

宜蘭縣第七屆蘭陽盃數學大賽活動
數學競試參考答案

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第七屆蘭陽盃數學大賽的數學競試試題本，題本採單面印刷，有十題計算與推論題，每題一頁，共十頁，每題均需有詳細計算、證明或說明的過程。測驗時間於 8：35 至 9：45，共 70 分鐘。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

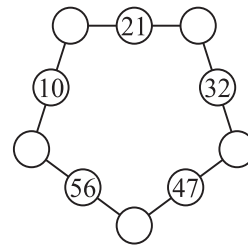
1. 請於試題下方空白處作答，空間不夠，可利用背面作答。
2. 需寫出計算過程或理由，如果只有答案沒有過程將酌予扣分。
3. 額外的試算請勿寫在題本中，請於計算紙上作答。
4. 題本試題請勿任意轉載或張貼。
5. 題本上請書寫清楚隊名，但不可故意污損答案本或試題本，否則該科不與計分。

作答方式：

請用黑色或藍色原子筆於題本上書寫作答，需訂正時得使用修正液或修正帶。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

1. (10%)在下圖的五邊形中，每邊的數字和都是100，試
求出最下方的數字為何？



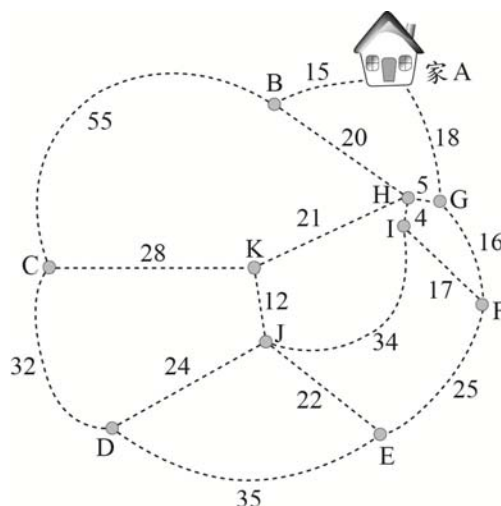
Sol：為 9。

◎配分：

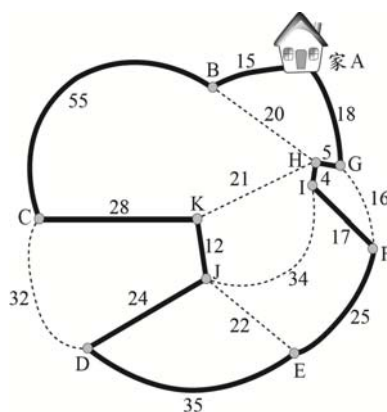
答案+過程：10分

答案正確沒有過程：5分

2. (10%)你是一個推銷員，得去拜訪 10 位客戶，每位客戶位在不同的城鎮，而這些城鎮由道路連結，如地圖所示，但你的汽油只夠讓你行進 240 英里行程。城鎮間的距離以連接兩城鎮的道路上標示的數字顯示。你能找到一個路程不會用光汽油，讓你拜訪所有 10 位客戶，然後返家嗎？



