

「翻」開覆「蓋」的「魔法卡」

摘要

此研究主要是探討：含有數字的紙片在經過『一次翻 h 次蓋』及『h 次蓋一次翻』的過程中該如何擺放，才能讓數字能依序排列出現。我們研究的結果是：m 奇數張牌，n：偶數張牌

一、「一翻 h 蓋」時：設有 $p=1+h$ 張循環

(一) p 為奇數

$$\begin{cases} m=pk-b \\ n=pk-b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(p-b)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(p-b)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} p>b\geq 0\text{整數} \\ p>b\geq 0\text{整數} \end{array}$$

(二) p 為偶數

$$\begin{cases} m=pk-a \\ n=pk-c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(p-a)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(p-c)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} p>a, a\text{為奇數} \\ p>c, c\text{為偶數} \end{array}$$

二、「h 蓋一翻」時：設有 $q=1+h$ 張循環

(一) q 為奇數

$$\begin{cases} m=qk+b \\ n=qk+b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(b+1)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(b+1)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} q>b\geq 0\text{整數} \\ q>b\geq 0\text{整數} \end{array}$$

(二) q 為偶數

$$\begin{cases} m=qk+a \\ n=qk+c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(a+1)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(c+1)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} q>a, a\text{為奇數} \\ q>c, c\text{為偶數} \end{array}$$

也就是說，不論先一翻再 h 蓋或先 h 蓋後再一翻，只要找到 k 數在倒數第幾張，就可以透過『翻』『蓋』口訣把所有數字依序擺放出來。

壹、研究動機

一次老師在課堂上說：「我手上有十張沒有按照順序的數字牌，等下在老師一『翻』一『蓋』中，它的數字會是依 1、2、3……10 的順序出現，同學相信嗎？」心想這怎麼可能，但老師竟然成功了，下課後趕緊跑去詢問老師是如何做到的，老師笑著說：「我這裡有 100 張數字牌可以借妳，想知道怎來的就自己去探究。」於是在好奇心的趨使下找了兩個好友一起來探究，討論結果我們決定不僅要研究老師的『一翻一蓋』是怎辦到的，我們也要研究如何把數字牌在『一蓋一翻』、『一翻二蓋』、『二蓋一翻』、『一翻三蓋』、『三蓋一翻』……等的方式中，要如何去排列這些

數字牌，才能讓數字都是依 1、2、3、4……出現。

貳、研究目的

- 一、想知道『一翻 h 蓋』及『h 蓋一翻』中數字牌要如何擺放，才能讓數字是依順序出現的？偶數張的數字牌與奇數張的數字牌其擺放方式是否相同？（ $h > 1$ 的整數）
- 二、想知道在『一次翻 h 次蓋』的過程中，每 p 張循環時是否存在某些特定的模式？
- 三、想知道在『h 次蓋一次翻』的過程中，每 p 張循環時是否存在某些特定的模式？

參、研究設備及器材

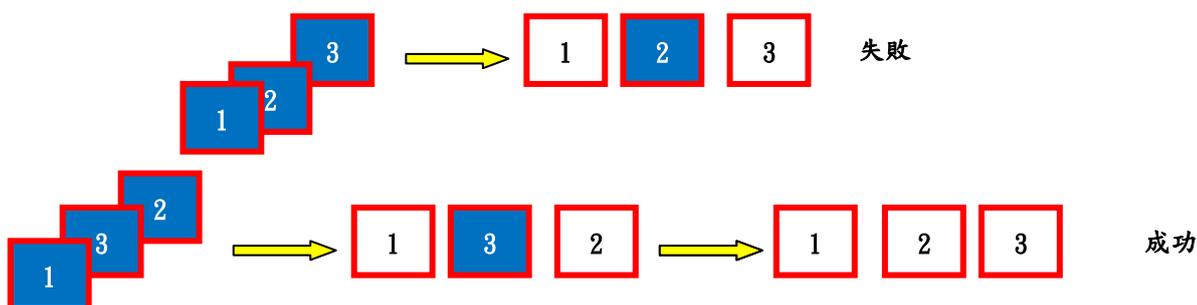
- 一、原子筆、白板筆、數字牌、鉛筆、擦子、小白板、A4 紙
- 二、電腦

肆、名詞解釋

- 一、n：代表偶數張牌，m：代表奇數張牌
- 二、k：代表大於 0 的整數
- 三、：蓋牌 1
- 四、：翻牌 1
- 五、末張：倒數第一張
- 六、「一翻五蓋」：每 6 張循環，「7 蓋一翻」：每 8 張循環

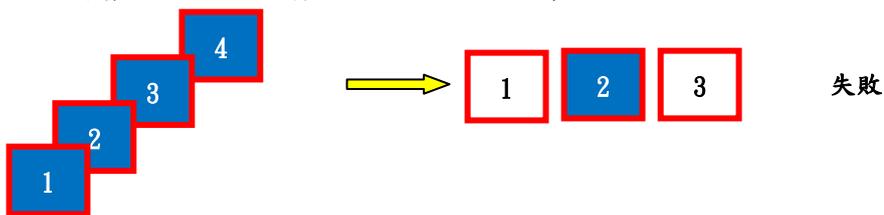
伍、研究過程

一開始，我們先研究『一翻一蓋』，張數從三張牌開始，所以先取出 1、2、3 三張數字牌，因不知如何下手，所以第一次按 1、2、3 的順序，結果失敗，於是改 1、3、2，哇！竟然成功了。

