宜蘭縣106年度中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：**數學科**

組　　別：**國中組**

$$\left(\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1 \\ \times\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ \\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ \ \ \ \\ 1\ 1\ 1\ 1\ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \hline 1\ 2\ 3\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{array}\right)^2$$

作品名稱：**神機妙『算』**

關 鍵 詞：遞增數、遞減數、對稱數

編　　號：

目錄

神機妙『算』

摘要

此研究主要探討從 11 至 999999 的數，將每一個數做平方後，哪些數其本身與其平方數皆具有遞增性、遞減性與對稱性，這些數都分布於何處？彼此之間，是否存在著哪些規律與關聯？

經過分析，發現若一數與其平方皆為『遞增數』者，必具有一定的規律，較特殊的數，其分布有一定的範圍；若兩者均為『遞減數』者，則只存在於 8 種數，；若兩者均為『對稱數』則雖具規律，但也僅止於由 0、1、2 所組成的規律數。

壹、研究動機

因與畢業學長聊天的時候，意外談到有關平方的遞增數，很好奇遞增數要怎麼找，當中又是否存在規律？於是找了同學一起研究遞增數，沒想到做到一半的時候我們腦中又突然閃了另一道光，「遞減數或對稱數是不是也有？」，它們是否也存在著某些規律??

貳、研究目的

想知道哪些數本身為遞增數，其平方數也為遞增數？這些數都分布於何處？彼此之間，是否存在著某些規律與關聯？同樣是否也有遞減數，其平方數也為遞減數？那些對稱數其平方後會是個對稱數(例：22^2=484、101^2=10201)？是否也存在著某些規律與關聯？

叁、研究設備及器材

A4 紙、原子筆、電腦（word、excel）

肆、名詞定義

1、遞增數：指若一三位數為 abc 其數字間 a≦b≦c　＜例＞123 或 144

2、遞減數：指若一三位數為 abc 其數字間 c≦b≦a　＜例＞441 或 961

3、對稱數：指若一三位數為排列為 aba　＜例＞121 或 484

4、nk=1234…n　＜例＞6k=123456

5、nh=n…4321　＜例＞6h=654321

6、ne=10203040…n0　＜例＞4e=10203040

7、nt=0n…04030201　＜例＞4t=04030201

伍、研究過程

紅色為遞增數，綠色為遞減數，藍色為對稱數

首先，我們先利用 Excel 把所有二位數從 10 到 99 的所有平方列出來，再從中研究

一、二位數的平方數：

$10^2=100$	$11^2=121$	$12^2=144$	$13^2=169$	$14^2=196$	$15^2=225$
$16^2=256$	$17^2=289$	$18^2=324$	$19^2=361$	$20^2=400$	$21^2=441$
$22^2=484$	$23^2=529$	$24^2=576$	$25^2=625$	$26^2=676$	$27^2=729$
$28^2=784$	$29^2=841$	$30^2=900$	$31^2=961$	$33^2=1089$	$34^2=1156$
$35^2=1225$	$36^2=1296$	$37^2=1369$	$38^2=1444$	$39^2=1521$	$44^2=1936$
$45^2=2025$	$46^2=2116$	$47^2=2209$	$48^2=2304$	$49^2=2401$	$55^2=3025$
$56^2=3136$	$57^2=3249$	$58^2=3364$	$59^2=3481$	$66^2=4356$	$67^2=4489$
$68^2=4624$	$69^2=4761$	$77^2=5929$	$78^2=6084$	$79^2=6241$	$80^2=6400$
$88^2=7744$	$89^2=7921$	$90^2=8100$	$93^2=8649$	$98^2=9604$	$99^2=9801$

※※※發現二位數的平方數為：

(一)遞增數的有 12、13、15、16、17、34、35、37、38、67。

(二)遞減數的有 10、20、21、30、31、80、88、90

(三)對稱數的有 11、22

二、三位數的平方數：

100^2=10000	101^2=10101	103^2=10609	104^2=10816	105^2=11025
106^2=11236	107^2=11449	108^2=11664	109^2=11881	111^2=12321
112^2=12544	113^2=12769	114^2=12996	115^2=13225	116^2=13456
117^2=13689	118^2=13924	119^2=14161	121^2=14641	122^2=14884

