1. 請問：四位數中有多少個是 3 的倍數且末兩位數為 23？

解答: 因為末兩位各位數和為 $2+3=5\equiv 2 \pmod 3$，所以前兩位各位數和為 $1 \pmod 3$，因此和有 1, 4, 7, 10, 13, 16。
若和為 1，則前兩位數為 10；
若和為 4，則前兩位數為 13, 22, 31, 40；
若和為 7，則前兩位數為 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70；
若和為 10，則前兩位數為 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91；
若和為 13，則前兩位數為 49, 58, 67, 76, 85, 94；
若和為 16，則前兩位數為 79, 88, 97；
因此有 $1+4+7+9+6+3=30$ 個。 □

2. 數列 $\langle a_n\rangle$, $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{3}$，若 $a_na_{n+1}+a_{n+1}a_{n+2}=2a_na_{n+2}$，求 a_n。

解答: 把式子同除以 $a_na_{n+1}a_{n+2}$ 得 $\frac{1}{a_{n+2}}+\frac{1}{a_n}=\frac{2}{a_{n+1}}$，又代入 $a_1=1, a_2=\frac{1}{3}$ 得 $a_3=\frac{1}{5}, a_4=\frac{1}{7}, \ldots$。即前後項之調和級數平均等於中項，所以 a_n 為調和級數 $\frac{1}{2n-1}$。 □

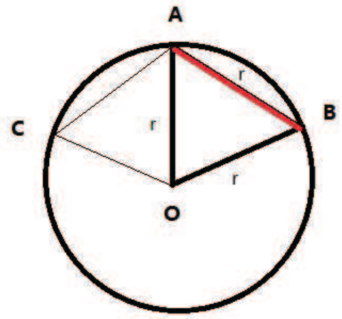
3. 直角坐標系中 $A(3,4)$, $B(4,3)$, $P(x,0)$，且 x 為實數，求 $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值。

解答: 令 $y=\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2=\frac{x^2-6x+25}{x^2-8x+25}\Rightarrow(1-y)x^2+(-6+8y)x+25(1-y)=0$。
因為 x 恆有實數解，故判別式 $(8y-6)^2-4(1-y)\cdot 25(1-y)\geq 0$
$\Rightarrow(8y-6)^2-(10y-10)^2=(-2y+4)(18y-16)\geq 0\Rightarrow\frac{8}{9}\leq y\leq 2$
$y=\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right)^2$ 的最大值為 $2\Rightarrow\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ 的最大值為 $\sqrt{2}$。 □

4. 已知正整數 a, b 互質且滿足 $\frac{a}{b}+\frac{14b}{9a}$ 是一個整數，請問：有哪些不同的數對 (a,b)？

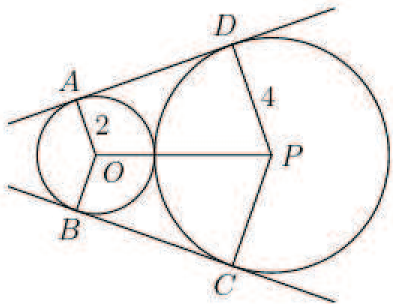
解答: 假設 $x=\frac{a}{b}$，依題意得到 $x+\frac{14}{9x}=k,\ k\in\mathbb{Z}$。因此 $9x^2-9kx+14=0\Rightarrow x=\frac{k}{2}\pm\frac{\sqrt{9k^2-56}}{6}$。因為 x 為有理數，所以 $9k^2-56=n^2$，n 為不小於 0 的整數，推得 $56=9k^2-n^2=(3k-n)(3k+n)$。因為 $56=1\cdot 56=2\cdot 28=4\cdot 14=7\cdot 8$，所以 $(n,k)=(13,5),\ (5,3)$，因此 $x=\frac{1}{3},\ \frac{14}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{3}$，則數對 $(a,b)=(1,3),\ (14,3),\ (2,3),\ (7,3)$。 □

