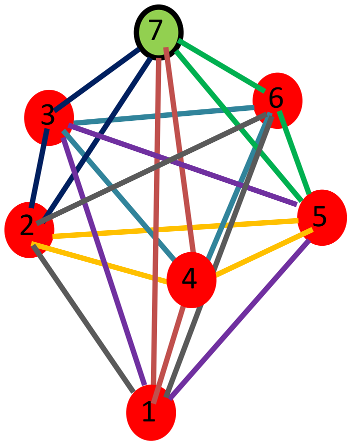
七、當 N=7







(七個點之立體圖)



(1-5-1 討論法)

(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=7 可作出 $C_2^7=\frac{7\times6}{1\times2}=21$ 條線。

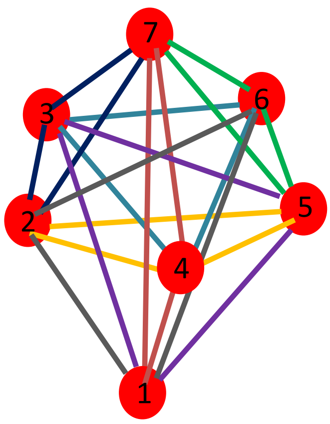
(二)因為有 21 條線段，故最多只能作出 $\left[\frac{21}{3}\right]=7$ 個不重複邊之三角形。

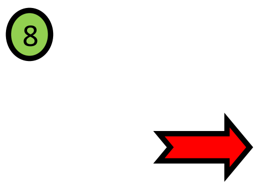
(三)同理，由於點(1、2、3)、點(1、4、5)、點(2、5、6)、點(3、4、6)，兩兩間均不為殘留線，故新增一點無法與點(1、2、3)、點(1、4、5)、點(2、5、6)、點(3、4、6)組群之其中任二點做出新的三角形，故只能找殘留邊之點作出新的三角形。此時，發現新增點 7 正好均能與點(1、6)；點(2、4)及點(3、5)之三條殘留線共組三個新的三角形。當然此題我們仍可利用立體 1－5－1 討論法。

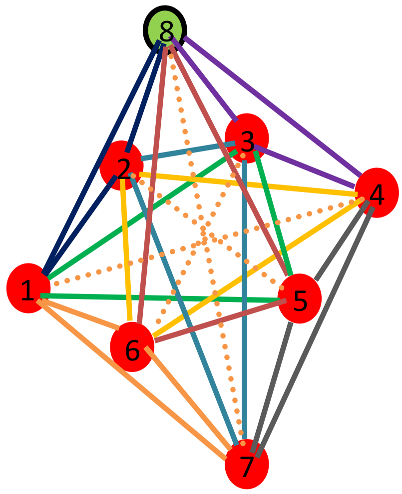
(四)觀察後可以找出 4＋3＝7 個 ▲ ，留下 $C_2^7-7\times3=0$ 個「殘留邊」。

＊＊＊小結：M ▲ ＝7　；Mr＝0

八、當 N=8







(八個點之立體圖)

(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=8 可作出 $C_2^8=\frac{8\times7}{1\times2}=28$ 條線。