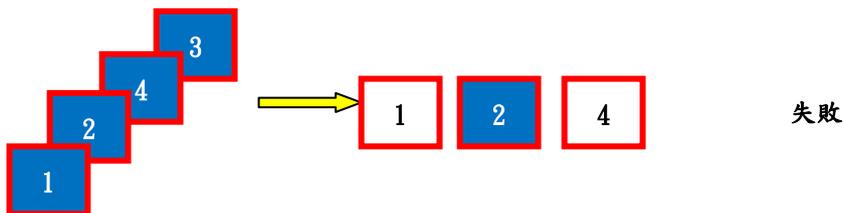


**即 1~3 $\xrightarrow{\text{順序}}$ 1、3、2

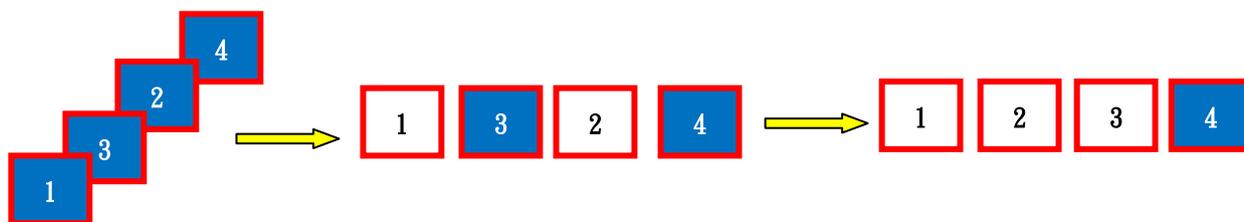
接著試 4 張，一樣從 1、2、3、4 開始



改 1、2、4、3：



接連作了幾次不同的排序，終於~~



**即 1~4 $\xrightarrow{\text{順序}}$ 1、3、2、4

因用數字牌操作，覺得慢也不方便，所以我們改採紙上探究

1~5 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、 、2、 、3 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、 、2、4、3 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、5、2、4、3

**即 1~5 $\xrightarrow{\text{順序}}$ 1、5、2、4、3

1~6 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、 、2、 、3、 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、4、2、 、3、5 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$
 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、4、2、6、3、5

**即 1~6 $\xrightarrow{\text{順序}}$ 1、4、2、6、3、5

1~7 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、 、2、 、3、 、4 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、 、2、5、3、 、4 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$
 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、6、2、5、3、 、4 $\xrightarrow{\text{翻蓋}}$ 1、6、2、5、3、7、4

**即 1~7 $\xrightarrow{\text{順序}}$ 1、6、2、5、3、7、4

研究到 7 張牌，我們卻仍找不出這些牌之間究竟存在著何種關係？於是再去請教老師，老師建

議我們可以把數字牌分奇數張及偶數張來討論，或許從中可以找出結果，於是我們決定重新來過。

一、兩張循環

(一)、一『翻』一『蓋』：

1. 數字牌為奇數張

1~3 \longrightarrow 1、3、2

1~5 \longrightarrow 1、5、2、4、3

1~7 \longrightarrow 1、6、2、5、3、7、4

1~9 \longrightarrow 1、9、2、6、3、8、4、7、5

1~11 \longrightarrow 1、9、2、7、3、11、4、8、5、10、6

1~13 \longrightarrow 1、12、2、8、3、11、4、9、5、13、6、10、7

1~15 \longrightarrow 1、12、2、9、3、14、4、10、5、13、6、11、7、15、8

∴
∴

我們發現：

數字排張數 [Ⓜ]	末張數字 [Ⓜ]
3	2
5	3
7	4
9	5
11	6
13	7
15	8
17	9
19	10

※※小結：當 m 為奇數張牌時， $m=2k-1$ ，其倒數第一張數為 k

<例>數字牌為 1~27 時

$$\because 27=2k-1 \quad \therefore k=14$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

步驟 1 \longrightarrow 1 2 15 3 4 16 5 6 17 7 8 18 9 10 19 11 12 20 13 14

步驟 2 \longrightarrow 1 21 2 15 3 4 16 5 22 6 17 7 8 18 9 23 10 19 11 12 20 13 24 14

步驟 3 \longrightarrow 1 21 2 15 3 4 17 5 22 6 18 7 25 8 18 9 23 10 19 11 12 20 13 24 14

步驟 4 \longrightarrow 1 21 2 15 3 26 4 17 5 22 6 18 7 25 8 18 9 23 10 19 11 12 20 13 24 14

步驟 5 \longrightarrow 1 21 2 15 3 26 4 17 5 22 6 18 7 25 8 18 9 23 10 19 11 26 12 20 13 24 14

2. 數字牌為偶數張：

1~4 \longrightarrow 1、3、2、4

1~6 \longrightarrow 1、4、2、6、3、5

1~8 \longrightarrow 1、5、2、7、3、6、4、8

1~10 \longrightarrow 1、6、2、10、3、7、4、9、5、8

1~12 \longrightarrow 1、7、2、10、3、8、4、12、5、9、6、11

1~14 \longrightarrow 1、8、2、13、3、9、4、12、5、10、6、14、7、11

1~16 \longrightarrow 1、9、2、13、3、10、4、15、5、11、6、14、7、12、8、16

⋮
⋮

我們發現：

數字排張數 [Ⓢ]	倒數第二張數字 [Ⓢ]
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6
14	7
16	8
18	9
20	10

※※小結：當 n 為偶數牌時， $n=2k$ ，其倒數第二張數為 k

<例>數字牌為 1~24 時

$\therefore 24=2k \quad \therefore k=12$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

步驟 1 \longrightarrow 1 13 2 14 3 15 4 16 5 17 6 18 7 19 8 20 9 21 10 22 11 23 12 24

步驟 2 \longrightarrow 1 13 2 19 3 14 4 20 5 15 6 21 7 16 8 22 9 17 10 23 11 18 12 24

步驟 3 \longrightarrow 1 13 2 19 3 14 4 22 5 15 6 20 7 16 8 23 9 17 10 21 11 18 12 24

步驟 4 \longrightarrow 1 13 2 19 3 14 4 22 5 15 6 20 7 16 8 23 9 17 10 21 11 18 12 24