：

155^2=24025	156^2=24336	157^2=24649	158^2=24964	159^2=25281
166^2=27556	167^2=27889	168^2=28224	169^2=28561	177^2=31329
178^2=31684	179^2=32041	188^2=35344	189^2=35721	199^2=39601
200^2=40000	202^2=40804	210^2=44100	212^2=44944	222^2=49284

：

：

249^2=62001	255^2=65025	256^2=65536	257^2=66049	258^2=66564
264^2=69696	266^2=68644	267^2=71289	268^2=71824	269^2=72361
277^2=76729	278^2=77284	279^2=67081	288^2=82944	289^2=83521
299^2=89401	300^2=90000	310^2=96100	333^2=110889	334^2=111556
335^2=112225	336^2=112896	337^2=113569	338^2=114244	339^2=114921

：

359^2=128881	366^2=133956	367^2=134689	368^2=135424	369^2=136161

：

599^2=358801	666^2=443556	667^2=444889	668^2=446224	669^2=44756

：

778^2=605284	779^2=606841	788^2=620944	789^2=622521	799^2=638401
800^2=640000	880^2=774400	888^2=788544	889^2=790321	899^2=808201
900^2=810000	996^2=992016	997^2=994009	998^2=996004	999^2=998001

※※※發現三位數的平方數為

(一)遞增數的有：116、117、167、334、335、337、367、667。

(二)遞減數的有：100、200、210、300、310、800、880、900

(三)對稱數的有：101、111、121、202、212

三、有了三位數的結果，於是我們繼續研究四位數的平方數：

1000^2=1000000	1001^2=1002001	1111^2=1234321	1112^2=1236544
1113^2=1238769	1114^2=1240996	1115^2=1243225	1116^2=1245456
1117^2=1247689	1118^2=1249924	1119^2=1252161	1122^2=1258884

：

：

1456^2=2119936	1457^2=2122849	1458^2=2125764	1459^2=2128681
1466^2=2149156	1467^2=2152089	1468^2=2152089	1469^2=2157961
1477^2=2181529	1478^2=2184484	1479^2=2187441	1488^2=2214144

：

：

1599^2=2556801	1666^2=2775556	1667^2=2778889	1668^2=2782224
1669^2=2785561	1677^2=2812329	1678^2=2815684	1679^2=2819041
1688^2=2849344	1689^2=2852721	1699^2=2886601	1777^2=3157729

：

1999^2=399600	2000^2=4000000	2002^2=4008004	2100^2=4410000
2222^2=4937284	2223^2=4941729	2224^2=4946176	2225^2=4950625
2226^2=4955076	2227^2=4959529	2228^2=4963984	2229^2=4968441

：

$2278^2=5189284$	$2285^2=5221225$	$2288^2=5234944$	$2289^2=5239521$
$2299^2=5285401$	$2333^2=5442889$	$2334^2=5447556$	$2335^2=5452225$

：

$2344^2=5494336$	$2345^2=5499025$	$2346^2=5503716$	$2347^2=5508409$
$2348^2=5513104$	$2349^2=5517801$	$2350^2=5522500$	$2355^2=5546025$
$2356^2=5550736$	$2357^2=5555449$	$2358^2=5560164$	$2359^2=5564881$

：

$2389^2=5707321$	$2399^2=5755201$	$2444^2=5973136$	$2445^2=5978025$
$2636^2=6948496$	$2446^2=5982916$	$3000^2=9000000$	$3100^2=9610000$

：

$3333^2=11108889$	$3334^2=11115556$	$3335^2=11122225$	$3336^2=11128896$
$3337^2=11135569$	$3338^2=11142244$	$3339^2=11148921$	$3344^2=11182336$
$3345^2=11189025$	$3346^2=11195716$	$3347^2=11202409$	$3348^2=11209104$
$3349^2=11215801$	$3355^2=11256025$	$3356^2=11262736$	$3357^2=11269449$
$3358^2=11276164$	$3359^2=11282881$	$3366^2=11329956$	$3367^2=11336689$

：

$3666^2=13439556$	$3667^2=13446889$	$3668^2=13454224$	$3669^2=13461561$
$3677^2=13520329$	$3678^2=13527684$	$3679^2=13535041$	$3688^2=13601344$
$3689^2=13608721$	$3699^2=13682601$	$3777^2=14265729$	$3778^2=14273284$
$3779^2=14280841$	$3788^2=14348944$	$3789^2=14356521$	$3799^2=14432401$

