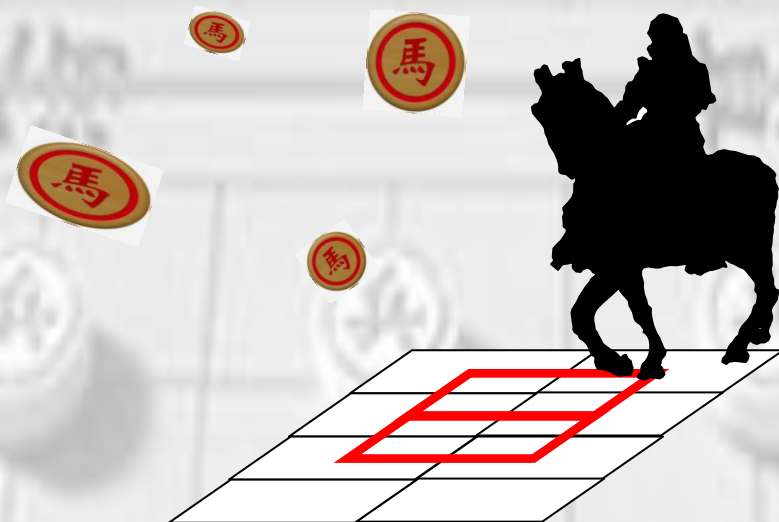


宜蘭縣 106 年度中小學科學展覽會 作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組



作品名稱：步步為『贏』

關鍵詞：「馬」步、紅點、迴圈

編號：

目錄

摘要.....	1
壹、研究動機.....	1
貳、研究目的.....	2
參、研究設備及器材.....	2
肆、名詞定義.....	2
伍、研究過程.....	3
陸、研究結果.....	26
柒、討論.....	27
捌、結論.....	28
玖、參考資料.....	28

步步爲「贏」

摘要

此研究主要是探討：在 $(n \times m)$ 的方格上，『騎士』由右上角的第一個方格 $(1, 1)$ 起步，按象棋中『馬』的走法移動(走「日」字)，且規定每個方格只能進入一次，來探究『騎士』是否能順利走完 $n \times m$ 全部方格。我們發現在 $(3 \leq n, m \leq 11)$ 範圍的方格內，我們可以採用「紅點」或是利用以下 11 種基本模型" (3×4) "、" (3×7) "、" (3×9) "、" (3×10) "、" (4×6) "、" (5×4) "、" (5×5) "、" (5×7) "、" (7×7) "、" (9×9) "、" (11×11) "來做組合，『騎士』大都可以順利走完。除了 (3×3) 、 (3×5) 、 (3×6) 、 (4×4) 、 (4×8) 例外，無法走完。

壹、研究動機

一次偶然機會，看到一個網站介紹"馬踏棋盤算法(騎士周遊問題) 8×8 的方格"後，心中產生了疑惑，難道只有在 8×8 的方格中『騎士』才能順利走完全程嗎？後來又查詢另一網頁，文中說道："馬踏棋盤算法"奇數 \times 奇數方格是無法走完！」於是在好奇心得驅使下，自己想試試看是否如此，果然 3×3 無法走完，但不死心的我，去做了 (5×5) ，沒想到竟然可以成功走完。當下只有一個想法，想去試試其他的方格是否也可以？於是立馬找常教我課業的學姊一起研究"馬踏棋盤算法"。




貳、研究目的

- 一、想知道棋盤式方格為(偶數◎奇數)型時，『騎士』要如何順利走完全程？是不是每個偶數與奇數都可以？
- 二、想知道棋盤式方格為(奇數◎奇數)型時，『騎士』要如何順利走完全程？是不是每個奇數與奇數都可以？
- 三、想知道棋盤式方格為(偶數◎偶數)型時，『騎士』要如何順利走完全程？是不是每個偶數與偶數都可以？
- 四、想知道各種棋盤方格中是否存在某些特定的基本模組走法？

參、研究設備及器材

- 一、原子筆、白板筆、方格紙、鉛筆、擦子、小黑板
- 二、電腦(Word、小畫家)

肆、名詞解釋

- 一、 $(n◎m)$ ：代表 n 列 m 行。
- 二、：代表移動方向
- 三、：代表橫紅標。
- 四、：代表直紅標
- 五、 (n, m) ：代表所在位置。例：A (3, 4) 如下圖所示。

	5	4	3	2	1	
						1
						2
		A				3

伍、研究過程

首先，從（奇數⊙偶數）開始研究，因不知如何下手，所以嘗試各種走法：

一、n 奇數、m 為偶數：

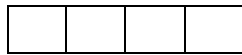
(一) $n \neq m$ 時：

1、當 $n=1$ 時

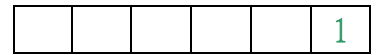
(1) (1⊙2)



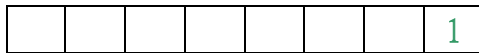
(2) (1⊙4)



(3) (1⊙6)



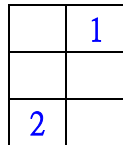
(4) (1⊙8)



※※小結：當 $n=1$ 時，『騎士』無法前進，留下空格，失敗！

2、當 $n=3$ 時

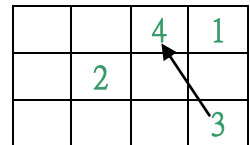
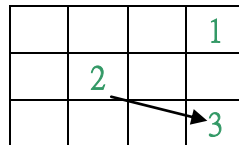
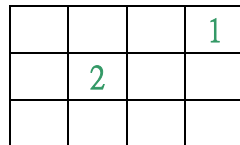
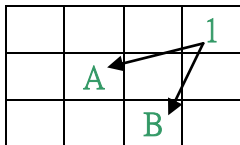
(1) (3⊙2)



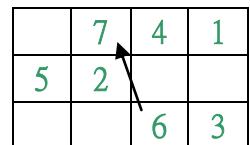
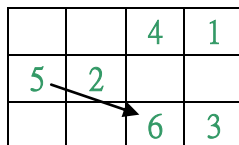
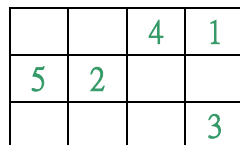
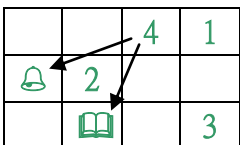
失敗！

(2) (3⊙4)

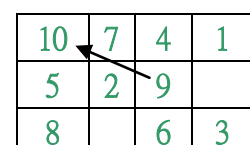
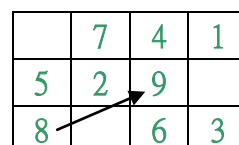
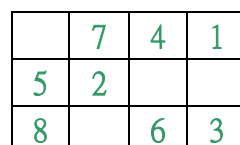
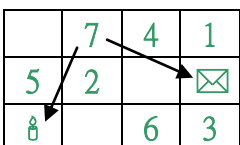
2 可以走 A、B ； 2 先走 A(2, 3) ； 3 只能走(3, 1) ； 4 只能走(1, 2)



