

宜蘭縣第五屆蘭陽盃數學大賽活動

數學競試題本

隊名：_____ 姓名：_____

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第五屆蘭陽盃數學大賽的數學競試試題本，題本採單面印刷，有八題計算與證明題，每題一頁，共八頁，每題均需有詳細計算、證明和說明的過程。測驗時間由 8：50 至 10：20，共 90 分鐘。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

1. 請於試題下方空白處作答，空間不夠，可利用背面作答。
2. 需寫出計算過程或理由，如果只有答案沒有過程將酌予扣分。
3. 額外的試算請勿寫在題本中，請於計算紙上作答。
4. 題本試題請勿任意轉載或張貼。
5. 題本上請書寫清楚隊名與個人姓名，但不可故意污損答案本或試題本，否則該科不與計分。

作答方式：

請用黑色或藍色原子筆於答案本上書寫作答，需訂正時得使用修正液或修正帶，亦可不照題號順序答題，但須標明清楚題號。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

1. (10%) 假設小明身上有 1 元硬幣 4 枚，5 元硬幣 3 枚，10 元硬幣 1 枚，50 元硬幣 1 枚及 100 元紙鈔 1 張，則他共有幾種不同款額之付法？

2. (15%) 令 n 為正整數且 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1$ ，試問 $x^n + \frac{1}{x^n}$ 的值有幾種？其

值為何？

3. (10%) 試求 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \dots +$
 $\sqrt{1+\frac{1}{2010^2}+\frac{1}{2011^2}}$ 的值。

4. (15%) 若 a 、 b 為整數，我們稱平面坐標上點 (a, b) 為格子點。試

證：任意 3 個格子點必不能形成正三角形。

5. (10%) 試證：在邊長為 1 的正三角形內，任給 4 個相異點，則其中至少有兩點距離小於 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

6. (15%) 假設 a_1, a_2, \dots, a_{93} 的數中只能選取 $+1$ 或 -1 兩個值之一，那麼它們兩兩之積的和 $a_1a_2 + a_1a_3 + \dots + a_1a_{93} + a_2a_3 + a_2a_4 + \dots + a_2a_{93} + \dots + a_{91}a_{92} + a_{91}a_{93} + a_{92}a_{93}$ 的最小正值為何？

7. (15%) 甲、乙兩城市派選手參加圍棋循環賽，每位選手皆會相遇比賽，積分規則為勝局得 2 分，和局得 1 分，輸者不得分。已知甲城市共有 2 位選手且總共得 12 分，乙城市所有選手得分都相同，試求乙城市最少派幾位選手參加比賽？

8. (10%) 已知一等腰梯形的兩對角線互相垂直，且上下底的和為
12，試求此梯形的高為何？