(二)因為有 28 條線段，故最多只能作出〔$\frac{28}{3}$〕＝9 個不重複邊之三角形，其必存在殘留邊。

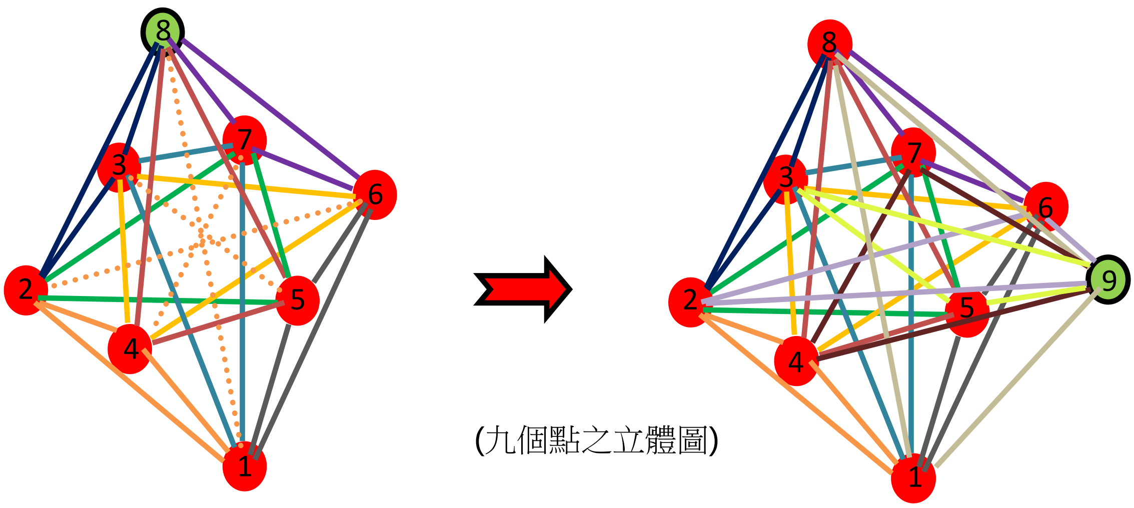
(三)同理，由於點(1、2、6)、點(1、3、5)、點(1、4、7)、點(2、3、7)、點(2、4、5)、點(3、4、6)、點(5、6、7)，沒有殘邊，故新增一點無法與點(1、2、6)、點(1、3、5)、點(1、4、7)、點(2、3、7)、點(2、4、5)、點(3、4、6)、點(5、6、7)組群之其中任二點做出新的三角形。

(四)所以我們重新組合，採 1－6－1 立體討論法，上下平均分配上三(點 1、2；點 3、4 與點 5、6 與點 8 配)下三(點 1、6；點 5、4 與點 3、2 與點 7 配)共組成 6 個三角形，其餘中間補足兩個(點 2、4、6 與點 1、3、5)三角形，最後共可連出 8 個三角形。

(五)觀察後只可以找出 7＋1＝8 個 ，留下 $C_2^8-8\times3=4$ 個「殘留邊」。

＊＊＊小結：M ＝8　；Mr＝4

九、當 N=9



(九個點之立體圖)

(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=9 可作出 $C_2^9=\frac{9\times8}{1\times2}=36$ 條線。

(二)因為有 36 條線段，故最多只能作出〔$\frac{36}{3}$〕＝12 個不重複邊之三角形。

(三)同理，由於點(1、2、4)、點(1、3、7)、點(1、5、6)、點(2、3、8)、點(2、5、7)、點(3、4、6)、點

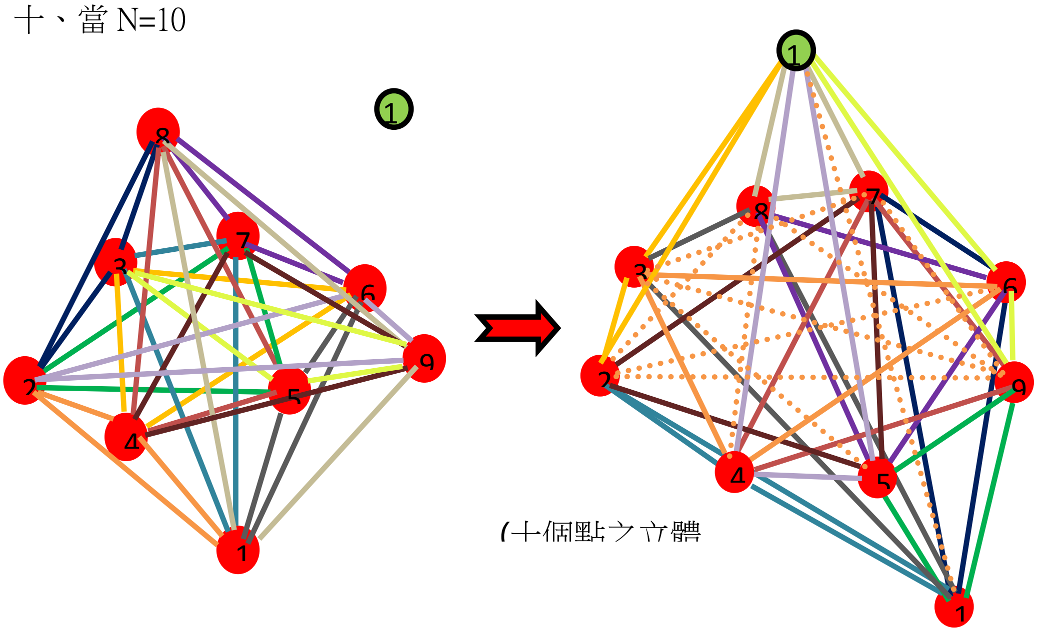
(4、5、8)、點(6、7、8)，故新增一點無法與點(1、2、4)、點(1、3、7)、點(1、5、6)、點(2、3、8)、點(2、5、7)、點(3、4、6)、點(4、5、8)、點(6、7、8)組群之其中任二點做出新的三角形。