5 有⊕、⊗可走 ； 5 先走⊕(2, 4) ； 6 只能走(3, 2) ； 7 只能走(1, 3)



8 可以走⊙、⊗ ； 8 先走⊙(3, 4) ； 9 只能走(2, 2) ； 10 只能走(2, 2)



11 只能走(3, 3) ; 12 只能走(2, 1)成功 ; 8 換走⊠ (2, 1) ; 9 只能走(3, 3)

10	7	4	1
5	2	9	
8	11	6	3

10	7	4	1
5	2	9	12
8	11	6	3

	7	4	1
5	2		8
		6	3

	7	4	1
5	2		8
	9	6	3

10 只能走(1, 4) ; 11 只能走(2, 2) ; 12 只能走(3, 4)成功

10	7	4	1
5	2		8
	9	6	3

10	7	4	1
5	2	11	8
	9	6	3

10	7	4	1
5	2	11	8
12	9	6	3

發現要走完(3⊙4)的方陣至少有 2 種成功的方法，因我們只要求能走完一圈就可以，所以沒再繼續找尋其他走法，從中發現第二種成功的方法很特別：

10	7	4	1
5	2	11	8
12	9	6	3

先走 2 個開口向右的 <
再走 2 個開口向左的 >

接著做 (3⊙6) 時，想將 (3⊙4) 成功的走法套入 (3⊙6) 中：

(3) (3⊙6)

套用

	13	10	7	4	1
		5	2	11	8
14		12	9	6	3

任一土法煉鋼法(如附件 1)

12	5		3	8	1
		7	10		
6	11	4		2	9

可惜套用失敗，於是試著將每種可能的走法都嘗試，結果仍失敗。所以確認 (3⊙6) 無法執行。

(4) (3⊙8)

22	19	16	13	10	7	4	1
17	14	11	8	5	2	11	8
24	21	18	15	12	9	6	3

走 2 次輪迴的(3⊙4)

發現 (3⊙8)，可以仿(3⊙4)的走法，猜測 (3⊙12)也可仿(3⊙4)走法，於是：

(5) (3⊙12)

34	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
29	26	23	20	17	14	11	8	5	2	11	8
36	33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3

走 3 次輪迴的(3⊙4)

走完全程，大膽推測只要符合(3⊙4K, K 為正整數)必可仿(3⊙4)的走法。經過驗證，果然 (3⊙12)、(3⊙16)、(3⊙20)-----都可套用(3⊙4)的模式。

接著做 (3⊙10) 時，我們又發現另一種成功走法。

(6) (3⊙10)

先走右側 3x3，留中心

;

路過中間

							7	4	1						10			7	4	1		
							2		6						12			9	2		6	
							5	8	3									11		5	8	3

再走最左側 3x3，留中心

;

迴轉路過中間，將右圈填滿

16	13	18		10			7	4	1	16	13	18		10		22	7	4	1
19		15	12			9	2		6	19		15	12	21		9	2	23	6
14	17	20			11		5	8	3	14	17	20			11		5	8	3

轉回路過中間，再將左圈填滿

;

再迴轉走完成功

16	13	18	27	10	25	22	7	4	1	16	13	18	27	10	25	22	7	4	1
19	28	15	12	21		9	2	23	6	19	28	15	12	21	30	9	2	23	6
14	17	20		26	11	24	5	8	3	14	17	20	29	26	11	24	5	8	3

(7) (3⊙14) ⇔ (3⊙4) + (3⊙10)

先走 (3⊙4) 模式

										10	7	4	1
										5	2	11	8
										12	9	6	3

再走 (3⊙10) 模式

								19	16	13	10	7	4	1
								14		18	5	2	11	8
								17	20	15	12	9	6	3

				22				19	16	13	10	7	4	1
			24			21		14		18	5	2	11	8
					23			17	20	15	12	9	6	3

28	25	30		22			19	16	13	10	7	4	1
31		27	24			21	14		18	5	2	11	8
26	29	32			23		17	20	15	12	9	6	3

28	25	30	39	22	37	34	19	16	13	10	7	4	1
31		27	24	33		21	14	35	18	5	2	11	8
26	29	32		38	23	36	17	20	15	12	9	6	3

28	25	30	39	22	37	34	19	16	13	10	7	4	1
31	40	27	24	33	42	21	14	35	18	5	2	11	8
26	29	32	41	38	23	36	17	20	15	12	9	6	3

這裡，我們發現 (3⊙14) 可以利用 (3⊙10) 及 (3⊙4) 的組合完成，我們猜想 (3⊙18)

是否也可用 (3⊙10) 及 (3⊙4) 的組合完成呢，於是我們接著做 (3⊙18)：

(8) $(3\odot 18) \Leftrightarrow (3\odot 10) + (3\odot 4) + (3\odot 4)$

走 2 次 (3⊙4)

												10	7	4	1
												5	2	11	8
												12	9	6	3

								22	19	16	13	10	7	4	1
								17	14	23	20	5	2	11	8
								24	21	18	15	12	9	6	3

再走 (3⊙10) 模式

							31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
							26		30	17	14	23	20	5	2	11	8
							29	32	27	24	21	18	15	12	9	6	3

				34			31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
			36			33	26		30	17	14	23	20	5	2	11	8
					35		29	32	27	24	21	18	15	12	9	6	3

40	37	42		34			31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
43		39	36			33	26		30	17	14	23	20	5	2	11	8
38	41	44			35		29	32	27	24	21	18	15	12	9	6	3

40	37	42		34	49	46	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
43		39	36	45		33	26	47	30	17	14	23	20	5	2	11	8
38	41	44		50	35	48	29	32	27	24	21	18	15	12	9	6	3

40	37	42	51	34	49	46	31	28	25	22	19	16	13	10	7	4	1
43	52	39	36	45	54	33	26	47	30	17	14	23	20	5	2	11	8
38	41	44	53	50	35	48	29	32	27	24	21	18	15	12	9	6	3

果然成功！原來 $(3\odot 10)$ 可以是 $(3\odot 10 + 4K)$ (K 為整數) 的基模。

※※小結：

- 1、 $(n\odot m=4K)$ (K 為整數)，都可套用 $(3\odot 4)$ 的走法，只需走 K 回必可走完。
 <例> $(3\odot 8)$ 、 $(3\odot 12)$ 、 $(3\odot 16)$ 、 $(3\odot 20)$ -----。
- 2、 $(3\odot 10 + 4K)$ (K 為整數)，可套用 $(3\odot 4) + (3\odot 10)$ 的組合模式。
 <例> $(3\odot 14)$ 、 $(3\odot 18)$ 、 $(3\odot 22)$ 、 $(3\odot 26)$ -----。
- 3、 $(n\odot m)$ 與 $(m\odot n)$ 走法雷同。
- 4、 $(3\odot 6)$ 棋盤無法用馬步走完。