(二)、一『蓋』一『翻』：

1. 數字牌為奇數張

1~3 \longrightarrow 2、1、3

1~5 → 3、1、5、2、4

1~7 → 4、1、6、2、5、3、7

1~9 → 5、1、9、2、6、3、8、4、7

1~11 → 6、1、9、2、7、3、11、4、8、5、10

1~13 → 7、1、12、2、8、3、11、4、9、5、13、6、10

1~15 → 8、1、12、2、9、3、14、4、10、5、13、6、11、7、15

⋮

我們發現：

數字排張數 [Ⓢ]	倒數第二張數字 [Ⓢ]
3	1
5	2
7	3
9	4
11	5
13	6
15	7
17	8
19	9

※※小結：當 m 為奇數牌時， $m=2k+1$ ，其倒數第二張數為 k

<例>數字牌為 1~25 時

$\because 25=2k+1 \quad \therefore k=12$

步驟 1 →

步驟 2 →

步驟 3 →

步驟 4 →

步驟 5 →

2. 數字牌為偶數張：

1~4 → 4、1、3、2

1~6 → 5、1、4、2、6、3

1~8 → 8、1、5、2、7、3、6、4

1~10 → 8、1、6、2、10、3、7、4、9、5

1~12 → 11、1、7、2、10、3、8、4、12、5、9、6

1~14 → 11、1、8、2、13、3、9、4、12、5、10、6、14、7

1~16 → 16、1、9、2、13、3、10、4、15、5、11、6、14、7、12、8

：

我們發現：

數字排張數 [□]	末張數字 [□]
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6
14	7
16	8
18	9
20	10

※※小結：當 n 為偶數牌時， $n=2k$ ，其倒數第一張數為 k

<例>數字牌為 1~26 時

步驟 1 →

步驟 2 →

步驟 3 →

步驟 4 →

步驟 5 →

The diagram illustrates the process of a card trick with 26 cards. The cards are numbered 1 to 13 and 14 to 26. The steps are as follows:

- Initial state: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13
- Step 1: 1, 14, 2, 3, 15, 4, 5, 16, 6, 7, 17, 8, 9, 18, 10, 11, 19, 12, 13
- Step 2: 20, 1, 14, 2, 3, 15, 4, 21, 5, 16, 6, 7, 17, 8, 22, 9, 18, 10, 11, 19, 12, 23, 13
- Step 3: 20, 1, 14, 2, 3, 15, 4, 21, 5, 16, 6, 24, 7, 17, 8, 22, 9, 18, 10, 11, 19, 12, 23, 13
- Step 4: 20, 1, 14, 2, 3, 15, 4, 21, 5, 16, 6, 24, 7, 17, 8, 22, 9, 18, 10, 11, 19, 12, 23, 13
- Step 5: 20, 1, 14, 2, 25, 3, 15, 4, 21, 5, 16, 6, 24, 7, 17, 8, 22, 9, 18, 10, 11, 19, 12, 23, 13

二、三張循環

(一)、一『翻』二『蓋』：

1. 數字牌為奇數張

1~3 \longrightarrow 1、2、3

1~5 \longrightarrow 1、5、3、2、4

1~7 \longrightarrow 1、7、5、2、4、6、3

1~9 \longrightarrow 1、4、6、2、8、5、3、9、7

1~11 \longrightarrow 1、7、5、2、11、9、3、6、8、4、10

1~13 \longrightarrow 1、8、10、2、6、12、3、9、7、4、13、11、5

1~15 \longrightarrow 1、6、15、2、13、7、3、10、12、4、8、14、5、11、9

我們發現：

數字牌張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數字
5		2	
7			3
9	3		
11		4	
13			5
15	5		
17		6	
19			7

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=3k$ \longrightarrow 倒數第三張為 k 數

(2) $m=3k-1$ \longrightarrow 倒數第二張為 k 數

(3) $m=3k-2$ \longrightarrow 倒數第一張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~4 → 1、3、4、2

1~6 → 1、3、5、2、6、4

1~8 → 1、7、4、2、8、6、3、5

1~10 → 1、10、8、2、5、7、3、9、6、4

1~12 → 1、5、11、2、8、6、3、12、10、4、7、9

1~14 → 1、12、6、2、9、11、3、7、13、4、10、8、5、14

1~16 → 1、12、10、2、7、16、3、14、8、4、11、13、5、9、15、6

∴
∴

我們發現：

數字牌張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數字
4			2
6	2		
8		3	
10			4
12	4		
14		5	
16			6
18	6		
20		7	

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=3k$ → 倒數第三張為 k 數

(2) $n=3k-1$ → 倒數第二張為 k 數

(3) $n=3k-2$ → 倒數第一張為 k 數

(二)、二『蓋』一『翻』：

1. 數字牌為奇數張

1~3 \longrightarrow 2、3、1

1~5 \longrightarrow 2、4、1、5、3

1~7 \longrightarrow 6、3、1、7、5、2、4

1~9 \longrightarrow 9、7、1、4、6、2、8、5、3

1~11 \longrightarrow 4、10、1、7、5、2、11、9、3、6、8

1~13 \longrightarrow 11、5、1、8、10、2、6、12、3、9、7、4、13

1~15 \longrightarrow 11、9、1、6、15、2、13、7、3、10、12、4、8、14、5

：
：
我們發現：

數字牌張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數
5	1		
7		2	
9			3
11	3		
13		4	
15			5
17	5		
19		6	

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=3k+2$ \longrightarrow 倒數第三張為 k 數

(2) $m=3k+1$ \longrightarrow 倒數第二張為 k 數

(3) $m=3k$ \longrightarrow 倒數第一張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~4 \longrightarrow 4、2、1、3

1~6 \longrightarrow 6、4、1、3、5、2

1~8 \longrightarrow 3、5、1、7、4、2、8、6

1~10 \longrightarrow 6、4、1、10、8、2、5、7、3、9

1~12 \longrightarrow 7、9、1、5、11、2、8、6、3、12、10、4

1~14 \longrightarrow 5、14、1、12、6、2、9、11、3、7、13、4、10、8

1~16 \longrightarrow 15、6、1、12、10、2、7、16、3、14、8、4、11、13、5、9

：
：

我們發現：

數字牌張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數
4		1	
6			2
8	2		
10		3	
12			4
14	4		
16		5	
18			6
20	6		