(四)經觀察後發現，剩餘四條殘留邊(點 2、6；點 3、5；點 4、7 與點 1、8)正好能與新點 9，分別共組 4 個新三角形，殘留邊剛好用完，最後總和正好等於所能組合最多之 12 個三角形，9 點討論結束。

(五)即只可以找出 8＋4＝12 個 ▲，留下 $C_2^9-12\times3=0$ 個「殘留邊」。

＊＊＊小結：M ▲ ＝12 ；Mr＝0

十、當 N=10



(十個點之立體

(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=10 可作出 $C_2^{10}=\frac{10\times9}{1\times2}=45$ 條線。

(二)因為有 45 條線段，故最多只能作出〔$\frac{45}{3}$〕＝15 個不重複邊之三角形。

(三)同理，我們發現，所有連接線段均無殘留邊組群，故新點 10 均無法與其中任二點做出新的三角形。

(四)我們重新改採 1－8－1 立體討論法，上下平均分配上四(點 2、3；點 4、5；點 9、6；點 8、7)與上點 10 配；下四(點 2、4；點 5、9；點 6、7；點 8、3)與下點 1 配共組成 8 個三角形，其餘中間補足四個(點 2、5、7；點 3、4、6；點 4、9、7；點 5、6、8)三角形，最後共可連出 12 個三角形。結果發現我們仍然無法找出第 13 個新三角形。剩餘 9 條殘留邊(點 2、6；點 2、8；點 2、9；點 3、5；點 3、7；點 3、9；點 4、8；點 8、9；點 1、10)。

(五)後來老師要我們以「組合」方式來驗證，於是我們將其所有組合討論出：

(1,2,4), (8,1,3), (9,1,5). (6,7,1). (2,3,5). (9,2,6) .(7,8,2). (3,4,6), (9,3,7). (4,5,7),(5,6,8). (9,4,8)，殘留的邊為

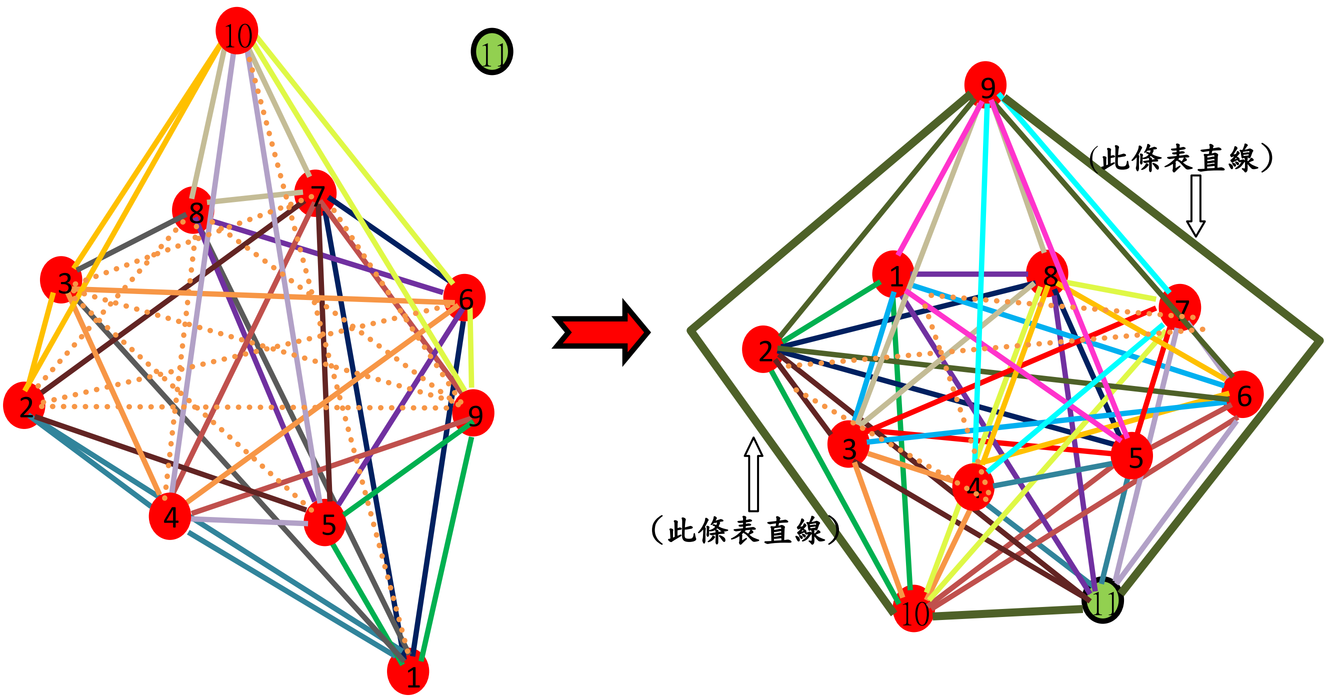
(10,1) .(10,2) .(10,3) .(10,4). (10,5) .(10,6) .(10,7) .(10,8) .(10,9)