3、當 $n=5$ 時

(1) $(5\odot 2)$

	1
2	
	3

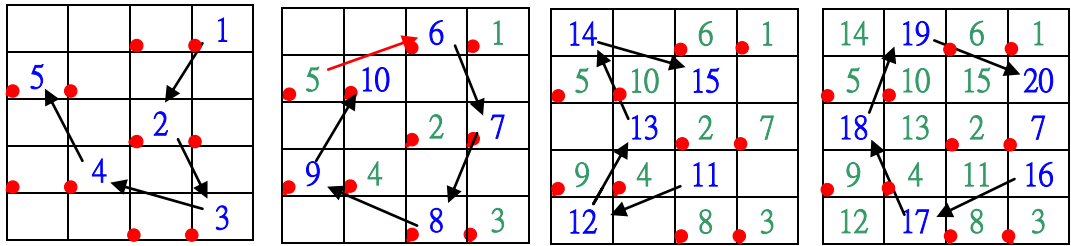
失敗！

探究 $(5\odot 4)$ 的走法時，我們另找出一種走法，標記『紅點』：

		●	●
●	●		
		●	●
●	●		
		●	●

(2) (5⊙4)

先走一迴圈紅點；另一迴圈紅點；走一迴圈空白框；走另一迴圈空白框

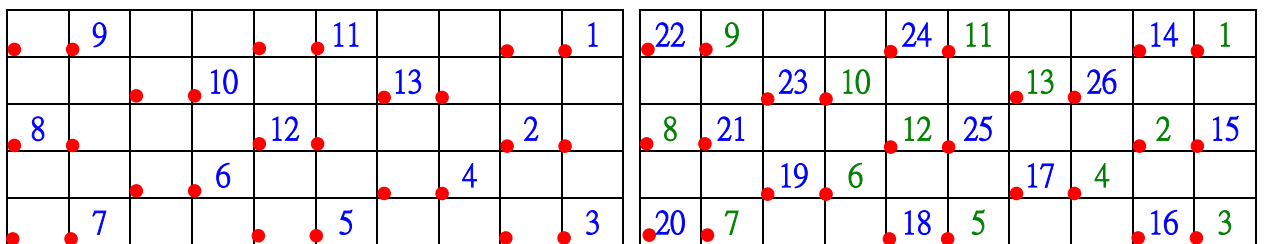


(3) (5⊙10)

先走一迴圈紅點

;

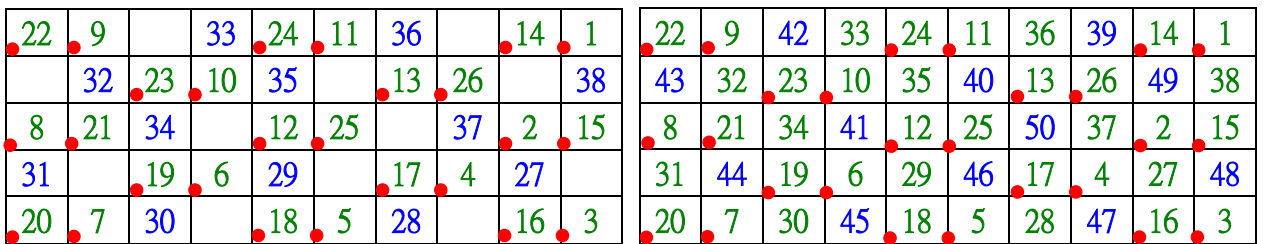
走另一迴圈紅點



走一迴圈空白框

;

走另一迴圈空白框

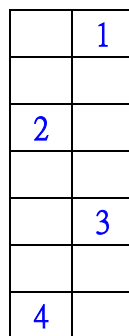


※※小結：(5⊙m, m>2 的偶數)，皆可利用紅點走完全程，做法為先走一迴圈紅點，

再走另一迴圈紅點，接著走二次迴圈的空白格。

4、當 n=7 時

(1)、(7⊙2)



失敗！

(2) (7⊙4)

走一迴圈紅點 ; 再走另一迴圈紅點 ; 走一迴圈空白框 ; 再走另一輪空白框

		●	●	1
●	7	●		
		●	2	●
●	●	6		
		●	●	3
●	5	●		
		●	4	●

		●	8	1
●	7	●	14	
		●	2	9
●	13	●	6	
		●	10	3
●	5	●	12	
		●	4	11

20		●	8	1	
●	7	●	14	21	
		●	19	2	9
●	13	●	6	15	
		●	18	10	3
●	5	●	12		16
		●	17	4	11

20	27	●	8	1		
●	7	●	14	21	28	
		●	26	19	2	9
●	13	●	6	15	22	
		●	18	25	10	3
●	5	●	12	23	16	
		●	24	17	4	11

(3) (7⊙6)

走一迴圈紅點 ; 走另一迴圈紅點 ; 走第一迴圈白框

●	10				●	1
		●	11	●		
●	●	9			●	2
		●	●	8		
●	●	7			●	3
		●	5	●		
●	6			●	4	●

●	10	21			●	12	1
		●	11	22	●		
●	20	9			●	2	13
		●	19	8			
●	18	7			●	14	3
		●	5	16			
●	6	17			●	4	15

●	10	21	30		●	12	1	
		●	11	22	●			
●	29		●	31	2	13	32	
		●	20	9		3		
●		28	19	8	23			
		●	18	7		27	14	3
●		26	5	16			24	
		●	6	17		25	4	15

走另一迴圈空白框

●	10	21	30	33	●	12	1	
		●	11	22	●	41	32	
●	20	9	42	31	●	2	13	
		●	35	28	19	8	23	40
●	18	7	36	27	●	14	3	
		●	37	26	5	16	39	24
●	6	17	38	25	●	4	15	

(7⊙8)、(7⊙10)、(7⊙12) ----, 也都可以利用紅點去完成它。

※※小結：(7⊙m, m>2 的偶數), 皆可先標記紅點, 走法如 (5⊙m)。

5、當 $n=9$ 時

(1). (9⊙4)

走一迴圈紅點 ; 走另一迴圈紅點 ; 走一迴圈空白框 ; 走另一迴圈空白框

			1
9			
		2	
	8		3
7			
		4	
	6		
			5

		10	1
9	18		
		2	11
17	8		
		12	3
7	16		
		4	13
15	6		
		14	5

26		10	1
9	18	27	
	25	2	11
17	8	19	
24		12	3
7	16		20
	23	4	13
15	6	21	
22		14	5

26	35	10	1
9	18	27	36
34	25	2	11
17	8	19	28
24	33	12	3
7	16	29	20
32	23	4	13
15	6	21	30
22	31	14	5

(2) (9⊙8)

走一迴圈紅點

;