※※小結：當 n 為偶數牌張時，

(1) $n=3k+2$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數

(2) $n=3k+1$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數

(3) $n=3k$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

三、四張循環

(一)、一「翻」三「蓋」：

1. 數字牌為奇數張

1~5 \Rightarrow 1、3、5、4、2

1~7 \Rightarrow 1、4、3、5、2、7、6

1~9 \Rightarrow 1、6、5、7、2、4、9、8、3

1~11 \Rightarrow 1、9、4、6、2、11、10、5、3、8、7

1~13 \Rightarrow 1、13、12、7、2、5、10、9、3、11、6、8、4

1~15 \Rightarrow 1、11、5、13、2、8、10、6、3、15、14、9、4、7、12

：

：

我們發現：

數字牌張數	倒數第三張數	末張數字
5		2
7	2	
9		3
11	3	
13		4
15	4	
17		5
19	5	
21		6

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=4k-1$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數

(2) $m=4k-3$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~4 → 1、2、4、3

1~6 → 1、6、5、3、2、4

1~8 → 1、3、8、7、2、5、4、6

1~10 → 1、10、9、4、2、7、6、8、3、5

1~12 → 1、4、9、8、2、10、5、7、3、12、11、6

1~14 → 1、7、9、5、2、14、13、8、3、6、11、10、4、12

1~16 → 1、5、8、13、2、12、6、14、3、9、11、7、4、16、15、10

⋮
⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第四張數	倒數第二張數
4	1	
6		2
8	2	
10		3
12	3	
14		4
16	4	
18		5
20	5	
22		6
24	6	

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=4k$ → 倒數第四張為 k 數

(2) $n=4k-2$ → 倒數第二張為 k 數

(二)、三「蓋」一「翻」：

1. 數字牌為奇數張

1~5 → 5、4、2、1、3

1~7 → 2、7、6、1、4、3、5

1~9 → 9、8、3、1、6、5、7、2、4

1~11 → 3、8、7、1、9、4、6、2、11、10、5

1~13 → 6、8、4、1、13、12、7、2、5、10、9、3、11

1~15 → 4、7、12、1、11、5、13、2、8、10、6、3、15、14、9

⋮
我們發現：
⋮

數字牌張數	倒數第四張數	倒數第二張數
5		1
7	1	
9		2
11	2	
13		3
15	3	
17		4
19	4	
21		5
23	5	

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=4k+3$ \Rightarrow 倒數第四張為 k 數

(2) $m=4k+1$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~4 \Rightarrow 2、4、3、1

1~6 \Rightarrow 3、2、4、1、6、5

1~8 \Rightarrow 5、4、6、1、3、8、7、2

1~10 \Rightarrow 8、3、5、1、10、9、4、2、7、6

1~12 \Rightarrow 12、11、6、1、4、9、8、2、10、5、7、3

1~14 \Rightarrow 10、4、12、1、7、9、5、2、14、13、8、3、6、11

1~16 \Rightarrow 16、15、10、1、5、8、13、2、12、6、14、3、9、11、7、4

⋮
⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第三張數	末張數字
4		1
6	1	
8		2
10	2	
12		3
14	3	
16		4
18	4	
20		5
22	5	

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=4k+2$  倒數第三張為 k 數

(2) $n=4k$  倒數第一張為 k 數

四、五張循環

(一)、一「翻」四「蓋」：

1. 數字牌為奇數張

1~5 \Rightarrow 1、2、5、3、4

1~7 \Rightarrow 1、7、5、6、3、2、4

1~9 \Rightarrow 1、6、3、9、7、2、8、5、4

1~11 \Rightarrow 1、8、5、11、9、2、4、10、7、6、3

1~13 \Rightarrow 1、13、11、4、6、2、12、9、8、5、3、10、7

1~15 \Rightarrow 1、4、14、11、10、2、7、5、12、9、3、15、13、6、8

:

:

我們發現：

數字牌張數 [⊕]	倒數第五張數 [⊕]	倒數第四張數 [⊕]	倒數第三張數 [⊕]	倒數第二張數 [⊕]	未張數字 [⊕]
5	1				
7				2	
9		2			
11					3
13			3 [⊕]		
15	3				
17				4	
19		4			
21					5
23			5		
25	5				
27				6	
29		6			
31					7
33			7		

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=5k$ \Rightarrow 倒數第五張為 k 數

(2) $m=5k-1$ \Rightarrow 倒數第四張為 k 數

(3) $m=5k-2$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數

(4) $m=5k-3$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數

(5) $m=5k-4$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~6 \longrightarrow 1、3、6、4、5、2

1~8 \longrightarrow 1、7、4、3、5、2、8、6

1~10 \longrightarrow 1、3、9、6、5、2、7、4、10、8

1~12 \longrightarrow 1、11、8、7、4、2、9、6、12、10、3、5

1~14 \longrightarrow 1、6、4、11、8、2、14、12、5、7、3、13、10、9

1~16 \longrightarrow 1、16、14、7、9、2、5、15、12、11、3、8、6、13、10、4

:

:

我們發現：

數字牌張數	倒數第五張數	倒數第四張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數字
6					2
8			2		
10	2				
12				3	
14		3			
16					4
18			4		
20	4				
22				5	
24		5			

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=5k$ \longrightarrow 倒數第五張為 k 數

(2) $n=5k-1$ \longrightarrow 倒數第四張為 k 數

(3) $n=5k-2$ \longrightarrow 倒數第三張為 k 數

(4) $n=5k-3$ \longrightarrow 倒數第二張為 k 數

(5) $n=5k-4$ \longrightarrow 倒數第一張為 k 數

(二) 四「蓋」一「翻」：

1. 數字牌為奇數張

1~5 \longrightarrow 2、5、3、4、1

1~7 \longrightarrow 6、3、2、4、1、7、5

1~9 \longrightarrow 2、8、5、4、1、6、3、9、7

1~11 \longrightarrow 10、7、6、3、1、8、5、11、9、2、4

1~13 \longrightarrow 5、3、10、7、1、13、11、4、6、2、12、9、8

1~15 \longrightarrow 15、13、6、8、1、4、14、11、10、2、7、5、12、9、3

⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第五張數	倒數第四張數	倒數第三張數	倒數第二張數	未張數字
5					1
7			1		
9	1				
11				2	
13		2			
15					3
17			3		
19	3				
21				4	
23		4			