(六)發現到 N＝10 跟 N＝4 一樣重新組合排列，無法新增三角形，殘邊都是 N－1。

(七)觀察後仍然只可找出 8＋4＝12 個△，留下 $C_2^{10}-12\times3=9$ 個「**殘留邊**」。

＊＊＊小結：M▲＝12 ; Mr＝9

十一、當 N=11



(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=11 可作出 $C_2^{11}=\frac{11\times10}{1\times2}=55$ 條線。

(二)因為有 55 條線段，故最多只能作出〔$\frac{55}{3}$〕＝18 個不重複邊之三角形，其必存在**殘留邊。**

(三)若我們沿用 10 點繼續討論，因為剩餘殘留邊有 9 條(點 2、6；點 2、8；點 2、9；點 3、5；點 3、7；點 3、9；點 4、8；點 8、9；點 1、10)，則當我們加入第 11 點時，所能得到的最佳配對是點(11、2、6)；點(11、3、5)；點(11、4、8)、點(11、1、10)與點(11、8、9)五個。故共可作成 17 個。

(四)當我們改採 1－9－1 立體討論法時，發現到：由於中間 9 點無法兩兩配對，因此剩餘的一點顯然在討論時，會出現探討的困難度，故本研究改以 1－8－2 立體討論，將原本置於上下各一點的放於同

一邊，且將中間一點置放於另一邊以利討論。

(五)首先發現點 10 與點 11 各與中間之 8 點採間隔配對點(1、2、4)；點(3、4、10)；點(5、6、10)；點(7、8、10)與點(2、3、11)；點(4、5、11)；點(6、7、11)；點(8、1、11)；中間八個點可平面作出 4 個三角形點(1、3、6)；點(4、6、8)；點(3、5、7)；點(2、5、8)；另中間四線段再與點 9 構成四個三角形點(3、8、9)；點(4、7、9)；點(1、5、9)；點(2、6、9)最後由上點 9 與下點(10、11)，組成最後一個三角形(9、10、11)，總和共 17 個三角形，這與我們(三)延用 10 點繼續討論的結果相同。留 4 個殘留邊點(1、4)；點(1、7)；點(2、4)；點(2、7)。

(六)同樣的，我們以「組合」方式來驗證，於是我們將其所有組合討論出：

此時，老師告訴我們也可用表格來觀察調整，雖然對應點數不同，但結論仍然相同。

(如左下圖)