走另一迴圈紅點

		12				1
11				18		
		13			2	
	10			17		
		14				3
9				16		
		15			4	
	8			6		
		7				5

		12	29			36	1
11	28			35	18		
		30	13			2	19
27	10			17	34		
		14	31			20	3
9	26			33	16		
		32	15			4	21
25	8			23	6		
		24	7			22	5

走一迴圈空白框

;

走另一迴圈空白框

	41	12	29		39	36	1
11	28		40	35	18		38
42		30	13		37	2	19
27	10		54	17	34		50
	43	14	31		51	20	3
9	26	53		33	16	49	
44		32	15	52		4	21
25	8		46	23	6		48
	45	24	7		47	22	5

71	41	12	29	56	39	36	1
11	28	55	40	35	18	57	38
42	71	30	13	58	37	2	19
27	10	69	54	17	34	59	50
70	43	14	31	68	51	20	3
9	26	53	66	33	16	49	60
44	65	32	15	52	67	4	21
25	8	63	46	23	6	61	48
64	45	24	7	62	47	22	5

※※小結：(9⊙ m , $m > 2$ 的偶數), 皆可先標記紅點後, 走法如 (5⊙ m)。

6、當 n=11 時

(1) (11⊙4)

走一迴圈紅點 ; 走另一迴圈紅點 ; 走一迴圈空白框 ; 走另一迴圈空白框

			1
	2		
			3
	4		
			5
	6		
			7
	8		
			9
11			
		10	

		22	1
21	2		
		20	3
19	4		
		18	5
17	6		
		16	7
15	8		
		12	9
11	14		
		10	13

24		22	1
21	2	25	
	23	20	3
19	4		26
	27	18	5
17	6		28
	29	16	7
15	8		30
	31	12	9
11	14	33	
32		10	13

24	43	22	1
21	2	25	44
42	23	20	3
19	4	41	26
40	27	18	5
17	6	39	28
38	29	16	7
15	8	37	30
34	31	12	9
11	14	33	36
32	35	10	13

(2) (11⊙12)

走一迴圈紅點

			23			12				1
33						22			11	
		24						13		2
	32			21					10	
			25			14				3
31					20			9		
		26					15			4
	30			19					8	
			27			16				5
29					18			7		
		28					17			6

走另一迴圈紅點

		34	23			12	63			66	1
33	36			61	22			11	64		
		24	35			62	13			2	65
37	32			21	60			55	10		
		44	25			14	59			54	3
31	38			45	20			9	56		
		26	43			58	15			4	53
39	30			19	46			57	8		
		42	27			16	49			52	5
29	40			47	18			7	50		
		28	41			48	17			6	51

走一迴圈空白框

90		34	23	88		12	63	68		66	1
33	36	89		61	22	87		11	64	69	
	91	24	35	86		62	13		67	2	65
37	32		92	21	60		78	55	10		70
	93	44	25		85	14	59		77	54	3
31	38		94	45	20	79		9	56	71	
	95	26	43	84		58	15	76		4	53
39	30		96	19	46		80	57	8		72
	97	42	27		83	16	49		75	52	5
29	40	99		47	18	81		7	50	73	
98		28	41	82		48	17	74		6	51

再走一迴圈空白框

90	109	34	23	88	111	12	63	68	123	66	1
33	36	89	110	61	22	87	112	11	64	69	124
108	91	24	35	86	113	62	13	122	67	2	65
37	32	107	92	21	60	121	78	55	10	125	70
106	93	44	25	114	85	14	59	126	77	54	3
31	38	105	94	45	20	79	120	9	56	71	132
104	95	26	43	84	115	58	15	76	127	4	53
39	30	103	96	19	46	119	80	57	8	131	72
100	97	42	27	116	83	16	49	128	75	52	5
29	40	99	102	47	18	81	18	7	50	73	130
98	101	28	41	82	117	48	17	74	129	6	51

※※小結：(11@m, m>2 的偶數)，皆可先標記紅點後，走一迴圈紅點，再走另一迴圈紅點，接著再走兩迴圈的空白框，就可成功。

二、n、m 皆為奇數

(一)、n=m 時：

1. (5⊙5)

7				1	7		13		1	7	18	13		1	7	18	13	24	1
		8			12		8		14	12		8	19	14	12	23	8	19	14
	6		2			6		2	9	17	6		2	9	17	6	25	2	9
		4				11	4				11	4	15		22	11	4	15	20
5				3	5			10	3	5	16		10	3	5	16	21	10	3

※※小結：利用直『日』橫『日』繞迴圈即可成功

2. (7⊙7)

		11				1	27	16	11		25	14	1
10				12			10		26	15	12		24
					2	13	17	28				2	13
	9		3					9		3		23	
					4		29	18				4	33
8				6			8		20	31	6		22
		7				5	19	30	7		21	32	5

⇒

27	16	11		25	14	1	27	16	11	48	25	14	1
10		26	15	12		24	10	49	26	15	12	47	24
17	28	35	40	37	2	13	17	28	35	40	37	2	13
	9	38	3	34	23		42	9	38	3	34	23	46
29	18	41	36	39	4	33	29	18	41	36	39	4	33
8		20	31	6		22	8	43	20	31	6	45	22
19	30	7		21	32	5	19	30	7	44	21	32	5

⇒

27	16	11		25	14	1	27	16	11	48	25	14	1
10		26	15	12		24	10	49	26	15	12	47	24
17	28	35	40	37	2	13	17	28	35	40	37	2	13
	9	38	3	34	23		42	9	38	3	34	23	46
29	18	41	36	39	4	33	29	18	41	36	39	4	33
8		20	31	6		22	8	43	20	31	6	45	22
19	30	7		21	32	5	19	30	7	44	21	32	5

※※小結：不規則走法唯一解

3. (9◎9)

繞外圍走二迴圈直『日』橫『日』

13		27		15		29		1
26		14		28		16		30
	12						2	17
	25							
11							18	3
24								
	10						4	19
	23	8			21	6		
9			22	7			20	5

13	40	27		15	42	29		1
26		14	41	28		16	43	30
39	12						2	17
	25						31	
11	38						18	3
24								32
37	10						4	19
	23	8	35		21	6	33	
9	36		22	7	34		20	5

再走(5◎5)

13	40	27	54	15	42	29	56	1
26	53	14	41	28	55	16	43	30
39	12						2	17
52	25						31	44
11	38						18	3
24	51						45	32
37	10						4	19
50	23	8	35	48	21	6	33	46
9	36	49	22	7	34	47	20	5

13	40	27	54	15	42	29	56	1
26	53	14	41	28	55	16	43	30
39	12	63	74	69	86	58	2	17
52	25	68	79	64	75	70	31	44
11	38	73	62	81	58	65	18	3
24	51	78	67	60	71	76	45	32
37	10	61	72	77	66	59	4	19
50	23	8	35	48	21	6	33	46
9	36	49	22	7	34	47	20	5