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=5k+4$ \longrightarrow 倒數第五張為 k 數

(2) $m=5k+3$ \longrightarrow 倒數第四張為 k 數

(3) $m=5k+2$ \longrightarrow 倒數第三張為 k 數

(4) $m=5k+1$ \longrightarrow 倒數第二張為 k 數

(5) $m=5k$ \longrightarrow 倒數第一張為 k 數

(二)四「蓋」一「翻」：

2. 數字牌為偶數張

1~6 \longrightarrow 6、4、5、2、1、3

1~8 \longrightarrow 5、2、8、6、1、7、4、3

1~10 \longrightarrow 7、4、10、8、1、3、9、6、5、2

1~12 \longrightarrow 12、10、3、5、1、11、8、7、4、2、9、6

1~14 \longrightarrow 3、13、10、9、1、6、4、11、8、2、14、12、5、7

1~16 \longrightarrow 6、13、10、4、1、16、14、7、9、2、5、15、12、11、3、8

⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第五張數	倒數第四張數	倒數第三張數	倒數第二張數	未張數字
6				1	
8		1			
10					2
12			2		
14	2				
16				3	
18		3			
20					4
22			4		
24	4				

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

- (1) $n=5k+4$ \Rightarrow 倒數第五張為 k 數
- (2) $n=5k+3$ \Rightarrow 倒數第四張為 k 數
- (3) $n=5k+2$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數
- (4) $n=5k+1$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數
- (5) $n=5k$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

四、六張循環

(一)、一「翻」五「蓋」：

1. 數字牌為奇數張

1~7 \Rightarrow 1、3、5、4、7、6、2

1~9 \Rightarrow 1、9、8、4、3、5、2、7、6

1~11 \Rightarrow 1、8、3、11、10、6、2、5、7、4、9

1~13 \Rightarrow 1、10、5、13、12、8、2、4、7、9、6、11、3

1~15 \Rightarrow 1、15、14、10、4、6、2、9、11、8、13、5、3、12、7

⋮
⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第五張數	倒數第三張數	末張數字
7			2
9		2	
11	2		
13			3
15		3	
17	3		
19			4
21		4	
23	4		
25			5

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

- (1) $m=6k-1$ \Rightarrow 倒數第五張為 k 數
- (2) $m=6k-3$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數
- (3) $m=6k-5$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~6 \longrightarrow 1、2、4、3、6、5

1~8 \longrightarrow 1、6、5、8、7、3、2、4

1~10 \longrightarrow 1、4、6、3、8、7、2、10、9、5

1~12 \longrightarrow 1、3、6、8、5、10、2、9、4、12、11、7

1~14 \longrightarrow 1、8、10、7、12、4、2、11、6、14、13、9、3、5

1~16 \longrightarrow 1、14、6、4、13、8、2、16、15、11、5、7、3、10、12、9

我們發現：

數字牌張數	倒數第六張數	倒數第四張數	倒數第二張數字
6	1		
8			2
10		2	
12	2		
14			3
16		3	
18	3		
20			4
22		4	
24	4		

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=6k$ \longrightarrow 倒數第六張為 k 數

(2) $n=6k-2$ \longrightarrow 倒數第四張為 k 數

(3) $n=6k-4$ \longrightarrow 倒數第二張為 k 數

(二)五「蓋」一「翻」：

1. 數字牌為奇數張

1~7 \longrightarrow 5、4、7、6、2、1、3

1~9 \longrightarrow 3、5、2、7、6、1、9、8、4

1~11 \longrightarrow 2、5、7、4、9、1、8、3、11、10、6

1~13 \longrightarrow 7、9、6、11、3、1、10、5、13、12、8、2、4

1~15 \longrightarrow 13、5、3、12、7、1、15、14、10、4、6、2、9、11、8

⋮
⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第六張數	倒數第四張數	倒數第二張數字
7			1
9		1	
11	1		
13			2
15		2	
17	2		
19			3
21		3	
23	3		

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=6k+5$ \Rightarrow 倒數第六張為 k 數

(2) $m=6k+3$ \Rightarrow 倒數第四張為 k 數

(3) $m=6k+1$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~6 \Rightarrow 2、4、3、6、5、1

1~8 \Rightarrow 8、7、3、2、4、1、6、5

1~10 \Rightarrow 7、2、10、9、5、1、4、6、3、8

1~12 \Rightarrow 9、4、12、11、7、1、3、6、8、5、10、2

1~14 \Rightarrow 14、13、9、3、5、1、8、10、7、12、4、2、11、6

1~16 \Rightarrow 7、3、10、12、9、1、14、6、4、13、8、2、16、15、11、5

∴
∴

我們發現：

數字牌張數	倒數第五張數	倒數第三張數	末張數字
6			1
8		1	
10	1		
12			2
14		2	
16	2		
18			3
20		3	
22	3		
24			4

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=6k+4$ \Rightarrow 倒數第五張為 k 數

(2) $n=6k+2$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數

(3) $n=6k$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

五、七張循環

(一)、一「翻」六「蓋」：

1. 數字牌為奇數張

1~7 \Rightarrow 1、2、5、3、6、7、4

1~9 \Rightarrow 1、7、5、8、9、6、3、2、4

1~11 → 1、5、4、6、3、9、7、2、10、11、8

1~13 → 1、10、3、7、6、8、5、2、11、9、4、12、13

1~15 → 1、12、5、9、8、10、7、2、4、13、11、6、14、15、3

⋮

⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第七張數	倒數第六張數	倒數第五張數	倒數第四張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數
7	1						
9						2	
11				2			
13		2					
15							3
17					3		
19			3				
21	3						
23						4	
25				4			
27		4					
29							5