：

：

$6666^2=44435556$	$6667^2=44448889$	$6668^2=44462224$	$6669^2=44475561$
$6677^2=44582329$	$6678^2=44595684$	$6679^2=44609041$	$6688^2=44729344$
$6689^2=44742721$	$6699^2=44876601$	$6777^2=45927729$	$6778^2=45941284$
$6789^2=46090521$	$6799^2=46226401$	$6888^2=47444544$	$6889^2=47458321$

:

:

6899^2=47596201	6999^2=48986001	7777^2=60481729	7778^2=60497284
7779^2=60512841	7788^2=60652944	7789^2=60668521	7799^2=60824401
7888^2=62220544	7889^2=62236321	8000^2=64000000	8800^2=77440000
8889^2=79014321	8899^2=79192201	8999^2=80982001	9999^2=99980001

※※※發現四位數的平方數為

(一)遞增數的有：1667、3334、3335、3337、3367、3667、6667

(二)遞減數的有：1000、2000、2100、3000、3100、8000、8800、9000

(三)對稱數的有：1001、1111、2002

五、接著我們繼續討論五位數的平方數

10000^2=100000000	10001^2=100020001	10101^2=102030201	10199^2=104019601
10201^2=104060401	11011^2=121242121	11111^2=123454321	11112^2=123476544
11113^2=123498769	11114^2=123520996	11115^2=123543225	11116^2=123565456

:

:

11166^2=124679556	11167^2=24701889	11168^2=124724224	11169^2=124746561
11177^2=124925329	11178^2=124947684	11179^2=124970041	11188^2=125171344
11189^2=125193721	11208^2=125619264	11209^2=125641681	11210^2=125664100
11211^2=125686521	11223^2=125955729	11224^2=125978176	11225^2=126000625
11226^2=126023076	11227^2=126045529	11228^2=126067984	11229^2=126090441

:

:

16660^2=277555600	16661^2=277588921	16662^2=277622244	16663^2=277655569
16664^2=277688896	16665^2=277722225	16666^2=277755556	16667^2=277788889

$16668^2=277822224$	$16669^2=277855561$	$16670^2=277888900$	$16671^2=277922241$

:

:

$19994^2=399760036$	$19995^2=399800025$	$19996^2=399840016$	$19997^2=399880009$
$19998^2=399920004$	$19999^2=399960001$	$20000^2=400000000$	$20001^2=400040001$
$20002^2=400080004$	$20003^2=400120009$	$20004^2=400160016$	$20005^2=400200025$

:

:

$20101^2=404050201$	$20102^2=404090404$	$20103^2=404130609$	$20104^2=404170816$
$20105^2=404211025$	$20106^2=404251236$	$20107^2=404291449$	$20108^2=404331664$
$20109^2=404211025$	$20110^2=404412100$	$20111^2=404452321$	$20112^2=404492544$

:

:

$20995^2=440790025$	$20996^2=440832016$	$20997^2=440874009$	$20998^2=440916004$
$20999^2=440958001$	$21000^2=441000000$	$21001^2=441042001$	$21002^2=441084004$
$21003^2=441126009$	$21004^2=441168016$	$21005^2=441210025$	$21006^2=441252036$

:

$22856^2=522396736$	$22857^2=522442449$	$22858^2=522488164$	$22859^2=522533881$
$22860^2=522579600$	$22861^2=522625321$	$22862^2=522671044$	$22863^2=522716769$
$22864^2=522762496$	$22865^2=522808225$	$22866^2=522853956$	$22867^2=522899689$

:

:

$24843^2=522579600$	$24844^2=52265321$	$24845^2=522671044$	$24846^2=617323716$
$24847^2=617373409$	$24848^2=617423104$	$24849^2=617475801$	$24850^2=617522500$
$24851^2=617572201$	$24852^2=617621904$	$24853^2=617671609$	$24854^2=617721316$

:

:

29995^2=899700025	29996^2=899760016	29997^2=899820009	29998^2=899880004
29999^2=899940001	30000^2=900000000	30001^2=900060001	30002^2=900120004
30003^2=900180009	30004^2=900240016	30005^2=900300025	30006^2=900360036

:

:

30689^2=941814721	30690^2=941876100	30691^2=941937481	30692^2=941998864
30693^2=942060249	30694^2=900240016	30695^2=900300025	30696^2=900360036
30697^2=942305809	30698^2=942367204	30699^2=942428601	30700^2=942490000

:

:

30991^2=960442081	30992^2=960504064	30993^2=960566049	30994^2=960628036
30995^2=960690025	30996^2=960752016	30997^2=960814009	30998^2=960876004
30999^2=960938001	31000^2=961000000	31001^2=961062001	31002^2=961124004

:

:

33334^2=1111155556	33335^2=1111222225	33336^2=1111288896	33337^2=1111355569
33338^2=1111422244	33339^2=1111488921	33340^2=1111555600	33341^2=1111622281

:

:

33365^2=1113223225	33366^2=1113289956	33367^2=1113356689	33368^2=1113423424
33369^2=1113490161	33370^2=1114024129	33371^2=1113623641	33372^2=1113690384

:

:

33666^2=1133399556	33667^2=1133466889	33668^2=1133534224	33669^2=1133601561
33670^2=1133668900	33671^2=1133736241	33672^2=1133803584	33673^2=1133870929

:

:

$36664^2=1344248896$ $36665^2=1344322225$ $36666^2=1344395556$ $36667^2=1344468889$

$36668^2=1344542224$ $36669^2=1344615561$ $36670^2=1244688900$ $36671^2=1344762241$

$36672^2=1344835584$ $36673^2=1344908929$ $36674^2=1344982276$ $36675^2=1345055625$

:

:

$66665^2=4444222225$ $66666^2=4444355556$ $66667^2=4444488889$ $66668^2=4444622224$

$66669^2=4444755561$ $66670^2=4444888900$ $66671^2=4445022241$ $66672^2=4445155584$

$66673^2=4445288929$ $66674^2=4445422276$ $66675^2=4445555625$ $66676^2=4445688976$

:

:

$87996^2=7743296016$ $87997^2=7743472009$ $87998^2=7743648004$ $87999^2=7743824001$

$80000^2=6400000000$ $80001^2=6400160001$ $80002^2=6400320004$ $80003^2=6400480009$

$80004^2=6400640016$ $80005^2=6400800025$ $80006^2=6400960036$ $80007^2=6401120049$

:

$88000^2=7744000000$ $88001^2=6400160001$ $88002^2=6400320004$ $88003^2=6400480009$

$88004^2=7744704016$ $88005^2=7744880025$ $88006^2=7745056036$ $88007^2=7745232049$

$88008^2=7745408064$ $88009^2=7745584081$ $88010^2=7745760100$ $88011^2=7745936121$

:

:

$89998^2=7744704016$ $89999^2=8099820001$ $90000^2=8100000000$ $90001^2=8100180001$

$90002^2=8100360004$ $90003^2=8100540009$ $90004^2=8100720016$ $90005^2=8100900025$

$90006^2=8101080036$ $90007^2=8101260049$ $90008^2=8101440064$ $90009^2=8101620081$

:

:

$99992^2=9998400064$ $99993^2=9998600049$ $99994^2=9998800036$ $99995^2=9999000025$

$99996^2=9999200016$ $99997^2=9999400009$ $99998^2=9999600004$ $99999^2=9999800001$

※※※發現五位數為

(1)遞增數的有：16667、33334、33335、33337、33367、33667、36667、66667

(2)遞減數的有：10000、20000、21000、30000、31000、80000、88000、90000

(3)對稱數的有：10001、10101、10201、11111、11011、11211、20002、20102

六、接著我們繼續觀察六位數

$100000^2=10000000000$　$100001^2=10000200001$　$100002^2=10000400004$

$100003^2=10000600009$　$100004^2=10000800016$　$100005^2=10001000025$

$100006^2=10001200036$　$100007^2=10001400049$　$100008^2=10001600064$

:

:

$101100^2=10221210000$　$101101^2=10221412201$　$101102^2=10221614404$

$101103^2=10221816609$　$101104^2=10222018816$　$101105^2=10222221025$

$101106^2=10222423236$　$101107^2=10222625449$　$101108^2=10222827664$

:

:

$110011^2=12102420121$　$110012^2=12102640144$　$110013^2=12102860169$

$110014^2=12103080196$　$110015^2=12103300225$　$110016^2=12103520256$

$110017^2=12103740289$　$110018^2=12103960324$　$110019^2=12104180361$

:

:

$111110^2=12345432100$　$111111^2=12345654321$　$111112^2=12345876544$

$111113^2=12346098769$　$111114^2=12346320996$　$111115^2=12346543225$

$111116^2=12346765456$　$111117^2=12346987689$　$111118^2=12347209924$

:

:

$166666^2=27777555556$　$166667^2=27777888889$　$166668^2=27778222224$

$166669^2=27778555561$	$166670^2=27778888900$	$166671^2=27779222241$
$166672^2=27779555584$	$166673^2=27779888929$	$166674^2=27780222276$

:

:

$200000^2=40000000000$	$200001^2=40000400001$	$200002^2=40000800004$
$200003^2=40001200009$	$200004^2=40001600016$	$200005^2=40002000025$
$200006^2=40002400036$	$200007^2=40002800049$	$200008^2=40003200064$

:

:

$210000^2=44100000000$	$210001^2=44100420001$	$210002^2=44100840004$
$210003^2=44101260009$	$210004^2=44101680016$	$210005^2=44102100025$
$210006^2=44102520036$	$210007^2=44102940049$	$210008^2=44103360064$

:

:

$300000^2=90000000000$	$300001^2=90000600001$	$300002^2=90001200004$
$300003^2=90001800009$	$300004^2=90002400016$	$300005^2=90003000025$
$300006^2=90003600036$	$300007^2=90004200049$	$300008^2=90004800064$

:

:

$310000^2=96100000000$	$310001^2=96100620001$	$310002^2=96101240004$
$310003^2=96101860009$	$310004^2=96102480016$	$310005^2=96103100025$
$310006^2=96103720036$	$310007^2=96104340049$	$310008^2=96104960064$

:

:

$333334^2=111111555556$	$333335^2=111112222225$	$333336^2=111112888896$
$333337^2=111113555569$	$333338^2=111114222244$	$333339^2=111114888921$

:

:

333366^2=111132889956	333367^2=111133556689	333368^2=111134223424
333369^2=111134890161	333370^2=111135556900	333371^2=111136223641

:

:

333662^2=111330330244	333663^2=111330997569	333664^2=111331664896
333665^2=111332332225	333666^2=111332999556	333667^2=111333666889
333668^2=111334334224	333669^2=111335001561	333670^2=111335668900

:

:

336666^2=113343995556	336667^2=113344668889	336668^2=113345342224
336669^2=113346015561	336670^2=113346688900	336671^2=113347362241
336672^2=113348035584	336673^2=113348708929	336674^2=113349382276

:

:

366666^2=134443955556	366667^2=134444688889	366668^2=134445422224
366669^2=134446155561	366670^2=134446888900	366671^2=134447622241
366672^2=134448355584	366673^2=134449088929	366674^2=134449822276

:

:

577788^2=333838972944	577789^2=333840128521	577790^2=333841284100
577791^2=333842439681	577792^2=333843595264	577793^2=333844750849

:

:

577999^2=334082844001	578888^2=335111316544	578889^2=335112474321
578899^2=335124052201	578999^2=335239842001	579999^2=336398840001
588888^2=346789076544	588889^2=346790254321	588899^2=346802032201

$588999^2=346919822001$	$589999^2=348098820001$	$599999^2=359998800001$
$666666^2=444443555556$	$666667^2=444444888889$	$666668^2=444446222224$
$666669^2=444447555561$	$666677^2=444458222329$	$666678^2=444459555684$
$666679^2=444460889041$	$666688^2=444472889344$	$666689^2=444474222721$
$666699^2=444487556601$	$666777^2=444591567729$	$666778^2=444592901284$

:

:

$777777^2=604937061729$	$777778^2=604938617284$	$777779^2=604940172841$
$777788^2=604954172944$	$777789^2=604955728529$	$778899^2=606683652201$
$778999^2=606839442001$	$779999^2=608398440001$	$788888^2=622344276544$
$788889^2=622345854321$	$788899^2=622361632201$	$788999^2=622519422001$
$789999^2=624098420001$	$799999^2=639998400001$	$800000^2=640000000000$
$880000^2=774400000000$	$888888^2=790121876544$	$900000^2=999998000001$

:

:

$999991^2=999982000081$	$999992^2=999984000064$	$999993^2=999986000049$
$999994^2=999988000036$	$999995^2=999990000025$	$999996^2=999992000016$
$999997^2=999994000009$	$999998^2=999996000004$	$999999^2=999998000001$