※※小結：外圍延著邊緣利用直『日』橫『日』繞二圈後，再利用(5◎5)收尾

4. (11⊙11)

外圍以半個走二迴圈

3⊙4				3⊙4				4⊙3		
↓				↓				↓		
89	86	41	38	91	94	47	44	5	52	1
40	37	90	87	46	43	96	93	2	49	4
85	88	39	42	95	92	45	48	51	6	53
36	81	32						54	3	50
33	84	35						11	58	7
80	31	82						8	55	10
83	34	79						57	12	59
30	75	26						60	9	56
27	78	29	20	23	68	71	16	13	64	61
74	25	76	69	72	19	22	63	66	17	14
77	28	73	24	21	70	67	18	15	62	65

再走(5⊙5)

89	86	41	38	91	94	47	44	5	52	1
40	37	90	87	46	43	96	93	2	49	4
85	88	39	42	95	92	45	48	51	6	53
36	81	32	100	111	106	117	94	54	3	50
33	84	35	105	116	101	112	107	11	58	7
80	31	82	110	99	118	95	102	8	55	10
83	34	79	115	104	97	108	113	57	12	59
30	75	26	98	109	114	103	96	60	9	56
27	78	29	20	23	68	71	16	13	64	61
74	25	76	69	72	19	22	63	66	17	14
77	28	73	24	21	70	67	18	15	62	65

※※小結：外面以半個(3⊙4)繞兩次後，再走 5⊙5

(二)、 $n \neq m$ 時：

1. 當 $n=1$ 時

(1) (1⊙3)

		1
--	--	---

(2) (1⊙5)

				1
--	--	--	--	---

(3) (1⊙7)

						1
--	--	--	--	--	--	---

(4) (1⊙9)

								1
--	--	--	--	--	--	--	--	---

(5) (1⊙11)

										1
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

※※當 $n=1$ 時，『馬』無法繼續前進，留下空格

2、當 $n=3$ 時

(1) (3⊙1)

1

(2) (3⊙5)

		7	4	1
	9	2		6
		5	8	3

5	8	3		1
		6		10
7	4	9	2	

所有方法全失敗

(3)(3⊙7)

先走右側(3x3，留中心)跳出

； 最左側(3x3，留中心)跳出；

				7	4	1
			9	2		6
				5	8	3

11	14	17		7	4	1
16		12	9	2		6
13	10	15		5	8	3

填滿

11	14	17	20	7	4	1
16	21	12	9	2	19	6
13	10	15	18	5	8	3

(4)(3⊙9)

右側(3×3，留中心)跳出

；

最左側(3×3，留中心)跳出

						7	4	1	15	18	13				7	4	1
				10	5	2		8	12		16	19	10	5	2		8
						9	6	3	17	14	11				9	6	3

填滿

15	18	13	24	21	26	7	4	1
12	23	16	19	10	5	2	27	8
17	14	11	22	25	20	9	6	3

(5)(3⊙11)

先做(3⊙4)

								10	7	4	1
								5	2	11	8
								12	9	6	3

再做(3⊙7)

23	26	29	32	19	16	13	10	7	4	1
28	33	24	21	14	31	18	5	2	11	8
25	22	27	30	17	20	15	12	9	6	3

※※ (3⊙m≥11)棋盤數都可透過組合來完成

3.當 n=5 時

(1) (5⊙7)

走(直)紅標點二迴圈

；

走兩迴圈空白框

11		3		9		1
4		10		2		8
	12					
	5		13		7	
			6		14	

11	18	3	30	9	16	1
4	29	10	17	2	31	8
19	12	21	26	33	24	15
28	5	34	13	22	7	32
35	20	27	6	25	14	23

(2) (5⊙9)

先走(5⊙5)

；

再走(5⊙4)

						7	18	13	24	1
						12	25	8	19	14
						17	6	23	2	9
						22	11	4	15	20
						5	16	21	10	3

39	32	45	54	41	26	7	18	13	24	1
44	55	40	33	44	53	12	25	8	19	14
31	38	49	42	27	34	17	6	23	2	9
50	47	36	29	52	43	22	11	4	15	20
57	30	51	48	35	28	5	16	21	10	3

(3) (5⊙11)

先走(5⊙5)

						7	18	23	24	1
						12	25	8	19	14
						17	6	23	2	9
						22	11	4	11	20
						5	16	21	10	3

再走(5⊙6)

39	32	45	54	41	26	7	18	23	24	1
46	55	40	33	44	53	12	25	8	19	14
31	38	49	42	27	34	17	6	23	2	9
50	47	36	29	52	43	22	11	4	11	20
37	30	51	48	35	28	5	16	21	10	3

※※當 n=5 時，(5⊙m≥9) 可以利用基模組合成功走完棋盤

4. 當 n=7 時

(1)(7⊙9)

先走(7⊙6)

			10	21	34	31	12	1
			29	42	11	22	35	32
			20	9	30	33	2	13
			41	28	19	8	23	36
			18	7	40	27	14	3
			39	26	5	16	37	24
			6	17	38	25	4	15

再走(7⊙3)

45	48	43	10	21	34	31	12	1
50	63	46	29	42	11	22	35	32
47	44	49	20	9	30	33	2	13
62	51	60	41	28	19	8	23	36
59	54	57	18	7	40	27	14	3
56	61	52	39	26	5	16	37	24
53	58	55	6	17	38	25	4	15

(2)(7⊙11)

先走(7⊙3)

							3	6	1
							8	21	4
							5	2	7
							18	9	20
							15	12	17
							10	19	14
							13	16	11

再走(7⊙8)

67	54	31	44	65	52	49	22	3	6	1
30	43	66	53	48	35	64	51	8	21	4
55	68	45	32	75	50	23	36	5	2	7
42	29	74	59	34	47	76	63	18	9	20
69	56	33	46	73	60	37	24	15	12	17
28	41	58	71	26	39	62	77	10	19	14
57	70	27	40	72		25	38	13	16	11

(3) (7⊙13)

先走(7⊙7)

							27	16	11	48	25	14	1
							10	49	26	15	12	47	24
							17	28	35	40	37	2	13
							42	9	38	3	34	23	46
							29	18	41	36	39	4	33
							8	43	20	31	6	45	22
							19	30	7	44	21	32	5

再走(7◎6)

59	70	90	80	61	50	27	16	11	48	25	14	1
78	89	60	71	91	81	10	49	26	15	12	47	24
69	58	79	82	51	62	17	28	35	40	37	2	13
88	77	68	57	72	83	42	9	38	3	34	23	46
67	56	87	78	63	52	29	18	41	36	39	4	33
86	75	54	65	84	73	8	43	20	31	6	45	22
55	66	85	74	53	64	19	30	7	44	21	32	5

※※小結：當 n=7 時，(7◎m≥9) 可以利用基模組合成功走完棋盤

5.當 n=9

(1)(9◎11)