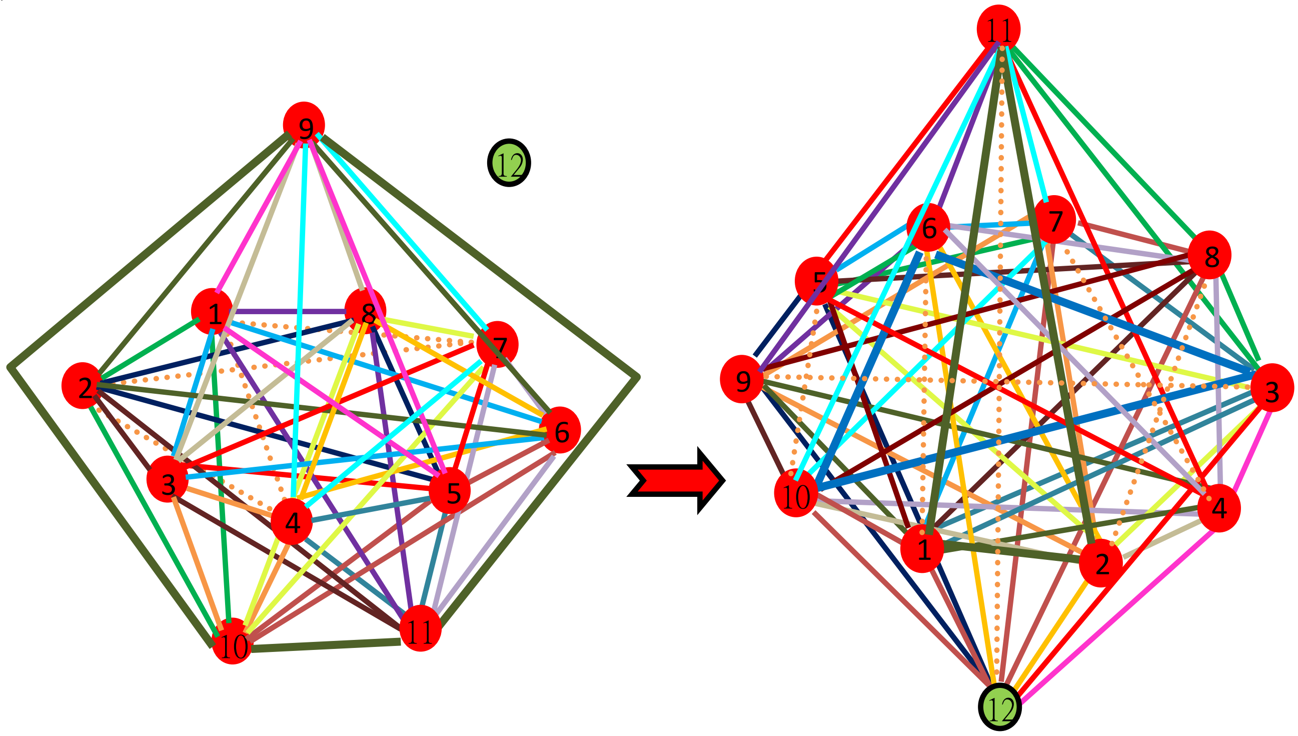
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	○	○	○								
2	○			○	○						
3	○					○	○				
4	○							○	○		
5	○									○	○
6		○		○							○
7		○			○					○	
8		○				○			○		
9		○					○	○			
10			○	○		○					
11			○		○		○				
12			○					○			○
13			○						○	○	
14				○			○		○		
15				○				○		○	
16					○				○		○
17						○		○			○

殘留邊 5-6；5-8；6-10；7-10

(七)觀察後只可以找出 12＋5＝17 個△ ，留下 $C_2^{11}-17\times3=4$ 個「**殘留邊**」。

＊＊＊小結：M▲＝17 ； Mr＝4

十二、當 N=12



(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=12 可作出 $C_2^{12}=\frac{12\times11}{1\times2}=66$ 條線。 .