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=7k$ → 倒數第七張為 k 數

(2) $m=7k-1$ → 倒數第六張為 k 數

(3) $m=7k-2$ → 倒數第五張為 k 數

(4) $m=7k-3$ → 倒數第四張為 k 數

(5) $m=7k-4$ → 倒數第三張為 k 數

(6) $m=7k-5$ → 倒數第二張為 k 數

(7) $m=7k-6$ → 倒數第一張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~8 → 1、3、6、4、7、8、5、2

1~10 → 1、9、10、7、4、3、5、2、8、6

1~12 → 1、10、8、3、11、12、9、2、6、5、7、4

1~14 → 1、3、12、10、5、13、14、2、11、4、8、7、9、6

1~16 → 1、14、12、7、15、16、4、2、13、6、10、9、11、8、3、5

⋮

⋮

我們發現：

數字牌張數	倒數第七張數	倒數第六張數	倒數第五張數	倒數第四張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數
8							2
10					2		
12			2				
14	2						
16						3	
18				3			
20		3					
22							4
24					4		
26			4				
28	4						
30						5	

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

- (1) $n=7k$ \Rightarrow 倒數第七張為 k 數
- (2) $n=7k-1$ \Rightarrow 倒數第六張為 k 數
- (3) $n=7k-2$ \Rightarrow 倒數第五張為 k 數
- (4) $n=7k-3$ \Rightarrow 倒數第四張為 k 數
- (5) $n=7k-4$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數
- (6) $n=7k-5$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數
- (7) $n=7k-6$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

(二)六「蓋」一「翻」：

1. 數字牌為奇數張

1~7 \Rightarrow 2、5、3、6、7、4、1

1~9 \Rightarrow 8、9、6、3、2、4、1、7、5

1~11 \Rightarrow 9、7、2、10、11、8、1、5、4、6、3

1~13 \Rightarrow 2、11、9、4、12、13、1、10、3、7、6、8、5

1~15 \Rightarrow 13、11、6、14、15、3、1、12、5、9、8、10、7、2、4

∴
∴

我們發現：

數字牌張數	倒數第七張數	倒數第六張數	倒數第五張數	倒數第四張數	倒數第三張數	倒數第二張數	未張數
7							1
9					1		
11			1				
13	1						
15						2	
17				2			
19		2					
21							3
23					3		
25			3				
27	3						
29						4	

※※小結：當 m 為奇數張牌時，

- (1) $m=7k+6$ \Rightarrow 倒數第七張為 k 數
- (2) $m=7k+5$ \Rightarrow 倒數第六張為 k 數
- (3) $m=7k+4$ \Rightarrow 倒數第五張為 k 數
- (4) $m=7k+3$ \Rightarrow 倒數第四張為 k 數
- (5) $m=7k+2$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數

(6) $m=7k+1$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數

(7) $m=7k$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

2. 數字牌為偶數張

1~8 \Rightarrow 6、4、7、8、5、2、1、3

1~10 \Rightarrow 4、3、5、2、8、6、1、9、10、7

1~12 \Rightarrow 9、2、6、5、7、4、1、10、8、3、11、12

1~14 \Rightarrow 11、4、8、7、9、6、1、3、12、10、5、13、14、2

1~16 \Rightarrow 10、9、11、8、3、5、1、14、12、7、15、16、4、2、13、6

∴
∴

我們發現：

數字牌張數	倒數第七張數	倒數第六張數	倒數第五張數	倒數第四張數	倒數第三張數	倒數第二張數	末張數
8						1	
10				1			
12		1					
14							2
16					2		
18			2				
20	2						
22						3	
24				3			
26		3					
28							4
30					4		

※※小結：當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=7k+6$ \Rightarrow 倒數第七張為 k 數

(2) $n=7k+5$ \Rightarrow 倒數第六張為 k 數

(3) $n=7k+4$ \Rightarrow 倒數第五張為 k 數

(4) $n=7k+3$ \Rightarrow 倒數第四張為 k 數

(5) $n=7k+2$ \Rightarrow 倒數第三張為 k 數

(6) $n=7k+1$ \Rightarrow 倒數第二張為 k 數

(7) $n=7k$ \Rightarrow 倒數第一張為 k 數

陸、研究結果

一、在二張循環『一翻一蓋』與『一蓋一翻』中：

(一)其排序的方式不同

(二)『一翻一蓋』中

1. 當 m 為奇數張牌時， $m=2k-1$ ，其末張數為 k

<例> $m=9$ ，即數字牌為1~9， $9=2k-1 \therefore k=5$

故其排序方式為：1、9、2、6、3、8、4、7、5

2. 當 n 為偶數張牌時， $n=2k$ ，其倒數第二張數為 k

<例> $n=6$ ，即數字牌為1~6， $6=2k \therefore k=3$

故其排序方式為：1、4、2、6、3、5

(三) 『一蓋一翻』中

1. 當 m 為奇數張牌時， $m=2k+1$ ，其倒數第二張數為 k

<例> $m=13$ ，即數字牌為1~13， $13=2k+1 \therefore k=6$

故其排序方式為：7、1、12、2、8、3、11、4、9、5、13、6、10

2. 當 n 為偶數張牌時， $n=2k$ ，其末張數為 k

<例> $n=14$ ，即數字牌為1~14， $14=2k \therefore k=7$

故其排序方式為：11、1、8、2、13、3、9、4、12、5、10、6、14、7

二、在三張循環『一翻二蓋』與『二蓋一翻』中：

(一)其排序的方式不同

(二) 『一翻二蓋』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=3k$ 倒數第三張為 k 數

(2) $m=3k-1$ 倒數第二張為 k 數

(3) $m=3k-2$ 倒數第一張為 k 數

<例> $m=9$ ，即數字牌為1~9， $9=3k \therefore k=3$

故其排序方式為：1、4、6、2、8、5、3、9、7

2. 當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=3k$ 倒數第三張為 k 數

(2) $n=3k-1$ 倒數第二張為 k 數

(3) $n=3k-2$ 倒數第一張為 k 數

<例> $n=6$ ，即數字牌為1~6， $6=3k \therefore k=2$

故其排序方式為：1、3、5、2、6、4

(三)『二蓋一翻』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=3k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=3k+1 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) m=3k \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $m=11$ ，即數字牌為 1~11， $11=3k+2 \quad \therefore k=3$