先走(9◎3)

;

再走(9◎3)

							3	8	1
							6	27	4
							9	2	7
							26	5	20
							21	10	25
							24	19	22
							13	16	11
							18	23	14
							15	12	17

							30	35	28	3	8	1
							33	54	31	6	27	4
							36	29	34	9	2	7
							53	32	47	26	5	20
							48	37	52	21	10	25
							51	46	49	24	19	22
							40	43	38	13	16	11
							45	50	41	18	23	14
							42	39	44	15	12	17

再走(5◎5)

;

再走(4◎5)

61	72	67	76	55	30	35	28	3	8	1
66	77	62	73	68	33	54	31	6	27	4
71	60	75	56	63	36	29	34	9	2	7
78	65	58	69	74	53	32	47	26	5	20
59	70	79	64	57	48	37	52	21	10	25
					51	46	49	24	19	22
					40	43	38	13	16	11
					45	50	41	18	23	14
					42	39	44	15	12	17

61	72	67	76	55	30	35	28	3	8	1
66	77	62	73	68	33	54	31	6	27	4
71	60	75	56	63	36	29	34	9	2	7
78	65	58	69	74	53	32	47	26	5	20
59	70	79	64	57	48	37	52	21	10	25
					51	46	49	24	19	22
					40	43	38	13	16	11
					45	50	41	18	23	14
					42	39	44	15	12	17

(2)(9◎13)

先走(9◎4)

										32	35	4	1
										3	6	31	34
										36	33	2	5
										7	10	27	30
										26	29	12	9
										11	8	25	28
										22	19	16	13
										17	14	21	24
										20	23	18	15

再走(9◎9)

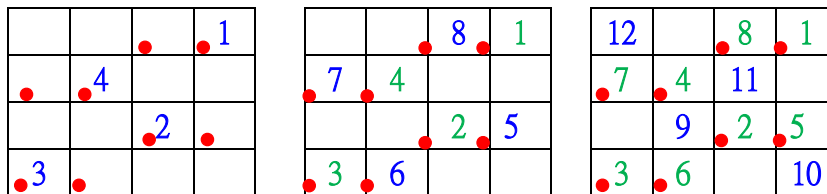
49	76	63	90	51	78	65	92	37	32	35	4	1
62	89	50	77	64	91	52	79	66	3	6	31	34
75	48	99	110	105	116	93	38	53	36	33	2	5
88	61	104	115	100	111	106	67	80	7	10	27	30
47	74	109	98	117	94	101	54	39	26	29	12	9
60	87	114	103	96	107	112	81	68	11	8	25	28
73	46	97	108	113	102	95	40	55	22	19	16	13
86	59	44	71	84	57	42	69	82	17	14	21	24
45	72	85	58	43	70	83	56	41	20	23	18	15

※※小結: 當 n=9 時, (9◎m≥11) 可以利用基模組合成功走完棋盤

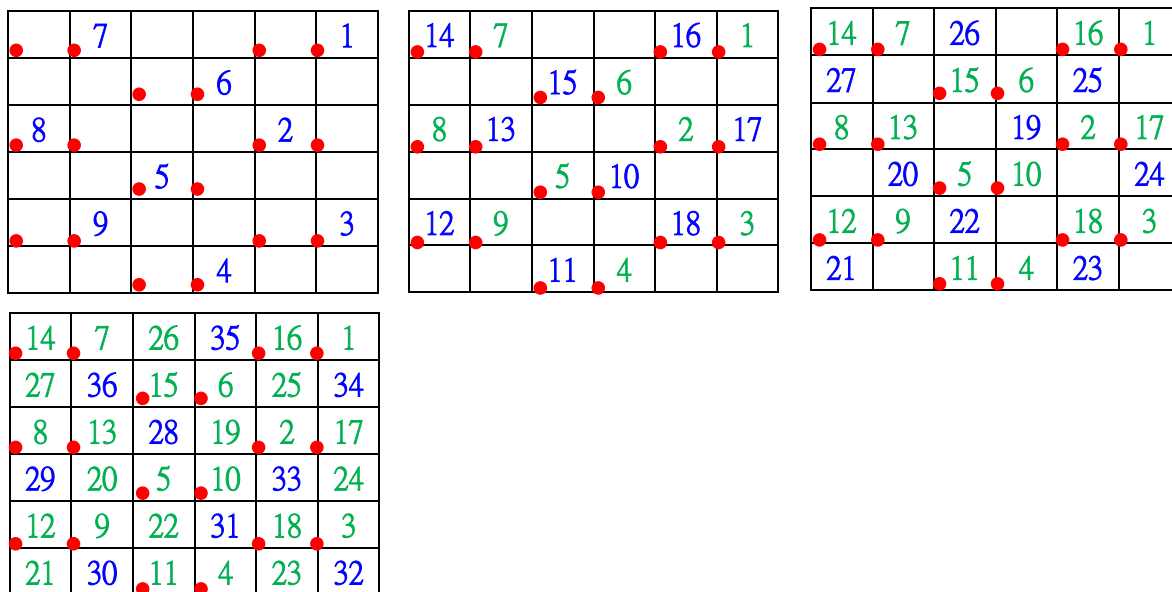
三、n、m 皆為偶數

1. n=m 時：

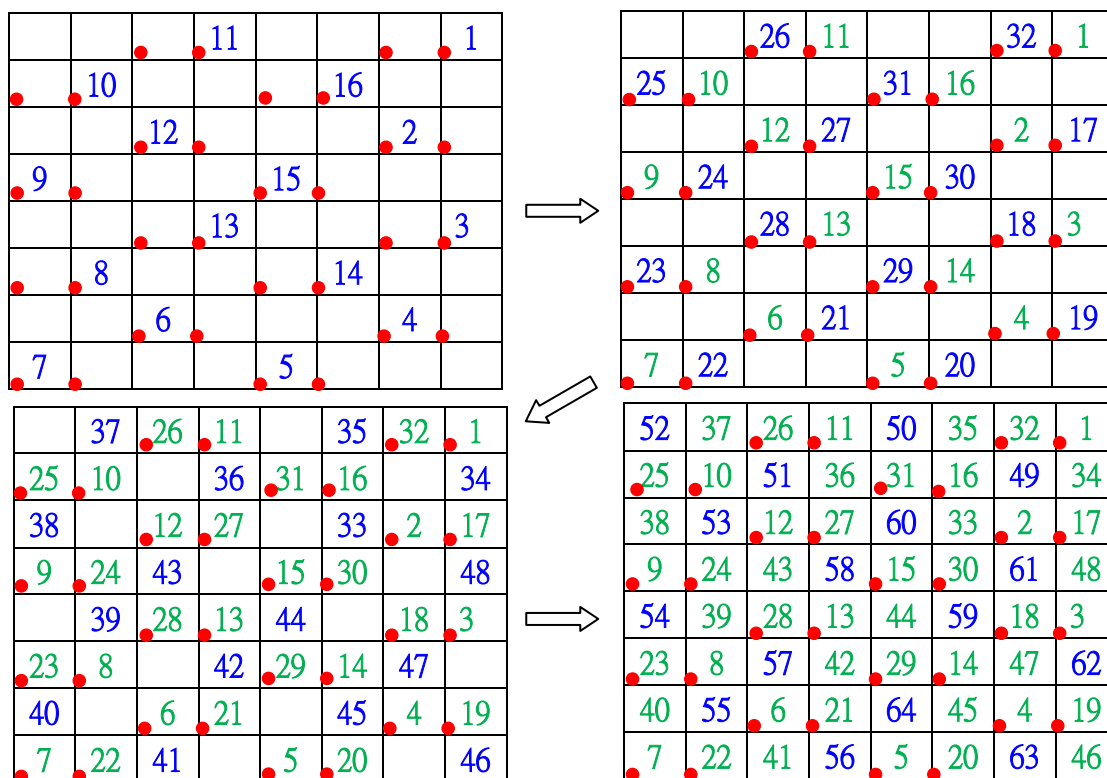
(1) (4⊙4)



