

# 宜蘭縣第六屆蘭陽盃數學大賽活動

## 數學競試題本

隊名：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

**請不要翻到次頁！**

**讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！**

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第六屆蘭陽盃數學大賽的數學競試試題本，題本採單面印刷，共有八題。每題一頁，共八頁，每題均需有詳細計算、證明和說明的過程。測驗時間由 8：35 至 10：05，共 90 分鐘。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

1. 請於試題下方空白處作答，空間不夠，可利用背面作答。
2. 需寫出計算過程或理由，如果只有答案沒有過程將酌予扣分。
3. 額外的試算請勿寫在題本中，請於計算紙上作答。
4. 題本試題請勿任意轉載或張貼。
5. 題本上請書寫清楚隊名與個人姓名，但不可故意污損答案本或試題本，否則該科不與計分。

作答方式：

請用黑色或藍色原子筆於答案本上書寫作答，需訂正時得使用修正液或修正帶，亦可不照題號順序答題，但須標明清楚題號。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

1. (10%) 六位數  $1234xy$  可以被 8 和 9 整除，求  $x=?$ ， $y=?$

3. (1) 三位數  $1234xy$  可以被 8 整除。  
∴ 只需檢查  $4xy$  (這個三位數) 為 8 的倍數。  
∴ 只需檢查二位數  $xy$  為 8 的倍數。  
∴ 只有 08, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96.

(2) ∴ 六位數  $1234xy$  為 9 的倍數  
∴  $1+2+3+4+x+y = 10+x+y$  為 9 的倍數  
∴  $x+y+1$  為 9 的倍數。

(3) 結合 (1) & (2) 的結果  
 $(x, y) = (0, 8)$  和  $(8, 0)$  — Aus.

2. (10%) 已知一長方體的所有邊長(十二個邊)的總和為  $160\text{ cm}$ ，且其中距離最遠的兩頂點的距離是  $22\text{ cm}$ 。請問這個長方體的表面積是多少？

設長、寬、高分別為  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ，則  $4(a+b+c)=160$ ， $a^2+b^2+c^2=22^2=484$

表面積= $2(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=40^2-484=1116(\text{cm}^2)$

3. (10%) 下列哪些數能表示成連續 99 個正整數的和？(答案可能不只一個，並請列出各答案的算式)

(A)1,002,951 (B)3,579,111 (C) 4,954,950 (D)1,227,105 (E)5,815,937

8. 連續 99 個正整數可表示為

$$a, a+1, a+2, \dots, a+98$$

$$\text{其和} = 99a + (0+1+2+\dots+98)$$

$$= 99a + 4851$$

故 Ans: (C) & (D)

4. (10%) 小明和一群好友到餐廳用餐，老闆招待了柳橙汁與芭樂汁共 4 公升，且每個人喝的柳橙汁與芭樂汁加起來剛好是一杯的量，已知小明喝了全部柳橙汁的  $\frac{1}{6}$  和全部芭樂汁的  $\frac{1}{8}$ ，請問小明和這群朋友一共有幾人？

6. 假設有  $m$  公升的柳橙汁， $n$  公升芭樂汁  
則  $m+n=4$ ，且  $0 < m, n < 4$

$$\begin{aligned} \text{人數} &= \frac{4}{\frac{m}{6} + \frac{n}{8}} \\ &= \frac{4}{\frac{4m+3n}{24}} \\ &= \frac{96}{3(m+n)+m} \\ &= \frac{96}{12+m} \end{aligned}$$

故 人數介於 6 ( $m=4$  代入)  
和 8 ( $m=0$  代入) 之間。

即 Ans: 7 人

5. (15%) 某一正整數  $n$  的個位數字為 5，若把最右邊的 5 挪到最左邊 (例如：12345 → 51234)，所得的新數為  $m$ ，已知  $m$  為  $n$  的 4 倍，求滿足此條件最小的  $n$  為多少？

