參考解答

1、 用 a，b，c 組成 6 個三位數相加之和為

$$2(a+b+c)\cdot(10^2+10+1)=222(a+b+c)。$$

注意：$1+2+3\le a+b+c\le 7+8+9$，即 $6\le a+b+c\le 24$，所以 $12\le 2(a+b+c)\le 48$ 且 $2(a+b+c)$ 是偶數。但是 $222(a+b+c)=2(a+b+c)\cdot 111$ 必須是一個各個位數皆相異且非零的四位數，不難發現只有$2(a+b+c)=38$ 或 48 才符合要求，亦即 $a+b+c=19$ 或 24。

(1) $a+b+c=19$，此時

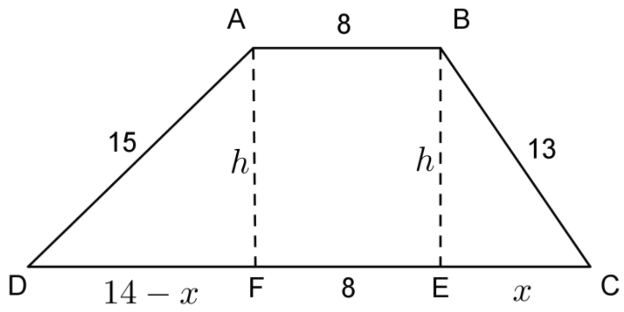
$$\{a,b,c\}=\{2,8,9\}，\{3,7,9\}，\{4,7,8\}，\{4,6,9\}，\{5,6,8\}。$$

(2) $a+b+c=24$，此時

$$\{a,b,c\}=\{7,8,9\}。$$

故共有 6 組$\{a,b,c\}$符合所求！

2、



過 B 作 $\overline{\mathrm{CD}}$ 邊上的高 $\overline{\mathrm{BE}}$，過 A 作 $\overline{\mathrm{CD}}$ 邊上的高 $\overline{\mathrm{AF}}$。設 $\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{BE}}=h$。另設 $\overline{\mathrm{CE}}=x$，$\overline{\mathrm{DF}}=14-x$。在直角 $\Delta\mathrm{BEC}$ 和直角 $\Delta\mathrm{AFD}$ 中，

$$h^2=13^2-x^2=15^2-(14-x)^2。$$

整理之後得 $x=5$，進而可得 $h=12$，於是梯形面積為 $\frac{1}{2}(8+22)\cdot 12=180$。

3、

x	9	y
	u	
	v	

因為 $1+2+\cdots+9=45$，所以三縱排與三橫排的各排之和為 15。上圖中的 $x+y=6$，$u+v=6$，所以 (x,y) 和 (u,v)的選擇可能是

$(x,y,u,v)=(1,5,2,4)$，$(5,1,2,4)$，$(1,5,4,2)$，$(5,1,4,2)$，

$(2,4,1,5)$，$(4,2,1,5)$，$(2,4,5,1)$，$(4,2,5,1)$。

對於上述任何一種組合，例如 $(x,y,u,v)=(1,5,2,4)$，其他空格都恰有唯一一種填法，因為下圖：

1	9	5
c	2	a
d	4	b

$a+b=10$，$(a,b)=(3,7)$ 或 $(7,3)$，但 $(a,b)=(3,7)$ 將使得 $c=10$，不合。所以 $(\mathrm{a},\mathrm{b})=(7,3)$ 才有可能，此時 $(\mathrm{c},\mathrm{d})=(6,8)$ 即可滿足所求。其他情形分析方法類似，故共有 8 種填法。

4、 改寫求值式

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{5}{6}\right)+\cdots+$$
$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\left(1-\frac{99}{100}\right)$$

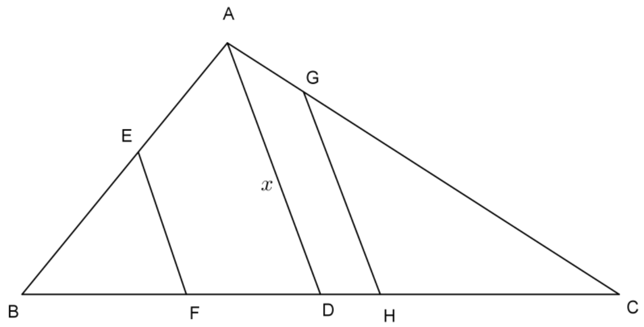
$$= 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} + \cdots + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{98}{99} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{98}{99} \times \frac{99}{100}$$

$$= 1 - \frac{2}{100}$$

$$= \frac{49}{50}$$

5、



設 $\overline{AD} = x$，因為 $\overline{GH} // \overline{AD} // \overline{EF}$，所以 ΔGHC~ΔADC 且 ΔADB~ΔEFB ("~"表相似)。