(2) (6⊙6)



(3) (8⊙8)



(4) (10⊙10)

•	13		•	15		•	1
		•	14		•	25	
•	12			16			•
		•	17		•	24	
•	11			23			•
		•	18		•	22	
•	10			20			•
		•	19		•	21	
•	9			7			•
		•	8		•	6	

•	38	13		•	40	15		•	26	1
		•	39	14		•	25	50		
•	12	37			16	41			•	2
		•	17	42		•	49	24		
•	36	11			48	23			•	28
		•	43	18		•	47	22		
•	10	35			20	45			•	4
		•	19	44		•	21	46		
•	34	9			32	7			•	30
		•	33	8		•	31	6		

•	38	13		63	40	15	74		26	1
		62	•	39	14		64	25	50	75
•	12	37		65	16	41		73	2	27
61		•	17	42	71		•	49	24	51
•	36	11	66		48	23	72		28	3
		60	•	43	18		70	47	22	52
•	10	35		67	20	45		69	4	29
59		•	19	44		68	21	46	53	
•	34	9		57	32	7		55	30	5
		58	•	33	8		56	31	6	54

•	38	13	88	63	40	15	74	99	26	1
87	62	•	39	14	89	64	25	50	75	100
•	12	37	90	65	16	41	98	73	2	27
61	86	•	17	42	71	96	49	24	51	76
•	36	11	66	91	48	23	72	97	28	3
	85	60	•	43	18	95	70	47	22	77
•	10	35	92	67	20	45	94	69	4	29
59	84	•	19	44	93	68	21	46	53	78
•	34	9	82	57	32	7	80	55	30	5
	83	58	•	33	8	81	56	31	6	79

※※小結:發現 n=m 時，都是紅標點走法，(4⊙4)是特例無解

(二) n≠m 時：

1.當 n=2 時

(1)(2⊙4)

(2)(2⊙6)

(3)(2⊙8)

			1
	2		

	3			1
			2	

			3			1
	4				2	

※※小結:只要 n=2 必失敗

2.當 n=4 時

(1)(4⊙6)

右(3×3) (直)紅標點

左(3×3) (直)紅標記

			•	3		•	1
			•	6			4
						•	2
						•	5

		•	9		3		1
		•	12		6		4
•	8			•	10		2
•	11		•	7		5	

20	9	22	3	18	1
23	12	19	6	15	4
8	21	10	13	2	17
11	24	7	16	5	14

(2) (4⊙8)

20	13	18	9		5		1
17		15	12		2		4
14	19	8		10		6	
	16	11		7		3	

所有走法均失敗

(3) (4⊙10)

	17		13		9		5		1
	14		20		12		2		4
18		16		8		10		6	
15		19		11		7		3	

22	17	38	13	36	9	34	5	30	1
39	14	23	20	25	12	27	2	33	4
18	21	16	37	8	35	10	6	31	6
15	40	19	24	11	26	7	28	3	32

(4) (4⊙12)

	23		17		13		9		5		1
	20		14		16		12		2		4
24		22		18		8		10		6	
21		19		15		11		7		3	

26	23	28	17	36	13	40	9	38	5	48	1
29	20	25	14	33	16	37	12	41	2	45	4
24	27	22	31	18	35	8	39	10	43	6	47
21	30	19	34	15	32	11	42	7	46	3	44

※※小結:全部都可以仿(4⊙6)走法，除了(4⊙8)失敗外

3.當 n=6 時

(1) (6⊙8)

		20	9			24	1
19	8			23	12		
		10	21			2	13
7	18			11	22		
		16	5			14	3
17	6			15	4		

40	29	20	9	38	27	24	1
19	8	39	28	23	12	37	26
30	41	10	21	48	25	2	13
7	18	33	44	11	22	47	36
42	31	16	5	34	45	14	3
17	6	43	32	15	4	35	46

(2) (6◎10)

20	13			22	7			28	1
		21	12			27	6		
14	19			8	23			2	29
		11	16			5	26		
18	15			24	9			30	3
		17	10			25	4		

20	13	58	35	22	7	60	33	28	1
57	36	21	12	59	34	27	6	47	32
14	19	40	53	8	23	46	31	2	29
37	56	11	16	41	52	5	26	45	48
18	15	54	39	24	9	50	43	30	3
55	38	17	10	51	42	25	4	49	44

※※小結: (6◎m ≥ 8 得偶數) 利用橫紅標點

4. 當 n=8 時

(1) (8◎10)

30	11			32	13			40	1
		31	12			39	20		
10	29			14	33			2	21
		15	34			19	38		
28	9			36	17			22	3
		35	16			37	18		
8	27			6	25			4	23
		7	26			5	24		

30	11	52	71	32	13	78	59	40	1
51	70	31	12	77	58	39	20	79	60
10	29	72	53	14	33	80	41	2	21
69	50	15	34	57	76	19	38	61	42
28	9	54	73	36	17	56	75	22	3
49	68	35	16	55	74	37	18	43	62
8	27	66	47	6	25	64	45	4	23
67	48	7	26	65	46	5	24	63	44

(2)(8◎12)

		36	13			42	19			48	1
35	12			41	18			47	24		
		14	37			20	43			2	25
11	34			17	40			23	46		
		38	15			44	21			26	3
33	10			39	16			45	22		
		8	31			6	29			4	27
9	32			7	30			5	28		

84	61	36	13	70	93	42	19	72	96	48	1
35	12	85	62	41	18	71	94	47	24	73	50
60	83	14	37	92	69	20	43	95	49	2	25
11	34	63	86	17	40	91	68	23	46	51	74
82	59	38	15	88	65	44	21	90	67	26	3
33	10	87	64	39	16	89	66	45	22	75	52
58	81	8	31	56	79	6	29	54	77	4	27
9	32	57	80	7	30	55	78	5	28	53	76