(二)因為有 66 條線段，故最多只能作出〔$\frac{66}{3}$〕＝22 個不重複邊之三角形。

(三)我們延續 1－8－2 立體討論，11 點共有 17 個三角形，現多出點 12，但點 12 只能與點 1、7；點 2、4 或者點 1、4；點 2、7 增加 2 個三角形，含增加部分，共得 19 個三角形，將剩餘 9 個殘留邊。但是否只有 19 個三角形呢？於是我們繼續討論我們熟悉的 1—n－1 討論法。

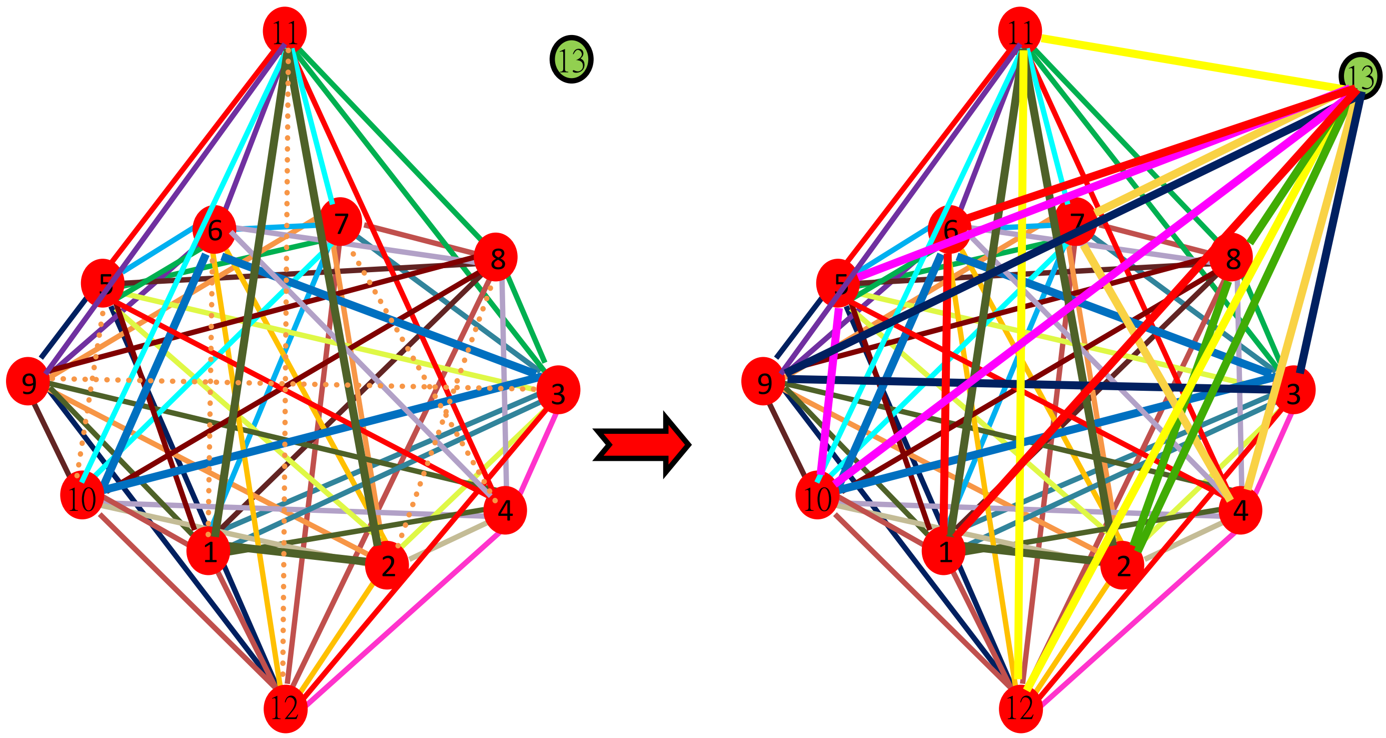
(四)今若採 1－10－1 立體討論法。上點 11 組成點(11、3、8)，點(11、4、5)，點(11、7、10)，點(11、6、9)，點(11、1、2)共 5 個三角形，下點 12 組成點(12、3、4)，點(12、5、9)，點(12、2、6)，點(12、7、8)，點(12、1、10))共 5 個三角形；中間十個點作出點(3、6、10)，點(3、2、5)，點(3、1、7)，點(4、6、8)，點(4、1、9)；點(4、2、10)，點(5、1、8)，點(5、6、7，點(7、2、9)，點(8、9、10)，共 10 個三角形，總和共 20 個三角形，較延續 11 點討論法多找到一個三角形。留 6 個殘留邊點(11、12)，

點(1、6)，點(2、8)，點(3、9)，點(4、7)，點(5、10)。

(五)觀察後只可以找出 17＋3＝20 個△，留下 C_2^{12}－20x3＝6 個「**殘留邊**」。

＊＊＊小結：M▲＝20　;　 Mr＝6

十三、當 N=13



(一)利用組合的公式，我們了解到，當 N=12 可作出 $C_2^{13}=\frac{13\times12}{1\times2}$＝78 條線。　　.