故其排序方式為：4、10、1、7、5、2、11、9、3、6、8

2. 當 n 為偶數張牌時，

$$(1) n=3k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) n=3k+1 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) n=3k \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $n=14$ ，即數字牌為 1~14， $14=3k+2 \quad \therefore k=4$

故其排序方式為：5、14、1、12、6、2、9、11、3、7、13、4、10、8

三、在四張循環『一翻三蓋』與『三蓋一翻』中：

(一)其排序的方式不同

(二)『一翻三蓋』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=4k-1 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=4k-3 \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $m=11$ ，即數字牌為 1~11， $11=4k-1 \quad \therefore k=3$

故其排序方式為：1、9、4、6、2、11、10、5、3、8、7

2. 當 n 為偶數張牌時，

$$(1) n=4k \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) n=4k-2 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

<例> $n=8$ ，即數字牌為 1~8， $8=4k \quad \therefore k=2$

故其排序方式為：1、3、8、7、2、5、4、6

(三)『三蓋一翻』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=4k+3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=4k+1 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

<例> $m=11$ ，即數字牌為 1~11， $11=4k+3 \therefore k=2$

故其排序方式為：3、8、7、1、9、4、6、2、11、10、5

2. 當 n 為偶數張牌時，

$$(1) n=4k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) n=4k \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $n=12$ ，即數字牌為 1~12， $12=4k \therefore k=3$

故其排序方式為：12、11、6、1、4、9、8、2、10、5、7、3

四、在五張循環『一翻四蓋』與『四蓋一翻』中：

(一)其排序的方式不同

(二)『一翻四蓋』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=5k \quad \text{倒數第五張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=5k-1 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) m=5k-2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(4) m=5k-3 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(5) m=5k-4 \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $m=15$ ，即數字牌為 1~15， $15=5k \therefore k=3$

故其排序方式為：1、4、14、11、10、2、7、5、12、9、3、15、13、6、8

2. 當 n 為偶數張牌時，

$$(1) n=5k+4 \quad \text{倒數第五張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) n=5k+3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) n=5k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(4) n=5k+1 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(5) n=5k \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $n=10$ ，即數字牌為 1~10， $10=5k \therefore k=2$

故其排序方式為：1、3、9、6、5、2、7、4、10、8

(三)『四蓋一翻』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=5k+4 \quad \text{倒數第五張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=5k+3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) m=5k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(4) m=5k+1 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(5) m=5k \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $m=11$ ，即數字牌為 1~11， $11=5k+1 \quad \therefore k=2$

故其排序方式為：10、7、6、3、1、8、5、11、9、2、4

2. 當 n 為偶數張牌時，

$$(1) n=5k+4 \quad \text{倒數第五張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) n=5k+3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) n=5k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(4) n=5k+1 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(5) n=5k \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $n=12$ ，即數字牌為 1~12， $12=5k+2 \quad \therefore k=2$

故其排序方式為：12、10、3、5、1、11、8、7、4、2、9、6

五、在六張循環『一翻五蓋』與『五蓋一翻』中：

(一)其排序的方式不同

(二)『一翻五蓋』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=6k-1 \quad \text{倒數第五張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=6k-3 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) m=6k-5 \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $m=15$ ，即數字牌為 1~15， $15=6k-3 \quad \therefore k=3$

故其排序方式為：1、15、14、10、4、6、2、9、11、8、13、5、3、12、7

2. 當 n 為偶數張牌時，

$$(1) n=6k \quad \text{倒數第六張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) n=6k-2 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) n=6k-4 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

<例> $n=10$ ，即數字牌為 1~10， $10=6k-2 \quad \therefore k=2$

故其排序方式為：1、3、9、6、5、2、7、4、10、8

(三)『五蓋一翻』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=6k+5 \quad \text{倒數第六張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=6k+3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

(3) $m=6k+1$ 倒數第二張為 k 數

<例> $m=13$ ，即數字牌為 1~13， $13=6k+1 \therefore k=2$

故其排序方式為：7、9、6、11、3、1、10、5、13、12、8、2、4

2. 當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=6k+4$ 倒數第五張為 k 數

(2) $n=6k+2$ 倒數第三張為 k 數

(3) $n=6k$ 倒數第一張為 k 數

<例> $n=12$ ，即數字牌為 1~12， $12=6k \therefore k=2$

故其排序方式為：1、3、6、8、5、10、2、9、4、12、11、7

六、在七張循環『一翻六蓋』與『六蓋一翻』中：

(一)其排序的方式不同

(二)『一翻六蓋』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

(1) $m=7k$ 倒數第七張為 k 數

(2) $m=7k-1$ 倒數第六張為 k 數

(3) $m=7k-2$ 倒數第五張為 k 數

(4) $m=7k-3$ 倒數第四張為 k 數

(5) $m=7k-4$ 倒數第三張為 k 數

(6) $m=7k-5$ 倒數第二張為 k 數

(7) $m=7k-6$ 倒數第一張為 k 數

<例> $m=13$ ，即數字牌為 1~13， $13=7k-1 \therefore k=2$

故其排序方式為：1、10、3、7、6、8、5、2、11、9、4、12、13

2. 當 n 為偶數張牌時，

(1) $n=7k$ 倒數第七張為 k 數

(2) $n=7k-1$ 倒數第六張為 k 數

(3) $n=7k-2$ 倒數第五張為 k 數

$$(4) n=7k-3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(5) n=7k-4 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(6) n=7k-5 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(7) n=7k-6 \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $n=14$ ，即數字牌為 1~14， $14=7k \quad \therefore k=2$

