

# 宜蘭縣第四屆蘭陽盃數學大賽活動

## 數學寫作題本

**請不要翻到次頁！**

**讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！**

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第四屆蘭陽盃數學大賽活動的數學寫作題本，題本採單面印刷。測驗時間由 13：30 至 15：00，共 90 分鐘。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

1. 請詳細閱讀題本中的敘述，並且參考本頁所列「步驟」，完成一篇數學寫作。
2. 可利用題本中空白部分計算。
3. 答案本上請書寫清楚隊名與個人姓名，但不可故意污損答案本或試題本，否則該科不與計分。

參考步驟：

1. 研究本篇寫作的評量表。
2. 就題本中的敘述進行研究瞭解。
3. 就「問題討論」嘗試練習。
4. 請用黑色或藍色原子筆書寫一篇關於「問題討論」且文意完整的作文，避免流於簡答形式的作文，需訂正時得使用修正液或修正帶。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

# 正立方體的截面

## 一、你所知道的正立方體

請寫下你所知道的正立方體。如：定義、外觀(頂點、邊、面)、性質…等等，請儘可能的討論思考，你對正方體的瞭解將有助你解決問題。

## 二、正立方體的驗證

現在你手邊有一個透明的盒子，外觀雖不是正立方體，但從內部測量會是一個正立方體，你如何驗證這個事實？寫出你的想法或作法，正規或有創意的都好，不限一種。

## 三、正立方體的截面

1. 用一個平面去切割立方體，切出來的面我們稱之為**截面**。而切割的方向與角度不同時，截面也會有各式各樣的變化，而截面到底會是怎樣的圖形呢？本寫作的主要目的之一就是找出正方體的各種截面。
2. 如圖，切去立方體的其中一個立體角 $O$ ，得到的截面會是一個三角形( $\triangle ABC$ )，有人認為要讓 $\triangle ABC$ 成為一個等腰三角形，切割時就應當選好 $B$ 、 $C$ 使得 $\overline{OB} = \overline{OC}$ ，以下是證明：

[證]在 $\triangle ABO$ 和 $\triangle ACO$ 中

$$\therefore \overline{OB} = \overline{OC} \text{ (已知)}$$

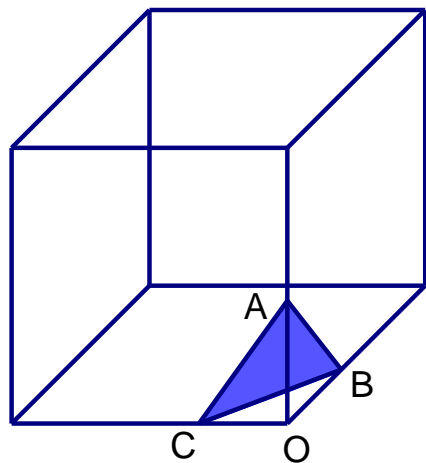
$$\overline{AO} = \overline{AO} \text{ (共用邊)}$$

$$\angle AOB = \angle AOC = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle ACO \text{ (SAS 全等)}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ 為一個等腰三角形} \quad \blacksquare$$



接下來，請回答下列三個問題：

- (1) 你能利用其它方法來證明  $\triangle ABC$  為一個等腰三角形嗎？請寫出來。
- (2) 若要讓  $\triangle ABC$  成為一個正三角形，該怎麼切割？請描述你的切法，並證明你的結果。
- (3) 若要讓  $\triangle ABC$  的三邊皆不等長，該如何切割？請描述你的切法。

3. **重點來了!!** 請儘可能找出各種截面並驗證，每種答案的呈現需含下列項目：

- (1) **截面的名稱與性質**：若為有名有姓的多邊形，寫下它的定義；其它多邊形若有特殊性質請描述，如：有幾組對邊平行。
- (2) **截面的切法**：請仿照上面的方式用圖文說明。
- (3) **驗證**：以幾何證明為主，如果發現無法嚴謹證明，也可以將你的想法用詳盡的文字敘述來說明。