(二)因為有 66 條線段，故最多只能作出〔$\frac{78}{3}$〕＝26 個不重複邊之三角形。

(三)經觀察後發現，剩餘六條殘留邊點(11、12)，點(1、6)，點(2、8)，點(3、9)，點(4、7)，點(5、10)正好能與新點 13，分別共組 6 個新三角形(較粗線條)，殘留邊剛好用完，最後總和正好等於所能組合最多之 26 個三角形。

(四)觀察後只可以找出 20＋6＝26 個△　，留下 C_2^{13}－26x3＝0 個「**殘留邊**」。

＊＊＊小結：M▲＝26　;　 Mr＝0

十四、當 N=14

14 點(N＝14)標註法

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	○		○			○								
2	○			○	○									
3	○						○	○						
4	○								○	○				
5	○										○	○		
6	○												○	○
7		○	○	○										
8		○			○	○								
9		○					○				○			
10		○						○	○					
11		○								○				○
12		○										○	○	
13			○				○					○		
14			○					○			○			
15			○						○					○
16			○							○			○	
17				○			○		○					
18				○				○		○				
19				○							○		○	
20				○								○		○
21					○		○			○				
22					○			○				○		
23					○				○				○	
24					○					○				○
25						○	○							○
26						○		○					○	
27						○			○			○		
28						○				○	○			

殘留邊 1-2；3-5；4-6；7-13；8-14；9-11；10-12

十五、當 N=15

15 點(N＝15)標註法

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	○		○			○									
2	○			○	○										
3	○						○	○							
4	○								○	○					
5	○										○	○			
6	○												○	○	
7		○	○	○											
8		○			○	○									
9		○					○				○				
10		○						○	○						
11		○								○				○	
12		○										○	○		
13			○				○					○			
14			○					○			○				
15			○						○					○	
16			○							○			○		
17				○			○		○						
18				○				○		○					
19				○							○		○		
20				○								○		○	
21					○		○			○					
22					○			○				○			
23					○				○				○		
24					○					○				○	
25						○	○							○	
26						○		○					○		
27						○			○			○			
28						○				○	○				
29	○	○													○
30			○		○										○
31				○		○									○
32							○						○		○
33								○						○	○
34									○		○				○
35										○		○			○

陸、研究結果

一、經過推論，在數個點上，對其作出兩點間的連接線段後，在線段不重複選取的情況下，

所能作出最多的三角形個數及其殘留邊數如下表：

點數(N)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
最多三角形個數	0	1	1	2	4	7	8	12	12	17	20	26	29	35	…
殘留線段數	1	0	3	4	3	0	4	0	9	4	6	0	4	0	…