1. Sol: 一條 238 英里長的路線如下：



$$15+55+28+12+24+35+25+17+4+5+18=238.$$

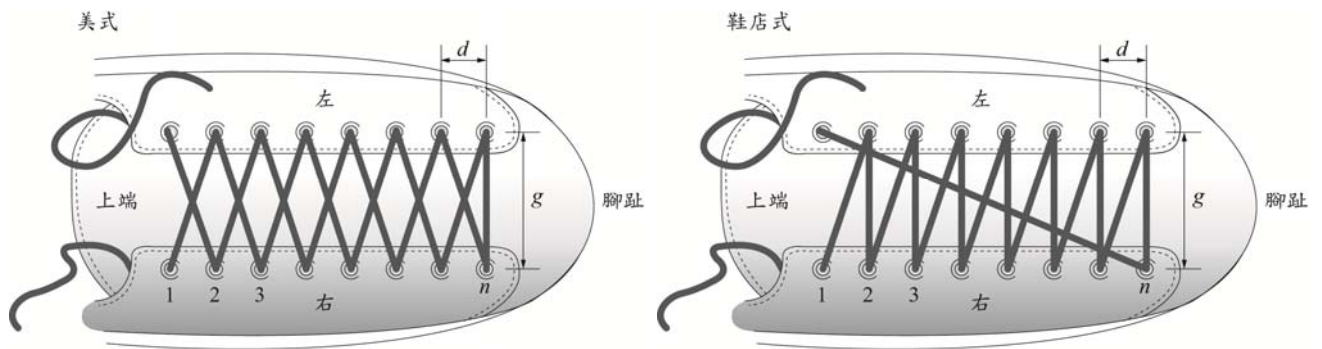
可達成條件的路徑有以下三種：

- (1) A-B-C-K-J-D-E-F-I-H-G-A : 238
 (2) A-B-H-K-C-D-J-E-F-I-H-G-A : 131
 (2) A-B-H-I-J-K-C-D-E-F-G-A : 239

◎配分：

答案正確：10 分

3. (10%) 「對小孩來說，繫鞋帶會是個問題嗎？不，算出綁鞋帶的長度才是問題？」綁鞋帶的方式五花八門，以下兩個圖就是常見的兩種繫鞋帶的方式，美式綁帶法跟鞋店式綁帶法：



這裡的符號 n ($n \geq 2$), d 及 g 分別代表

- 數目 n 為鞋孔的對數。
- 距離 d 為相鄰兩孔的距離。
- 間距 g 為左右對應兩孔的間距。

讓我們只專注於鞋帶的長度，也就是鞋子「上端」兩個鞋孔之間的鞋帶，至於打出一個有效的蝴蝶結所需要的其餘鞋帶長度，不在討論範圍。

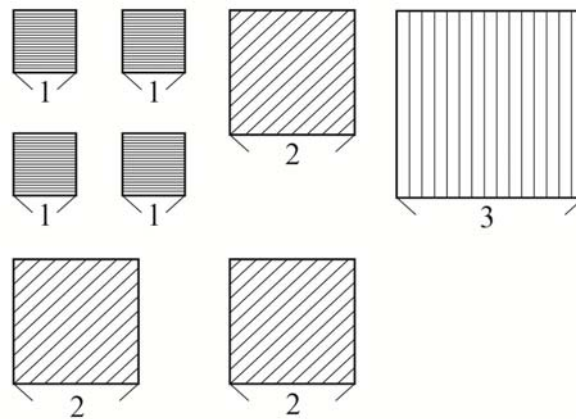
- (1) 寫出美式綁帶法的鞋帶長度。
 - (2) 寫出鞋店式綁帶法的鞋帶長度。
- (答案請用代號 n 、 d 、 g 表示)

Sol :

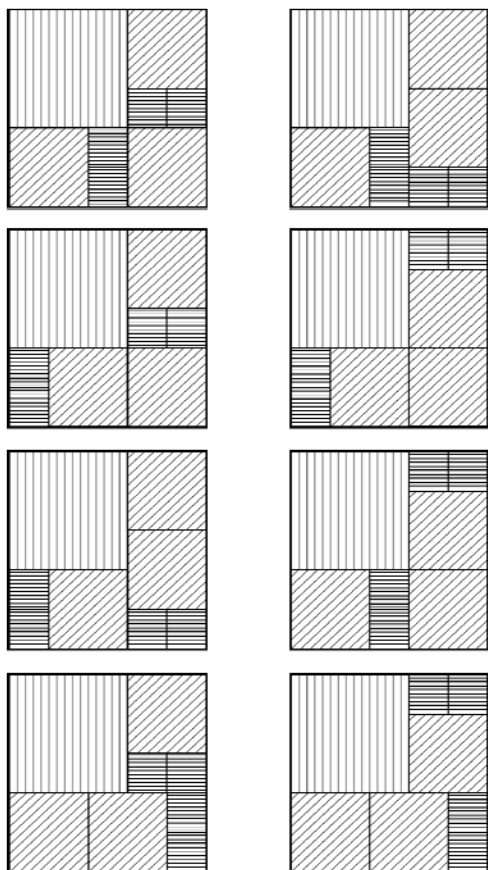
(1) 美式鞋帶長度： $g + 2(n-1)\sqrt{d^2 + g^2}$. (5%)