5. 假設  $n = 10a + 5$  (其中  $a$  為  $t$  位數的正整數)  
 則依題意  $m = 5 \times 10^t + a$  ( $t$  為正整數或 0)

$$5 \times 10^t + a = m = 4n = 4(10a + 5) = 40a + 20$$

$$499 \dots 980 = 39a$$

( $t-2$ ) 個 進行

因此吾人需要估算

$$\begin{array}{r}
 12820 \leftarrow \text{最小的 } a \\
 39 \overline{) 499980} \\
 \underline{39} \phantom{00} \\
 109 \phantom{00} \\
 \underline{78} \phantom{00} \\
 319 \phantom{00} \\
 \underline{312} \phantom{00} \\
 78 \phantom{00} \\
 \underline{78} \phantom{00} \\
 0
 \end{array}$$

Ans: 128205

6. (15%) 六位數  $a52bcd$  分別是 3 和 11 的倍數，且其各位數字和也是 11 的倍數，其中  $b \geq d$ ，求這樣的六位數總共有幾個？

67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 79, 83,  
85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99. 這些編號  
的燈是亮的.

2. (1)  $\because (a+b+c+d+7)$  是 3 和 11 的倍數  
 $\therefore a+b+c+d+7 = 33k$  ( $k$  是正整數)  
 又  $\because 0 \leq a, b, c, d \leq 9 \therefore (a+c) + (b+d) = 33 - 7 = 26$

(2)  $(a+c+2) - (b+d+5) = (a+c) - (b+d) - 3$  是 11 的倍數  
 $\therefore (a+c) - (b+d) - 3 = 11s$  ( $s$  為 ~~0 或~~ 整數)  
 $\because 0 \leq a, b, c, d \leq 9 \therefore s$  只能等於  $-1$  (其他整數都不合)

(3)  $(a+c) - (b+d) = -8$   
 $(a+c) + (b+d) = 26 \Rightarrow a+c=9, b+d=17 \therefore b=9, d=8 (b \geq d)$   
 $a=1, 2, 3, \dots, 9$  (9 種)  
 $c=8, 7, 6, \dots, 0$  (9 種)

Ans: 9 個

7. (15%) 已知  $abcd$  為四位正整數，若  $abcd \times 4 = dcba$ ，求  $dcba$  為多少？

$$\begin{aligned} 4. \quad & abcd \times 4 = dcba \quad 1 \leq a \leq 9, 0 \leq b, c \leq 9, 1 \leq d \leq 9 \\ \Rightarrow & 4000a + 400b + 40c + 4d = 1000d + 100c + 10b + a \\ \Rightarrow & 3999a + 390b = 60c + 996d \\ \Rightarrow & \underline{1333a + 130b = 20c + 332d} \end{aligned}$$