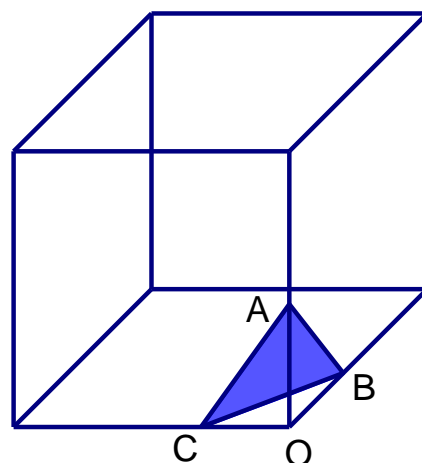
**註**：為了便於實驗觀察，請將你手邊的透明盒子注入清水，再滴入些許紅墨水，可視為截面的水面就清楚可見，請適當的轉動你的正方體來得到你要的截面。另外，可以注意到盒內的水量會影響截面的形成，一般而言，越多邊的平面截面圖形，需要越多的水量，但是盒內有水與沒水的空間是互補的，故裝入的水量以不超過一半為宜。

#### 四、不可能形成的截面

當你努力尋找可能截面的同時，或許已經發現某些平面多邊形是截不出來的，接下來是本寫作的第二重點，我們將試著找出一些不可能形成的截面。請在答案卷上依題目的要求逐題作答，請記得標上題號。

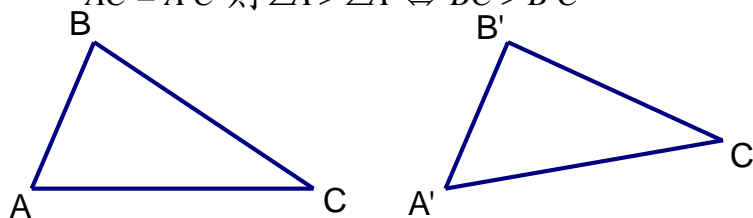
1. 一般來說，做出來的六邊形截面，都有三組互相平行的對邊，請討論說明。
2. 由 1. 可以推論有一雙對邊不平行的六邊形或是只有一雙對邊平行的五邊形是無法截出的，那麼正五邊形可以嗎？請討論說明。
3. 一般的四邊形是否能成為正方體的截面圖形？請討論說明。
4. 鳶形是否能成為正方體的截面圖形？請討論說明。
5. 七邊形、八邊形是否能成為正方體的截面圖形？請討論說明。
6. 不知道你是否發現做出來的三角形截面都是銳角三角形？我們合理懷疑直角三角形是不可能的截面圖形。如右圖，當我們任意截出一個  $\triangle ABC$  時，依勾股定理，我們可以得到：

$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$ 、 $\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$ 、  
 $\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$ 。如果此時  $\angle C = 90^\circ$ ，  
 則依勾股定理應該可以得到  $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ ，上述兩個推論顯然有矛盾，請利用這些提示證明  $\triangle ABC$  不可能為一個直角三角形。



7. 鈍角三角形應當也是不能形成的截面圖形，請證明。  
 註：下面的樞紐定理或許有幫助，請弄懂它並加以應用。

【樞紐定理】如下圖，在  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  中，已知  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ 、 $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  則  $\angle A > \angle A' \Leftrightarrow \overline{BC} > \overline{B'C'}$ 。



評分表								
	評分項目	S	T	U	V	W	X	缺
一	正確且完整的描述正立方體並提出可行或創意的的方法驗證手邊的正立方體(10)							
二	清楚描述可能的截面並正確驗證(40)							
三	正確說明不可能形成的截面 (30)							
整體性	考慮周詳、觀察入微(10)							
	使用數學技巧分析與解決問題，合乎邏輯且清楚標示出每個步驟(10)							

※ 細目總分 10 分：

S(10)	T(8)	U(6)	V(5)	W(3)	X(1)	缺(0)
-------	------	------	------	------	------	------

六個等級：X, W, V, U, T, S

S：非常完整，達到標準

T：相當好，但需要補充

U：大部分不錯，但有一些缺失

V：大部分不好，但有一些優點

W：相當弱，略顯不足

X：非常差