(2) 鞋店式鞋帶長度： $(n-1)g + (n-1)\sqrt{d^2 + g^2} + \sqrt{(n-1)^2 d^2 + g^2}$. (5%)

4. (10%)我們手上有四個1單位邊長的正方形，三個2單位邊長的正方形及一個3單位邊長的正方形，一共八個正方形，如下圖所示：



請將這八個正方形拼湊在下方的方格紙內，不得重疊，也不能留下空隙，讓他們拼成5單位邊長的正方形（拼出越多種情形越好，經旋轉後一樣的拼法視為同一種）。



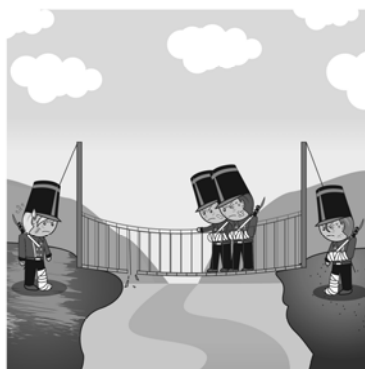
◎配分：

1~6：各得1分

7：2分

8：2分

5. 某晚有四個傷兵需要渡過一條破橋以逃離敵方砲火，該破橋每次最多只能承載兩個士兵，而且當兩個士兵一起過橋時，他們必須以較慢的士兵的速度行走。



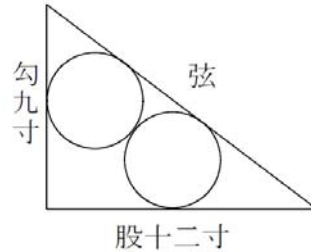
該四個士兵只有一支手電筒，他們每次必須攜帶手電筒才能安全的過橋，如果四個士兵各需 1, 2, 4 及 6 分鐘過橋，

- (1) (2%) 請找出安全過橋的其中一種走法及時間？
- (2) (8%) 請找出安全過橋的最短時間是幾分鐘？

Sol：首先，1 分鐘與 2 分鐘的傷兵一起過橋，然後 1 分鐘傷兵把手電筒帶回；接著 4 分鐘與 6 分鐘的傷兵一起過橋，然後 2 分鐘傷兵再把手電筒帶回；最後，1 分鐘與 2 分鐘的傷兵一起過橋，完成過橋任務。這樣一共需要 13 分鐘。其餘的情形都比 13 分鐘多，所以 13 分鐘是最少的。

註：很多人會以為 14 分鐘，這不是最少的。

6. 10%) 《天地明察》是有關和算家澀川春海的傳記故事，也納入澀川春海與同時代日本算聖關孝和的競爭，將數學知識活動，譬如解題與出題等對話，極為成功地融入故事情節之中。下圖是該小說裡一道數學題目的插圖：