※※※發現六位數為

(1)遞增數的有：166667、333334、333335、333337、333367、333667、336667、366667、666667。

(2)遞減數的有：100000、200000、210000、300000、3100000、800000、880000、900000

(3)對稱數的有：100001、101101、110011、111111、200002

陸、研究結果

雖然我們只尋找到六位數，卻發現很多有趣的數據~~~~~~

一、以遞增數來說：

(一)、對某些特定數字而言，這些規律性就算超過六位數也適用

1、4 前面 n 個 3：

34^2=1156 ⇨1 個 3，平方後 2 個 1；1 個 5；末位數 6

334^2=111556⇨2 個 3，平方後 3 個 1；2 個 5；末位數 6

3334^2=11115556⇨3 個 3，平方後 4 個 1；3 個 5；末位數 6

33334^2=1111155556⇨4 個 3，平方後 5 個 1；4 個 5；末位數 6

333334^2=111111555556⇨5 個 3，平方後 6 個 1；5 個 5；末位數 6

※※其平方後的值為

(n+1)個 1	n 個 5	6

末位數

＜例＞ $(\overbrace{333333333}^{9}4)^2=\overbrace{1111111111}^{10}\overbrace{555555555}^{9}6$

2、5 前面 n 個 3：

35^2=1225⇨1 個 3，平方後 1 個 1；2 個 2；末位數 5

335^2=112225⇨2 個 3，平方後 2 個 1；3 個 2；末位數 5

3335^2=11122225⇨3 個 3，平方後 3 個 1；4 個 2；末位數 5

33335^2=1111222225⇨4 個 3，平方後 4 個 1；5 個 2；末位數 5

333335^2=111112222225⇨5 個 3，平方後 5 個 1；6 個 2；末位數 5

※※其平方後的值為

n 個 1	(n+1)個 2	5

末位數

＜例＞ $(\overbrace{3333333333}^{8}5)^2=\overbrace{11111111}^{8}\overbrace{222222222}^{9}5$

3、7 前面 n 個 3：

$37^2=1369$⇨1 個 3，平方後 1 個 1； 3 的後面 0 個 5；末二數 69

$337^2=113569$⇨2 個 3，平方後 2 個 1；3 的後面 1 個 5；末二數 69

$3337^2=11135569$⇨3 個 3，平方後 3 個 1；3 的後面 2 個 5；末二數 69

$33337^2=1111355569$⇨4 個 3，平方後 4 個 1；3 的後面 3 個 5；末二數 69

$333337^2=111113555569$⇨5 個 3，平方後 5 個 1；3 的後面 4 個 5；末二數 69

※※其平方後的值為

n 個 1	3	(n-1)個 5	69

末二位數

＜例＞ $(\overbrace{3333333333}^{10}7)^2=\overbrace{1111111111}^{10}3\overbrace{555555555}^{9}69$

4、7 前面 n 個 6：

$67^2=4489$⇨1 個 6，平方後 2 個 4；1 個 8；末位數 9

$667^2=444889$⇨2 個 6，平方後 3 個 4；2 個 8；末位數 9

$6667^2=44448889$⇨3 個 6，平方後 4 個 4；3 個 8；末位數 9

$66667^2=4444488889$⇨4 個 6，平方後 5 個 4；4 個 8；末位數 9

$666667^2=444444888889$⇨5 個 6，平方後 6 個 4；5 個 8；末位數 9

※※其平方後的值為

(n+1)個 4	n 個 8	9

末位數

＜例＞ $(\overbrace{66666666}^{8}7)^2=\overbrace{444444444}^{9}\overbrace{88888888}^{8}9$

5、1 與 7 之間 n 個 6 (n 可為 0)：

$167^2=27889$⇨1 個 6，平方後首位數 2；1 個 7；2 個 8；末位數 9

$1667^2=2778889$⇨2 個 6，平方後首位數 2；2 個 7；3 個 8；末位數 9

$16667^2=277788889$⇨3 個 6，平方後首位數 2；3 個 7；4 個 8；末位數 9

$166667^2=27777888889$⇨4 個 6，平方後首位數 2；4 個 7；5 個 8；末位數 9

※※其平方後的值為	2	n 個 7	(n+1)個 8	9	末位數
	首位				

<例> $(1\overbrace{666666666}^{9}7)^2=2\overbrace{777777777}^{9}\overbrace{8888888888}^{10}9$