因此，

$$\frac{a\Delta GHC}{a\Delta ADC} = \left(\frac{\overline{GH}}{\overline{AD}}\right)^2 = \frac{4^2}{x^2}$$

且

$$\frac{a\Delta EFB}{a\Delta ADB} = \left(\frac{\overline{EF}}{\overline{AD}}\right)^2 = \frac{3^2}{x^2}。$$

但 $\overline{AD}$ 是中線，所以 $a\Delta ADC = a\Delta ADB = \frac{1}{2}a\Delta ABC$。因而，

$$\frac{4^2}{x^2} + \frac{3^2}{x^2} = \frac{a\Delta GHC}{a\Delta ADC} + \frac{a\Delta EFB}{a\Delta ADB} = \frac{a\Delta GHC + a\Delta EFB}{\frac{1}{2}a\Delta ABC} = \frac{\frac{1}{2}a\Delta ABC}{\frac{1}{2}a\Delta ABC} = 1。$$

故 $x^2 = 25$，$x = 5$，即 $\overline{AD} = 5$。

6、 設 3 人一組或 5 人一組群聚聊天時各有 x 組與 $25-x$ 組，因此士兵總數為 $3x+5(25-x)$。又設 4 人一組或 7 人一組參加文康活動時各有 y 組與 $16-y$ 組，因此士兵總數為 $4y+7(16-y)$。上述得方程式

$$3x+5(25-x)=4y+7(16-y)，$$

即

$$125-2x=112-3y，$$

或寫成

$$2x-3y=13。$$

此式子的通解為 $x=8+3t$，$y=1+2t$，t 為整數，即士兵總數可表示成

$$125-2(8+3t)=109-6t<100。$$

$t=2$ 時，總數最大且為 97。故士兵最多有 97 人。

(另解)

設 3 人一組、5 人一組時各有 $25-x$ 組、x 組。則士兵人數 $\mathrm{A}=3(25-x)+5x=75+2x$。又設 4 人一組、7 人一組時各有 $16-y$ 組、y 組。則士兵人數 $\mathrm{A}=4(16-y)+7y=64+3y$。由 $\mathrm{A}=75+2x=64+3y$ 知士兵人數以 2 除之餘 1，以 3 除之亦餘 1。所以 $\mathrm{A}=6z+1$，z為整數，故 $z=16$ 時，$\mathrm{A}=97$ 為最大。

7、 依題意

$$a^2-1=b^2-a^2 \qquad (1)$$

$$\frac{a+1}{2}=\frac{b+1}{a+1} \qquad (2)$$

將 (1)，(2) 整理後可得

$$2a^2=b^2+1，$$

$$(a+1)^2=2(\mathrm{b}+1)$$

兩式相減得

$$(a-1)^2=(b-1)^2$$

可知 $a-1=b-1$ (不合，因為$a\neq b$) 或 $a-1=1-b$，即 $b=2-a$，代回 (1)

式整理得 $(a-1)(a+5)=0$，可知 $a=-5$ ($a=1$ 不合)，進而得 $b=7$，故 $a=-5$，$b=7$。

8、 不失一般性，不妨假設 $x\le y\le z$，即有 $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}$，因此 $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$，得 $x\le 3$。

(1) 若 $x=3$，此時 $y=z=3$ (因為 $\frac{1}{x}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{z}$)。

(2) 若 $x=2$，此時

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}。$$

整理可得 $2(y+z)=yz$，$(y-2)(z-2)=4$，得 $(y,z)=(3,6)$ 或 $(4,4)$，因此 $(x,y,z)=(2,3,6)$ 或 $(2,4,4)$。

綜合上述討論知 $x+y+z=9$ 或 10 或 11。