故其排序方式為：1、3、12、10、5、13、14、2、11、4、8、7、9、6

(三)『六蓋一翻』中

1. 當 m 為奇數張牌時，

$$(1) m=7k+6 \quad \text{倒數第七張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) m=7k+5 \quad \text{倒數第六張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) m=7k+4 \quad \text{倒數第五張為 } k \text{ 數}$$

$$(4) m=7k+3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(5) m=7k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

$$(6) m=7k+1 \quad \text{倒數第二張為 } k \text{ 數}$$

$$(7) m=7k \quad \text{倒數第一張為 } k \text{ 數}$$

<例> $m=15$ ，即數字牌為 1~15， $15=7k+1 \quad \therefore k=2$

故其排序方式為：13、11、6、14、15、3、1、12、5、9、8、10、7、2、4

2. 當 n 為偶數張牌時，

$$(1) n=7k+6 \quad \text{倒數第七張為 } k \text{ 數}$$

$$(2) n=7k+5 \quad \text{倒數第六張為 } k \text{ 數}$$

$$(3) n=7k+4 \quad \text{倒數第五張為 } k \text{ 數}$$

$$(4) n=7k+3 \quad \text{倒數第四張為 } k \text{ 數}$$

$$(5) n=7k+2 \quad \text{倒數第三張為 } k \text{ 數}$$

(6) $n=7k+1$ 倒數第二張為 k 數

(7) $n=7k$ 倒數第一張為 k 數

<例> $n=14$ ，即數字牌為 1~14， $14=7k \therefore k=2$

故其排序方式為：11、4、8、7、9、6、1、3、12、10、5、13、14、2

柒、問題與討論

一、如果找到：「一翻一蓋」的排序方式，是否可以快速找到「一蓋一翻」的排序方式？

答：可以，因為只要把一翻一蓋的末張數移到最前面就是一蓋一翻的排序方式

例：「一翻一蓋」的 1~9 \Rightarrow 1、9、2、6、3、8、4、7、5

「一蓋一翻」的 1~9 \Rightarrow 5、1、9、2、6、3、8、4、7

二、依上一題的結論，「一翻 P 蓋」與「P 蓋一翻」是否也存在同樣快速的規律呢？

答：是，只要把後面 P 張移到最前面即可

例：「一翻六蓋」的 1~12 \Rightarrow 1、10、8、3、11、12、9、2、6、5、7、4

「六蓋一翻」的 1~12 \Rightarrow 9、2、6、5、7、4、1、10、8、3、11、12

三、在「一翻 h 蓋」的排序過程中，數字牌各為奇數張、偶數張時是否可找出常模組？

答：設有 $p=1+h$ 張循環

(一) p 為奇數

$m=pk-b$	倒數第 $(p-b)$ 張為 k 數	$p>b \geq 0$ 整數
$n=pk-b$	倒數第 $(p-b)$ 張為 k 數	$p>b \geq 0$ 整數

(二) p 為偶數

$m=pk-a$	倒數第 $(p-a)$ 張為 k 數	$p>a$ ， a 為奇數
$n=pk-c$	倒數第 $(p-c)$ 張為 k 數	$p>c$ ， c 為偶數

四、在「h 蓋一翻」的排序過程中，數字牌各為奇數張、偶數張時是否可找出常模組？

答：設有 $q=1+h$ 張循環

(一) q 為奇數

$m=qk+b$	倒數第 $(b+1)$ 張為 k 數	$q>b \geq 0$ 整數
$n=qk+b$	倒數第 $(b+1)$ 張為 k 數	$q>b \geq 0$ 整數

(二) q 為偶數

$$\begin{cases} m=qk+a \\ n=qk+c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(a+1)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(c+1)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} q>a, a\text{為奇數} \\ q>c, c\text{為偶數} \end{array}$$

捌、結論

一、不論先一翻再 h 蓋或先 h 蓋後再一翻，只要找到 k 數的位置(在倒數第幾張)，就可以透過

『翻』『蓋』口訣把所有數字依序擺放出來。而其中 k 的找法如下：

(一) 「一翻 h 蓋」時：設有 $p=1+h$ 張循環

1. p 為奇數

$$\begin{cases} m=pk-b \\ n=pk-b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(p-b)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(p-b)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} p>b\geq 0\text{整數} \\ p>b\geq 0\text{整數} \end{array}$$

2. p 為偶數

$$\begin{cases} m=pk-a \\ n=pk-c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(p-a)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(p-c)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} p>a, a\text{為奇數} \\ p>c, c\text{為偶數} \end{array}$$

(二) 「 h 蓋一翻」時：設有 $q=1+h$ 張循環

1. q 為奇數

$$\begin{cases} m=qk+b \\ n=qk+b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(b+1)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(b+1)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} q>b\geq 0\text{整數} \\ q>b\geq 0\text{整數} \end{array}$$

2. q 為偶數

$$\begin{cases} m=qk+a \\ n=qk+c \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{倒數第}(a+1)\text{張為}k\text{數} \\ \text{倒數第}(c+1)\text{張為}k\text{數} \end{array} \quad \begin{array}{l} q>a, a\text{為奇數} \\ q>c, c\text{為偶數} \end{array}$$

<例>在一翻 9 蓋的遊戲下，有 1~17 張數字牌，要如何擺放才可依序出現？

作法：

$$\because p=1+9=10 \quad \therefore p \text{ 為偶數}$$

$$\text{又 } \because 17 \text{ 張是奇數，即 } m=17$$

$$17=10k-3 \quad \therefore a=3, k=2$$

$$\therefore 10-3=7 \implies \text{倒數第 } 7 \text{ 張是 } 2$$

故排序為：1、17、13、8、3、7、9、6、12、10、2、5、16、14、11、4、15

玖、參展心得

剛開始研究時，各種方法都去嘗試，想尋找任何的可能性，可是不久就遇上了瓶頸，望著看似毫無規律的數字，完全摸不著頭緒，當時愈急著找出規律頭腦就愈混亂，找到後來，一度想放棄這個題材，可又想已費了不少力氣去做這題目，這樣放棄實在可惜。於是在老師們的鼓勵指點下，不死心的繼續堅持研究，所幸付出的努力沒有白費，我們發現「一翻h蓋」及「h蓋一翻」彼此間是擁有某些規律的，在找到這些規律後，心中還蠻有成就感的，較為可惜的是，現階段國中所學的知識，無法將此活動做更深入的探究與完善的敘述，期待將來有機會能做更進一步的探索。