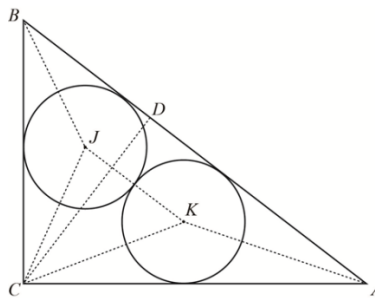


在一勾九寸、股十二寸的直角三角形內，有兩個直徑相同的圓，彼此相切，與邊也相切，如上圖所示。試求這兩個等圓的半徑。

Sol：因為直角三角形的面積為 $\frac{9 \times 12}{2} = 54$ ，所以弦長為 15 且弦上的高為

$$\frac{2 \times 54}{15} = \frac{36}{5}.$$

設兩等圓的半徑為 r ，圓心分別為 J 與 K ，並作補助線如下圖所示：



因為直角三角形弦上的高 $\overline{CD} = \frac{36}{5}$ ，所以三角形 CJK 的高為

$$\overline{CD} - r = \frac{36}{5} - r.$$

利用面積公式

$$\square KAC + \square JCK + \square JBC + \text{台形} ABJK = \square ABC,$$

得

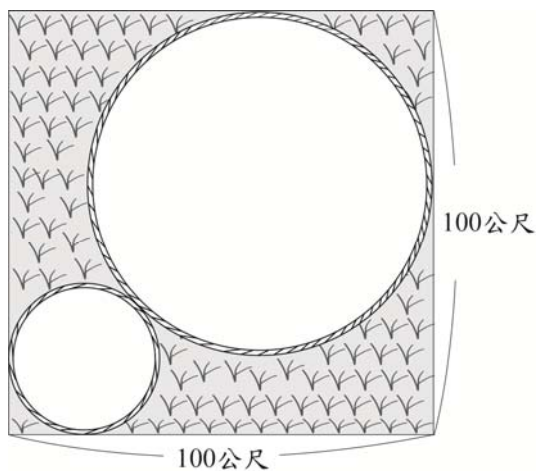
$$6r + \left(\frac{36}{5} - r\right)r + \frac{9}{2}r + \frac{(2r+15)r}{2} = 54,$$

解得 $r = \frac{15}{7}$ 。

◎配分：

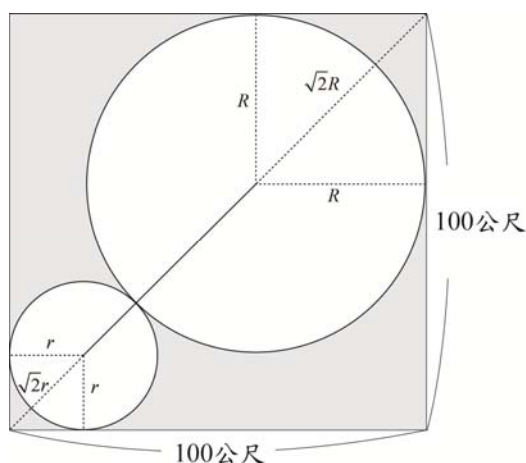
(1)列式：5分 (2)得解：5分

7. (10%) 在 100 平方公尺的正方形草地上，用繩子圍出兩個相切的圓，把圓內的草除掉，當作露營區，如下圖所示：



設兩圓的半徑分別為 R 與 r 。試分析兩圓的半徑和是否會隨著兩圓的大小改變而變？

sol：從下圖中可以發現



$$\sqrt{2}R + R + r + \sqrt{2}r = \text{正方形對角線長} = 100\sqrt{2}.$$

整理得到

$$(\sqrt{2} + 1)(R + r) = 100\sqrt{2},$$

即 $R + r = 100(2 - \sqrt{2})$ 。故兩圓半徑和不會隨著兩圓大小的改變而改變，它是一個定值。

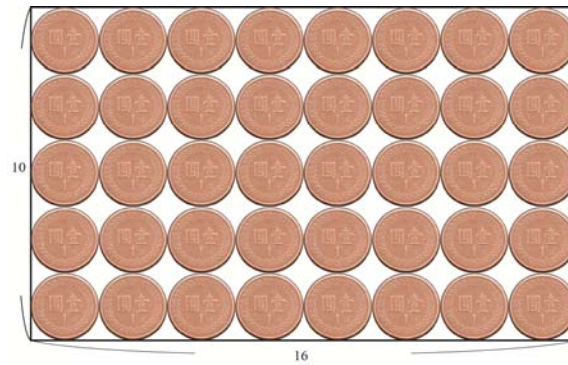
◎配分：

(1) 不變：2 分

(2) 列式正確：3 分

(3) 正確原因：5 分

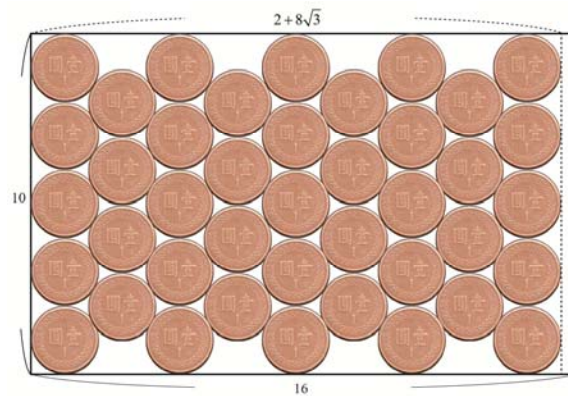
8. (10%)壹圓的硬幣的直徑是 2 公分，在 10 公分×16 公分的盒子內，我們可以用下列的排列方式，排上 40 枚壹圓的硬幣，此排法稱為「正方形排列」



