1. 5 元硬幣有 3 枚共有 15 元，超過 10 元要與 10 元硬幣合併
故可視爲 1 元 4 枚，5 元 5 枚，50 元 1 枚，100 元 1 張
付款法有$(4+1)(5+1)(1+1)(1+1)-1=119$ (種)

2. $\because x^2+\frac{1}{x^2}=1 \quad \Rightarrow x^4-x^2+1=0$
$\therefore (x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^6-x^4+x^2+x^4-x^2+1=0 \quad \Rightarrow x^6=-1$
若(1) $n=12m$，$m\in N$
$x^n+\frac{1}{x^n}=x^{12m}+\frac{1}{x^{12m}}=(x^6)^{2m}+\frac{1}{(x^6)^{2m}}=1+1=2$
(2) $n=12m+1$，$m\in N\cup\{0\}$
$\because (x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=3$
$\therefore x^n+\frac{1}{x^n}=x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{3}$
(3) $n=12m+2$，$m\in N\cup\{0\}$
$x^n+\frac{1}{x^n}=x^2+\frac{1}{x^2}=1$
(4) $n=12m+3$，$m\in N\cup\{0\}$
$\because (x^3+\frac{1}{x^3})^2=x^6+2+\frac{1}{x^6}=0$
$\therefore x^n+\frac{1}{x^n}=x^3+\frac{1}{x^3}=0$
(5) $n=12m+4$，$m\in N\cup\{0\}$
$x^n+\frac{1}{x^n}=x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=-1$
(6) $n=12m+5$，$m\in N\cup\{0\}$
$x^n+\frac{1}{x^n}=x^5+\frac{1}{x^5}=-\frac{1}{x}-x=\mp\sqrt{3}$
(7) $n=12m+6$，$m\in N\cup\{0\}$
$x^n+\frac{1}{x^n}=x^6+\frac{1}{x^6}=-2$
(8) $n=12m+7$，$m\in N\cup\{0\}$
$x^n+\frac{1}{x^n}=x^7+\frac{1}{x^7}=-x+\frac{1}{-x}=\mp\sqrt{3}$
(9) $n=12m+8$，$m\in N\cup\{0\}$
$x^n+\frac{1}{x^n}=x^8+\frac{1}{x^8}=-(x^2+\frac{1}{x^2})=-1$

(10) $n=12m+9$，$m\in \mathrm{N}\cup\{0\}$

$$x^n+\frac{1}{x^n}=x^9+\frac{1}{x^9}=-(x^3+\frac{1}{x^3})=0$$

(11) $n=12m+10$，$m\in \mathrm{N}\cup\{0\}$

$$x^n+\frac{1}{x^n}=x^{10}+\frac{1}{x^{10}}=-(x^4+\frac{1}{x^4})=1$$

(12) $n=12m+11$，$m\in \mathrm{N}\cup\{0\}$

$$x^n+\frac{1}{x^n}=x^{11}+\frac{1}{x^{11}}=-(x^5+\frac{1}{x^5})=\pm\sqrt{3}$$

共有 7 種，其值有 0，±1，±2，$\pm\sqrt{3}$

3. $\because \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore$原式$=\sum_{n=1}^{2010}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sum_{n=1}^{2010}(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=2010+1-\frac{1}{2011}$

$=2010\frac{2010}{2011}$

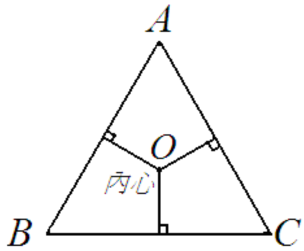
4. 設三格子點為(x_1, x_2)、(y_1, y_2)及(z_1, z_2)

則三點所形成的三角形面積為$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 \end{vmatrix}\right|\in \mathrm{Z}$

假設三點形成正三角形，則面積亦為$\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2})^2\notin \mathrm{Q}$

兩者矛盾！

5. 把正三角形等分成三個區域，則四點中至少有兩點同在一區，考慮此兩點最大之距離。此三區域中最大距離為$\overline{OA}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$



6. 令 $A=a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{92}a_{93}$

假設 a_1、a_2、⋯、a_{93} 中有 m 個$+1$、n 個-1

則 $a_1+a_2+\cdots+a_{93}=m-n$

$\because a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{93}^2 + 2A = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{93})^2$

$\therefore 93 + 2A = (m - n)^2$

使上式成立的最小自然數爲 $m - n = \pm 11$

$93 + 2A = 121 \quad \Rightarrow \quad A = 14$

7. 設乙城市派 x 位選手參賽，每人得 y 分

$\because$甲城市選手共得 12 分

$\therefore$從乙城市選手中得 10 分

因此，$2 \cdot 2x - 10 \geq 0 \quad \Rightarrow 2x \geq 5$

由總積分得 $12 + xy = (x+1)(x+2)$ …①

由乙城市選手總分＝相互比賽積分＋從甲城市選手比賽中得分

$\Rightarrow xy = (x-1)x + 4x - 10$ …②

①＋② $\Rightarrow 12 + 2xy = 2x^2 + 6x - 8 \quad \Rightarrow 2x(x + 3 - y) = 20$

$\Rightarrow x \mid 10$

$\because 2x \geq 5 \quad \therefore x = 5$

8. 如下圖所示，令四邊形 $ABCD$ 爲等腰梯形，$\overline{DP}$ 爲其高

則 $\overline{AD} // \overline{BC}$，$\overline{AB} = \overline{DC}$，且 $\overline{AC} = \overline{DB}$，$\overline{AC} \perp \overline{DB}$

過 D 點作 $\overline{DQ} // \overline{AC}$ 交 $\overline{BC}$ 的延長線於 Q 點

則四邊形 $ACQD$ 爲平行四邊形 $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{CQ}$，$\overline{AC} = \overline{DQ}$

故 $\overline{DB} = \overline{AC} = \overline{DQ}$

又 $\overline{DQ} // \overline{AC}$，且 $\overline{AC} \perp \overline{DB} \quad \Rightarrow \overline{DQ} \perp \overline{DB}$

$\Rightarrow \triangle DBQ$ 爲等腰直角三角形

$\therefore \overline{DP} = \overline{BP} = \overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BQ} = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}) = 6$