5. 在一個半徑為 r 的圓周上隨意取兩點，從此兩點依序順時針方向各畫一條長度為 r 的弦。請問：此兩弦會相交的機率為何？

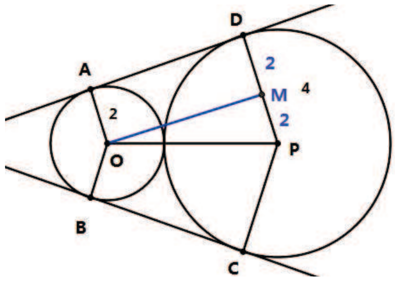


解答: 在圓周上取一點 A，找到弦 $\overline{AB}=r$，從圖形中可以知道另一點在弧 CAB 上才會有交點，因此機率爲 $\frac{120^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{3}$。 □

6. 圓 O 與圓 P 的半徑分別爲 2, 4 且兩圓相切，點 A, B 爲圓 O 的切點，點 C, D 爲圓 P 的切點，且 $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ 爲兩圓的公切線。請問：六邊形 $AOBCPD$ 的面積爲何？



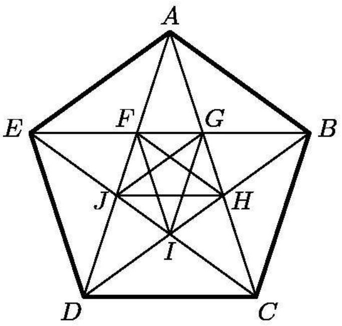
解答:



$$\overline{OM}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PM}^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}\text{六邊形面積}&=2\,(\text{四邊形 }AOPD\text{ 面積})\\&=2\,(\text{矩形 }AOMD\text{ 面積}+\text{三角形 }OPM\text{ 面積})\\&=2\left(2\cdot4\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot4\sqrt{2}\right)\\&=24\sqrt{2}\end{aligned}$$ □

7. 下圖中，$ABCDE$ 是一正五邊形，且 $\overline{AG}=1$。求 $\overline{FG}+\overline{JH}+\overline{CD}=$？



解答: AFG 是等腰三角形，$\overline{AG} = \overline{AF} = 1$。從五邊形 $FGHIJ$ 可以知道 $\angle FAG = \angle FBI$，所以三角形 JHG 和 DIJ 和三角形 AFG 全等。$\overline{JH} = 1$，我們還要找 $\overline{FG}$ 和 $\overline{DC}$。
從五邊形 $FGHIJ$ 還可以知道 $\overline{FJ} = \overline{FG}$，設 $\overline{FJ} = \overline{FG} = x$，求解 x。因爲三角形 AFG 和 AJH 相似，所以

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{1}$$

解得 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。
再來找 $\overline{DC}$，設爲 y，已知 $\overline{DJ} = \overline{AF} = 1$，三角形 AFG 和 ADC 相似，

$$\frac{1}{2+x} = \frac{x}{y}$$

解得 $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$。
加總 $\overline{FG}$、$\overline{JH}$ 和 $\overline{CD} = 1 + x + y = 1 + \sqrt{5}$。 □

8. 一個正四面體盒子內部邊長爲 8，要在四面體內部放入 35 顆一樣大小的球，求放入球的最大半徑。(分母須有理化成整數)

解答: $\begin{cases} \text{底層} & : 5+4+3+2+1 \\ \text{第二層} & : 4+3+2+1 \\ \text{第三層} & : 3+2+1 \\ \text{第四層} & : 2+1 \\ \text{頂層} & : 1 \end{cases}$

球心連線爲一邊長爲 $8r$ 的正四面體，它和原正四面體(距離)爲 $r \Rightarrow$
球心到原正四面體距離−球心到小正四面體距離 $= r \Rightarrow$
大正四面體內切球半徑−小正四面體內切球半徑 $= r \Rightarrow$
$(\frac{\sqrt{6}}{12})8 - (\frac{\sqrt{6}}{12})8r = r \Rightarrow r = \frac{(24-6\sqrt{6})}{15} = \frac{(8-2\sqrt{6})}{5}$。
註：正四面體的內切球半徑 $= (\frac{\sqrt{6}}{12}a)$。 □