6、**3 與 7 之間 n 個 6：**

367^2=134689⇨1 個 6，平方後首二位數 13；1 個 4；6 後 1 個 8；末位 9

3667^2=13446889⇨2 個 6，平方後首二位數 13；2 個 4；6 後 2 個 8；末位 9

36667^2=1344468889⇨3 個 6，平方後首二位數 13；3 個 4；6 後 3 個 8；末位 9

366667^2=134444688889⇨3 個 6，平方後首二位 13；3 個 4；6 後 4 個 8；末位 9

※※其平方後的值為	13	n 個 4	6	n 個 8	9	末位數
	首二位					

<例> $(3\overbrace{6666666666}^{10}7)^2=13\overbrace{4444444444}^{10}6\overbrace{8888888888}^{10}9$

7、**67 前面 n≧2 個 3：(即除 367 外)**

3367^2=11336689⇨2 個 3，平方後 2 個 1；33 後 0 個 5；末四數 6689

33367^2=1113356689⇨3 個 3，平方後 3 個 1；33 後 1 個 5；末四數 6689

333367^2=111133556689⇨4 個 3，平方後 4 個 1；33 後 2 個 5；末四數 6689

※※其平方後的值為	n 個 1	33	(n−2)個 5	6689	末四位數

<例> $(\overbrace{3333333}^{7}67)^2=\overbrace{1111111}^{7}33\overbrace{55555}^{5}6689$

(二)、遞增數分布範圍：

由二位數可發現 18 到 33 之間、三位數 168 至 333 之間、四位數 1668 至 3333 間、五位數 16668 至 33333 間、六位數 166668 至 333333 間均沒有發現遞增數的平方仍為遞增數的數。以此類推，或許 n(n＞6)位數在『$1\overbrace{666...66}^{n-2}8$』和『$\overbrace{333.....33}^{n-1}3$』之間，也可能找不到任何符合數本身與其平方皆為遞增數的數，但因為我們只觀察至六位數，故只能存在假設。

二、以遞減數來說：

只存在於幾個固定數，如二位數只有 10、20、21、30、31、80、88、90，另只有這些數的 10^n 倍，n≧0(如：21×10^1＝210)也是遞減數，但這些數之間毫無規則可言。