同樣是 10 公分×16 公分的盒子內，是否有其它排列方法，可以排進 41 枚壹圓硬幣呢？試試看吧！

Sol :

如下圖的排列方式(叫六角形排列)，剛好可以排進 41 枚壹圓硬幣。



◎配分：

(1)圖解正確：3 分

(2)理由：7 分

9. (10%) 甲、乙、丙三個隊伍在運動會的獎牌榜上共得 186 塊獎牌！甲隊贏得了最多的金牌，乙隊贏得的金牌和銅牌數相等；甲隊和乙隊贏得的銀牌數相等。丙隊的銀牌比銅牌多了 2 塊；而丙隊的金牌數比甲隊的銅牌數多了 1 塊。甲隊的金牌數和乙、丙兩隊的銅牌數之和相等，也剛好是乙隊獎牌數的四分之三。三隊所贏得的總金牌數比甲隊獎牌數少 1 塊。問甲、乙、丙三隊各贏得金、銀與銅牌各幾塊？

Sol：設甲隊得 a 塊銀牌、乙隊得 b 塊金牌、丙隊得 c 塊銅牌及甲隊得 d 塊銅牌。

根據題意可以整理各隊獎牌數如下表：

	金牌	銀牌	銅牌
甲隊	$b+c$	a	d
乙隊	b	a	b
丙隊	$d+1$	$c+2$	c

又根據題意，得

$$\begin{cases} \text{總獎牌數} & = 186 \\ b+c & = \frac{3(a+2b)}{4} \\ (b+c)+(d+1)+b & = (b+c)+a+d-1 \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} 2a+3b+3c+2d = 183 \\ 4c & = 3a+2b \\ b & = a-2 \end{cases}$$

可以解得 c 、 d 為

$$c = \frac{5a}{4} - 1, \quad d = 96 - \frac{35a}{8}.$$

因為 d 必須是非負整數，所以 a 是 8 的倍數，而且 $a < 22$ ，即

$$a = 8 \text{ 或 } a = 16.$$

因此

$$(a, b, c, d) = (8, 6, 9, 61) \text{ 或 } (16, 14, 19, 26).$$

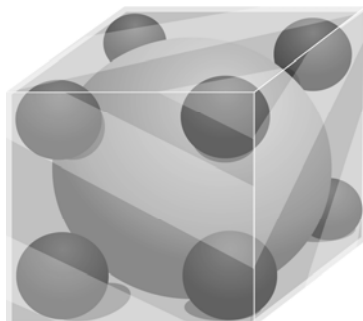
因為甲隊得最多金牌數，所以 $b+c > d+1$ ，所以前者不合，故各隊獎牌數如下表：

	金牌	銀牌	銅牌
甲隊	33	16	26
乙隊	14	16	14
丙隊	27	21	19

◎配分：

(1)表格：2 分 (2)關係列式：3 分 (3)正確解答：5 分

10. (10%)一模型公司在一個內部邊長為 2 單位的透明正立方體箱子內，放置一顆半徑為 1 單位的黃球，然後又要在箱子的八個角落再塞入 8 顆半徑相同的小紅球。



試求：小紅球的最大半徑為多少單位？

Sol：設正立方體箱子的八個頂點之坐標為

$$(0,0,0),(2,0,0),(0,2,0),(2,2,0),$$

$$(0,0,2),(2,0,2),(0,2,2),(2,2,2).$$

此時黃球的球心坐標為 $(1,1,1)$ ，並令離原點最近的小紅球之球心坐標為 (r,r,r) 。

因為此小紅球與 xy -平面相切，所以此小紅球的半徑為 r 。又因為 $(1,1,1)$ 與 (r,r,r) 的距離剛好是黃球與小紅球的半徑之和，所以

$$\sqrt{(r-1)^2 + (r-1)^2 + (r-1)^2} = 1 + r$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r + 1 = 0,$$

解得 $r = 2 - \sqrt{3}$ 或 $2 + \sqrt{3}$ (不合)。

故小紅球的最大半徑為 $2 - \sqrt{3}$ 。

◎配分：

(1)畫圖：2 分 (2)關係列式：3 分 (3)正確解答：5 分