※※小結: (8◎m ≥ 10 利用紅標點走法

5.當 n=10 時

(10⊙12)

		44	15			58	29			60	1
43	14			57	28			59	30		
		16	45			56	27			2	3
13	42			17	46			55	26		
		18	47			54	25			32	3
41	12			19	48			53	24		
		20	49			22	51			4	3
11	40			21	50			23	52		
		38	9			36	7			34	5
39	10			37	8			35	6		

106	77	44	15	105	79	58	29	118	89	60	1
43	14	107	78	57	28	117	88	59	30	119	90
76	105	16	45	80	109	56	27	120	61	2	31
13	42	75	104	17	46	87	116	55	26	91	62
74	103	18	47	110	81	54	25	86	115	32	3
41	12	73	102	19	48	85	114	53	24	63	92
72	101	20	49	82	111	22	51	84	113	4	33
11	40	71	100	21	50	83	112	23	52	93	64
70	99	38	9	68	97	36	7	66	95	34	5
39	10	69	98	37	8	67	96	35	6	65	94

※※小結:發現(偶數⊙偶數)除了少許特例解，剩下全都是紅點走法

陸、研究結果

一、在(奇 \odot 偶)或在(偶 \odot 奇)中：

(一) 奇數、偶數都需 > 2 ，就有機會走完全程，除(3 \odot 6)及(6 \odot 3)外。

(二)利用『紅標』或『基模』可順利走完全程。

1. (3 \odot 4k)，可利用(3 \odot 4)的走法。
- 2.(3 \odot 10+4k)可利用(3 \odot 10)及(3 \odot 4)的走法。
3. (n \odot 2k， $n \geq 5$ ， $k > 2$)可仿(5 \odot 4)橫紅點標記走法
- 4.(n \odot m， $n、m \geq 5$)可利用基模組合成功。

二、在(奇 \odot 奇)中：

(一).每個奇數都需 > 2 ，就有機會走完全程，除 (3 \odot 3)及(3 \odot 5)和(5 \odot 3)外。

(二).利用『紅標』或『基模』可順利走完。

1.當 $n \neq m$ 時：

(1) (3 \odot h， $h > 9$ 奇數)，可用(3 \odot 4)、(3 \odot 7)、(3 \odot 9)組合。

<例>(3 \odot 11) \Rightarrow (3 \odot 4)+(3 \odot 7)

(2) (5 \odot p， $p > 7$ 奇數)，可仿(5 \odot 7)利用"直"紅標記走法。

<例>(5 \odot 9) \Rightarrow (5 \odot 5)+(5 \odot 4)

(3) (7 \odot f， $f \geq 9$ 奇數)，可利用組合。

<例>(7 \odot 11) \Rightarrow (7 \odot 7)+(7 \odot 4)

2.當 $n = m$ 時：

(1) (3 \odot 3)不成功。

(2)雖(5 \odot 5)、(7 \odot 7)、(9 \odot 9)、(11 \odot 11)都有不同走法，但可為其它棋盤的基本模型。

三、在(偶 \odot 偶)中：

1.每個偶數都需 > 2 ，就有機會走完全程，除 (4 \odot 4)及(4 \odot 8)和(8 \odot 4)外。

2. 當 $n \neq m$ 時：

(1) (4 \odot g，g 為 6 的倍數)可仿(4 \odot 6)走法。

(2) (n \odot m， $n、m > 6$ 的偶數)，可用紅標記走法。

3. 當 $n=m$ 時：

(1)(6◎6)、(8◎8)、(10◎10)、-----採紅點標記走法，順利走完全程。

四、共有(3◎4)"、(3◎7)"、(3◎9)"、(3◎10)"、(4◎6)"、(5◎4)"、(5◎5)"、(5◎7)"、
"(7◎7)"、(9◎9)"、(11◎11)"模型可供參考：

柒、問題與討論

一、剛開始(奇數◎偶數)的解法是否有一定規律？

結果：一開始嘗試各種走法，找出依些基模，後來推論到 n (奇數)=5 的時候，發現到『紅點』，
利用紅點就能輕易把(奇數◎偶數)的方陣解開。

二、根據網路上的說法，(奇數◎奇數)的棋陣無法利用馬步走完全程，是否如此？

結果：否，只要不是(3◎3)或(3◎5)且奇數、偶數皆小於 3 的數，全部都會有解。

三、在研究過程中，(奇數◎奇數)棋盤的走法是否存在某些基本模式？

結果：1、(奇數◎奇數，兩奇數不同)時，大多是以一些基模重組合成。

例：(7◎11)是以(7◎7)+(7◎4)來組成。

2、(奇數◎奇數，兩奇數相同)時，則會繞外圍以迴圈的方式來走，最後回到(5◎5)以直日
橫日的方式收尾。

例：(13◎13)會先在外圍繞 3 圈後 \Rightarrow (9◎9) \Rightarrow (5◎5)

四、在研究過程中，(偶數◎偶數)棋盤的走法是否存在某些基本模式？

結果：基本上都可以紅點標記完成。

五、在研究過程中，(偶數◎奇數)棋盤的走法是否存在某些基本模式？

結果：可用紅點或基模。

例：(3◎12)可用三回的(3◎4) \Rightarrow 採雙" $<$ "

六、有哪些棋盤數在未走馬步時就已知無法成功？

結果：奇數、偶數皆小於 3 的數，無法成功

捌、結論

一、在(偶數 \odot 奇數)中，若偶數、奇數 >2 ，則必可以用『紅點』走完，也可以用基模，除了(3 \odot 6)及除了(6 \odot 3)外。

二、奇數 \odot 奇數)中，若偶數、奇數 >1 ，則用基模，除了(3 \odot 3)及和(5 \odot 3)外。

三、在(偶數 \odot 偶數)中，若偶數、奇數 >2 ，可以用『紅點』走完，除了(4 \odot 4)及(4 \odot 8)和(8 \odot 4)外。

四、基本模型有以下這些

1. (3 \odot M)的基模有 \Rightarrow (3 \odot 4)、(3 \odot 7)、(3 \odot 9)、(3 \odot 10)

2. (4 \odot M)的基模有 \Rightarrow (4 \odot 6)

3. (5 \odot M)的基模有 \Rightarrow (5 \odot 4)、(5 \odot 5)、(5 \odot 7)

4. (7 \odot M)的基模有 \Rightarrow (7 \odot 4)、(7 \odot 6)、(7 \odot 7)

5. (9 \odot M)的基模有 \Rightarrow (9 \odot 9)

6. (11 \odot M)的基模有 \Rightarrow (11 \odot 11)

玖、參考資料

網路: 馬踏棋盤算法(騎士周遊問題)網址: <https://blog.csdn.net/jiajiayouba/article/details/9293379>