三、以對稱數來說：

(一)對某些有規律的數字而言：

1、**有 n 個 1 (1≦n≦9)：**

11^2=121➪ 2 個 1，平方後中間是 2；後向左右二側以公差是－1 遞減至 1

111^2=12321➪ 3 個 1，平方後中間是 3；後向左右二側以公差是－1 遞減至 1

1111^2=1234321➪4 個 1，平方後中間是 4；後向左右二側以公差是－1 遞減至 1

11111^2=123454321➪6 個 1，平方後中間是 5；後向左右以公差是－1 遞減至 1

111111^2=12345654321➪4 個 1，平方後中間是 6；後向左右以公差是－1 遞減至 1

※※其平方後的值為

(n-1)k	n	(n-1)h

＜例＞$(\overbrace{11111111}^{8})^2$=123456787654321

2、1 前面 1≦n≦8 個 10：

101^2=10201⇨ 1 個 10，平方後中間是 2；往兩側以 01 遞減

10101^2=102030201⇨ 2 個 10，平方後中間是 3；往兩側以 01 遞減

1010101^2=1020304030201⇨ 3 個 10，平方後中間是 4；往兩側以 01 遞減

中間

※※其平方後的值為

ne	n+1	nt

＜例＞101010101^2=10203040504030201

3、2 與 2 中間 1≦n 個0：

202^2=40804 ⇨ 1 個 0，平方後首末位皆是 4；中間數 8；其兩側各 1 個 0

2002^2=4008004⇨ 2 個 0，平方後首末位皆是 4；中間數 8；其兩側各 2 個 0

20002^2=400080004⇨3 個 0，平方後首末位皆是 4；中間數 8；其兩側各 3 個 0

※※其平方後的值為

4	n 個 0	8	n 個 0	4

＜例＞20000002^2=40000008000000 4

4、10 與 01 中間 1≦n≦7 個 1：

10101^2=102030201 ⇨平方前 3 個 1 平方後最中間為 3

101101^2=10221412201 ⇨平方前 4 個 1 平方後最中間為 4

1011101^2=1022325232201⇨平方前 5 個 1 平方後最中間為 5

10111101^2= 102234363432201⇨平方前 6 個 1 平方後最中間為 6

101111101^2=10223454745432201⇨平方前 7 個 1 平方後最中間為 7

1011111101^2=1022345658565432201⇨平方前 8 個 1 平方後最中間為 8

10111111101^2=102234567696765432201⇨平方前 9 個 1 平方後最中間為 9

※※其平方後的值							
	102	$nk-10^{n-1}$	n-1	n+2	n-1	$\frac{nh-1}{10}$	201

＜例＞$(10\overbrace{1111\ldots1111}^{7}01)^2$＝102234567696765432201

5、在 1、11 與 1 三個數之間同時插入 n 個 0(1≦n)：

101101^2=10221412201

10011001^2=100220141022001

1000110001^2=1000220014100220001

100001100001^2=10000220001410002200001

10000011000001^2=100000220000141000022000001

插入 n 個 0 後，在 1、22、141、22、1 間夾 0 數為 n、(n-1)、(n-1)、n

：

以此類推

※※其平方後的值									
	1	n 個 0	22	(n-1)個 0	141	(n-1)個 0	22	n 個 0	1

＜例＞$(1\overbrace{000000000110000000000}^{\text{各}9}1)^2$

＝1000000000220000000001410000000002200000000001

6、在 2、1 與 2 三個數之間同時插入 n 個 0(1≦n)：：

20102^2=404090404

2001002^2=4004009004004

200010002^2=40004000900040004

插入 n 個 0 後，在 4、4、9、4、4 間夾 0 數均為 n 個。

：

以此類推

※※其平方後的值為									
	4	n 個 0	4	n 個 0	9	n 個 0	4	n 個 0	4

$$＜例＞(\overbrace{2000001000002}^{各5})^2 = 4000000400000900000040000004$$

(六)其餘皆為不規律的數字

柒、討論

一、遞增數的出現是否有著一定規律？

結果：前三位數看不出有特別的規律，但四位數後，所有找出的遞增數都與規律性有關，沒有例外。

二、是否能以推算的方式找出下一個遞增數，而不用從全部數字當中去找？

結果：可以。某些遞增數存在著規律性，而此規律可推算出下一個遞增數為何。當然在尋求遞增數的過程中，某些範圍內的數是不會出現遞增數的，因此可以增快尋找遞增數的速度。

三、遞減數的出現是否有著一定規律？

結果：六位數內，遞減數只有 10×10^n、20×10^n、21×10^n、30×10^n、31×10^n、80×10^n、88×10^n、90×10^n ($n\geqq0$)八種數，並沒有甚麼特殊規律。

四、是否能以推算的方式找出下一個遞減數，而不用從全部數字當中去找？

結果：可以，找出二位數所有的遞減數後，從三位數開始，只要在二位遞減數後再補上 n ($n\geqq1$)個 0，就能知道三位、四位、五位……等等以上的遞減數。

五、對稱數的出現是否存在一定的規律？能否以推算的方式找出下一個對稱數，而不用從全部數字當中去找？

結果：經觀察後，某些對稱數並沒有規律性。目前只找到 6 種具有規律的對稱數，我們可以運用此 6 種規律，尋找下一個對稱數。

六、對稱數是不是有固定某些數字在開頭、中間或結尾？

結果：開頭、結尾通常會是同一個數字，開頭與結尾不是 2 就是 1，其中，1 是則是比較常見的。

捌、結論

一、藉由本文探討，可找到六位數內，數與其平方數間皆為遞增數的數。並且可藉由七種的規律性尋找下一個遞增數。

二、藉由本文探討，在六位數內數與其平方數間皆為遞減數的只有 10×10^n、20×10^n、21×10^n、30×10^n、31×10^n、80×10^n、88×10^n、 90×10^n $(6\geqq n\geqq0)$八種數，並沒有甚麼特殊規律。不過這個結論也可以續用於至 7 位數以上的探討。

三、藉由本文探討，可找到六位數內，數與其平方數間皆為對稱數的數。而且對稱數的第一位數字不會有大於 2 的數，發現所有平方前的對稱數都是由 0、1、2 所組成。不過我們可以藉由發現的六種的規律性中，尋找下一個對稱數。

四、目前六位數內我們只能利用觀察比較的方法，去找到遞增數、遞減數、對稱數的規律性，至於如何去將所有六位數以上其數與其平方數間是否為遞增數、遞減數、對稱數的數找出，是我們未來追求的目標，因國中會寫的電腦程式有限，只能待往後學習更多時再進行證明。

五、從尋找數與其平方數皆為遞增數、遞減數、對稱數的過程中，學習如何應用所學的數學概念進行思考、推測、探討、歸納，並在過程中領會學習數學的樂趣，從瓶頸跳脫的成就。