

宜蘭縣第四屆蘭陽數學競賽活動  
數學競賽答案

1. (10%) 將所有的正偶數按下列規則排成 6 行，試問 2010 所在位置是從左邊數起來的第幾行？

	2	4	6	8	
18	16	14	12	10	
	20	22	24	26	28
	36	34	32	30	
38	40	42	44	46	
	56	54	52	50	48
	58	60	62	64	
	·	·	·	·	·
	·	·	·	·	·

答案：從左邊數起來的第 2 行。

2. (15%) 對於任意一正整數  $n$ ，試證  $2011^n - 2340^n - 1713^n + 2042^n$  可以被 2086 整除。  
證明想法：

$$2011 - 2340 = -329, 2042 - 1713 = 329, 2011 - 1713 = 298, 2042 - 2340 = -298,$$

$$\implies 298 \cdot 329 \mid (2011^n - 2340^n - 1713^n + 2042^n), \implies 2086 \mid (2011^n - 2340^n - 1713^n + 2042^n).$$

3. (15%) 設  $\{a_i\}$  為一個有限的正整數數列，已知  $a_0 = 1001$ ,  $a_1 = x$  且  $a_{i+1} + a_i = a_{i-1}$ ，其中  $i = 1, 2, \dots$ 。試問若要此數列長度達到最大，則  $x$  應該為多少？

答案： $x = 619$ 。

4. (15%) 將 1 到 13 的數字沿著圓桌任意放置，證明必有四個相鄰數字其和不大於 26。  
證明想法：利用鴿籠原理。

5. (15%) 定義  $1! = 1$ ,  $2! = 1 \times 2$ ,  $3! = 1 \times 2 \times 3, \dots$ 。試證對於一般正整數  $n$  必滿足

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1.$$

證明想法： $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ 。

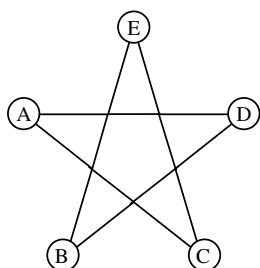
6. (10%) 試找出所有可能的實數  $r$  使得存在非零實數  $a, b, c$  滿足底下的關係式

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = r \\ abc = 1 \end{cases}$$

答案： $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - rx^2 + rx - 1, r \geq 3$  or  $r \leq -1$ 。

7. (10%) 將數字 1, 3, 4, 5, 7 填入下面左圖所示的 A, B, C, D, E 處(不一定按此順序)。若要使各線段兩端之數字和恰可排成一等差數列，試問此等差數列的中間項數值為何？

答案：等差數列的中間項數值為 8。



8. (10%) 已知  $ABCDEF$  為以  $P$  為中心之正六邊形且  $\triangle PQR$  為正三角形，兩圖形相交情況如下右圖所示。如果  $\overline{AB} = 5$ ,  $\overline{SB} = 2$  且  $\overline{PQ} = 8$ 。試求四邊形  $SBTP$  的面積。  
答案： $25\sqrt{3}/2$ 。