考量  $a, b, c, d$  的範圍。

吾人可以推測出  $a=2, d=8$ 。

$$\Rightarrow 1333 \times 2 + 130b = 20c + 332 \times 8$$

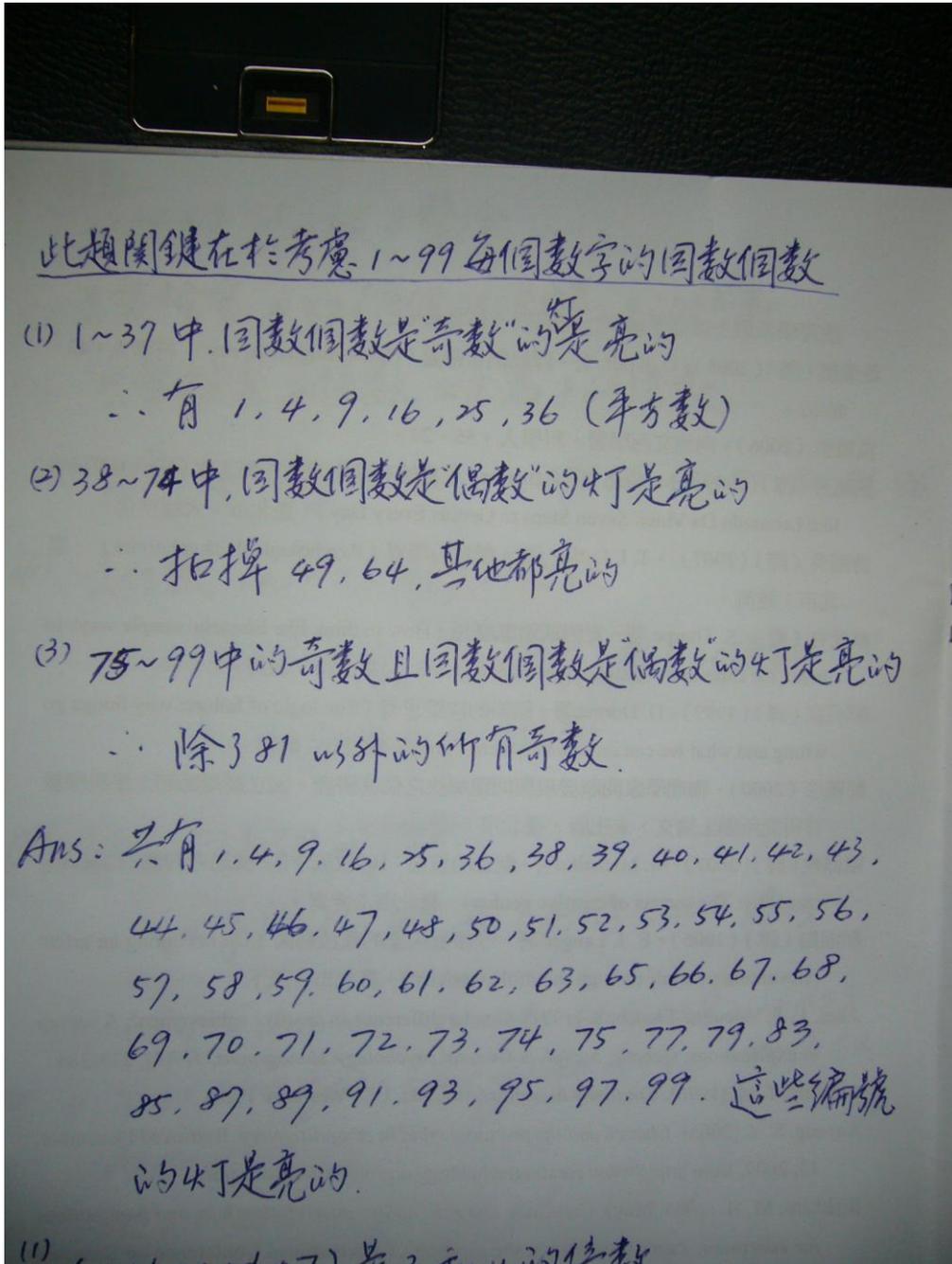
$$\Rightarrow 2666 + 130b = 20c + 2656$$

$$\Rightarrow 10 + 130b = 20c$$

因此可以再推估出  $b=1, c=7$

$$\text{Ans: } dcba = 8712$$

8. (15%) 在一個大禮堂裡有編號 1~99 的電燈開關(按一下就"開",再按一下就"關"),某一班級有 37 位同學,如果該班同學依座號順序進入這個禮堂,1 號同學將所有的開關都打開,接著 2 號同學把 2 的倍數(電燈編號為 2 的倍數)的電燈開關按了一下,然後 3 號同學把 3 的倍數的電燈開關按了一下(原本開的會關、關的會開),依此規律類推,班上 37 號按完開關後,請問還有哪些編號的電燈是打開的?



此題關鍵在於考慮 1~99 每個數字因數個數

(1) 1~37 中,因數個數是"奇數"的<sup>燈</sup>是亮的  
∴ 有 1, 4, 9, 16, 25, 36 (平方數)

(2) 38~74 中,因數個數是"偶數"的燈是亮的  
∴ 扣掉 49, 64, 其他都亮的

(3) 75~99 中的奇數且因數個數是"偶數"的燈是亮的  
∴ 除了 81 以外的所有奇數.

Ans: 共有 1, 4, 9, 16, 25, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 79, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99. 這些編號的燈是亮的.

(1) (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) 是 2 和 3 的倍數