二、殘留邊 r 與點數 N 的關係：K＞0 的整數

(一)$N=6K-3$ $\Rightarrow$ 殘留邊數 $r=0$

(二)$N=6K-2$ $\Rightarrow$ 殘留邊數 $r=N-1$

(三)$N=6K-1$ $\Rightarrow$ 殘留邊數 $r=4$

(四)$N=6K$ $\Rightarrow$ 殘留邊數 $r=\frac{N}{2}$

(五)$N=6K+1$ $\Rightarrow$ 殘留邊數 $r=0$

(六)$N=6K+2$ $\Rightarrow$ 殘留邊數 $r=\frac{N}{2}$

三、點數 N 與殘留邊 Mr 及最多 M▲ 三角形的關係：

$$M\blacktriangle=\frac{C_2^N-r}{3}$$

柒、問題與討論

一、當 N＜3 時會產生多少三角形及殘邊？

答：N＜3 的正整數不會構成三角形，N=1，沒殘邊、N=2 ，1 個殘邊

二、當 N=89 時最多會產生多少個三角形及殘邊？

答：因 89＝6K－1　　所以殘邊必為 4

$$C^{89}_{2}=\frac{89\times 88}{2}=3916$$

$$\therefore 三角形個數=\frac{C^{89}_{2}-4}{3}=\frac{3916-4}{3}=1304$$

三、從 4~399 間的點，有幾個數殘邊為 0？

答：因殘邊為 0 的數有 N＝6K＋1 及 N＝6K－3

(1) 當 N＝6K＋1 時，N＝7,13,----------397

公差 d＝6 ∵ 397－7＝6(n－1) ∴n＝66

(2) 當 N＝6K－3 時，N＝3,9,----------399

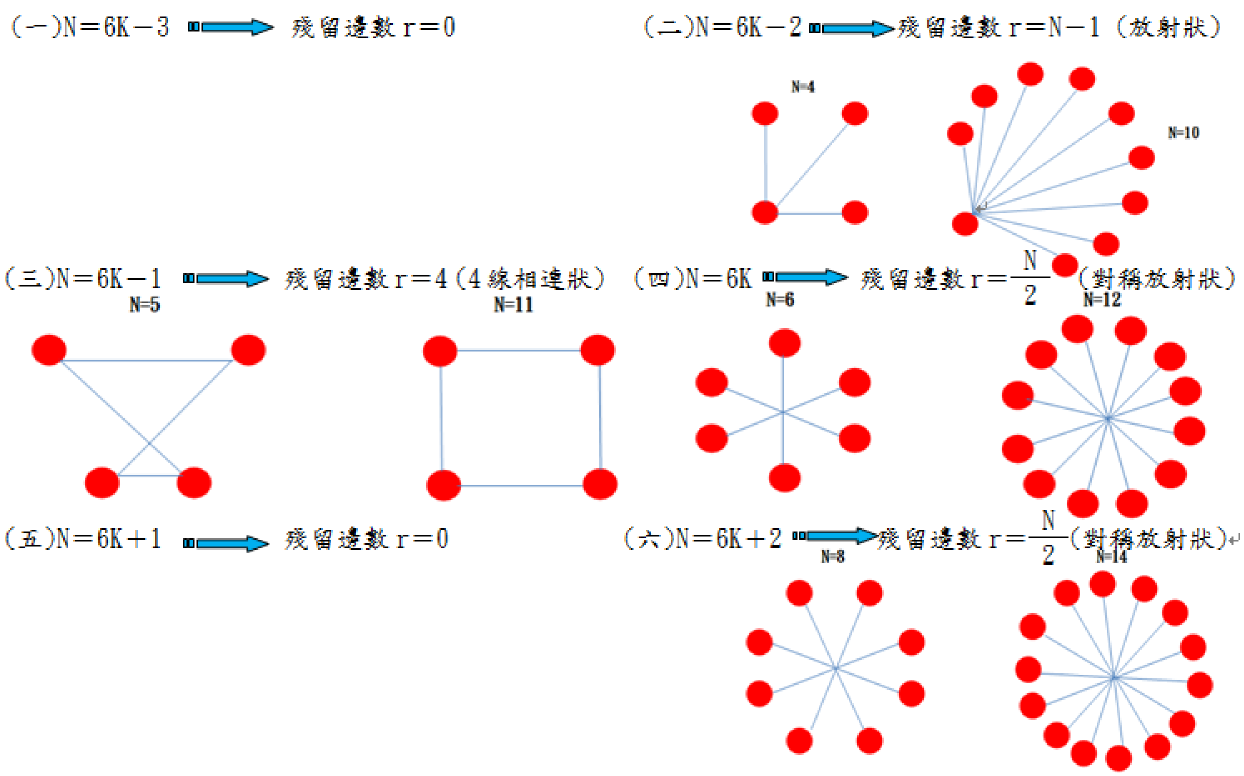
公差 d＝6 ∵ 399－3＝6(m－1) ∴m＝67

故共有 66＋67＝123 (個)

捌、結論

一、只要點數 N＞2，且線段不重複選取的情況下，必能找出最多的三角形個數，及其殘留邊

二、殘留邊 r 與點數 N 的關係：K＞0 的整數



三、點數 N 與殘留邊 Mr 及最多 M ▲三角形的關係：M ▲ $= \dfrac{C^{N}_{2} - r}{3}$