

宜蘭縣第二屆蘭陽數學競賽活動 數學作文題本

December 8, 2005

史書記載東漢和帝時（公元 105 年），宦官蔡倫覺得「竹簡木牘太重又不方便，縑帛太貴，那麼如何才能夠製造出輕便又便宜的紙張呢？」於是便「用樹膚，麻頭及敝布、漁網以為紙」，將隨處可得的原料造出了「蔡侯紙」。簡單奏明了皇帝，「帝善其能」「自是莫不從焉」，很快的在全國傳了開來。

蔡倫造紙的過程是如何的呢？後人用原始的方法去想像：先收集材料用刀子切碎，將它們浸泡在水中，等它發酵、漲開後，再用清水漂洗，木槌打細、攪散成為紙漿，把紙漿澆在竹器或麻布框內，經過曬乾後，一張粗粗的紙就完成了。

公元 121 年，東漢朝廷內部爭權奪利的鬥爭牽扯到蔡倫，漢武帝命令他投案。蔡倫恥於受審，即洗浴全身，換上最漂亮的衣服，然後服毒自盡。

蔡倫對我國乃至人類社會發展所產生的影響都是巨大的，並且這種影響還將持續下去。今天，我們是無法用數量來衡量紙對歷史發展所起的作用，人類對紙的使用將會延續到何年，更是難以預測。

既然紙張已離不開人類的日常生活，就讓我們對每日接觸的各種不同大小的紙張有更多的認識。有關紙與蔡倫的歷史，可以參考如下的網站：

<http://140.138.146.6/paper/TIME/time22.htm>

<http://www.epochtimes.com/b5/0/10/31/c2506.htm>

第一部份：正整數的最佳分解（25%）

將 12 分解成兩個正整數的乘積有

$$1 \times 12, 2 \times 6, 3 \times 4$$

三種，又這三種分解中兩數的差分別為

$$12 - 1 = 11, 6 - 2 = 4, 4 - 3 = 1.$$

顯然 3×4 是這三種分解中，讓兩數的差最小的一組，我們稱 3×4 為 12 的最佳分解，並規定分數 $F_{12} = \frac{3}{4}$ 。同理，24 有

$$1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6$$

四種分解方式，而 4×6 是兩數差最小的一組。所以 4×6 是 24 的最佳分解，且 $F_{24} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

有了上述舉例之後，只要找到正整數 n 的最佳分解 $p \times q (p \leq q)$ ，就可以產生一個分數的數列 $\langle F_n \rangle$ ，其中定義 $F_n = \frac{p}{q}$ 。

- 1-1. 求 18 的最佳分解及分數 F_{18} 。
- 1-2. 求 48 的最佳分解及分數 F_{48} 。
- 1-3. 求分數 F_{221} 。
- 1-4. 求分數 F_{299} 。
- 1-5. 哪些正整數 n 會使得 $F_n = 1$ 。

第二部份：紙張的分類（50%）

紙張的尺寸分為國際標準組織尺寸和我國慣用尺寸兩種，而國內通用尺寸主要有「菊版紙」與「四六版紙」兩大類。若依面積來說，則最大的紙張稱為全開，其次有 2 開，3 開，4 開， \dots ，128 開等的對應紙張。菊版紙的全開是 25×35 （以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開（有時稱對開），3 開，4 開，8 開，12 開，16 開，20 開的大小列表如右圖所示。長方形紙張較長邊除以短邊所產生的比值稱為這紙張的“視覺率”。

以上是有關紙張尺寸的規格，至於用紙的計算是以“令”為單位，一令紙代表 500 張全開紙張的數量。因為一張全開紙可以分割成兩張 2 開紙，所以一令紙也相當於 1000 張 2 開紙的數量。

開數 \ 規格	英吋
全開	25×35
2 開	$25 \times 17\frac{1}{2}$
3 開	$25 \times 11\frac{2}{3}$
4 開	$11\frac{1}{2} \times 17\frac{1}{2}$
8 開	$11\frac{1}{2} \times 8\frac{3}{4}$
12 開	$8\frac{1}{3} \times 8\frac{3}{4}$
16 開	$6\frac{1}{4} \times 8\frac{3}{4}$
20 開	$6\frac{1}{4} \times 7$

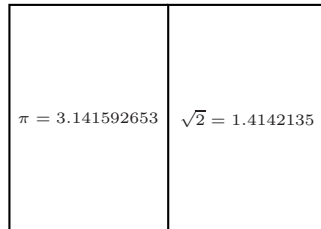
- 2-1. a) 64 開菊版紙尺寸為何？32 開菊版紙尺寸為何？
 b) 25 開菊版紙尺寸為何？18 開菊版紙尺寸為何？
 c) 利用正整數因數分解的知識，對各種菊版紙的尺寸給個數學公式。
 d) 某人訂做名片，經計算得知名片的面積是 12.5 平方英吋，若該名片是採菊版紙製作，則此人的名片是幾開菊版紙。
 e) 承 d)，該名片的長寬是多少？
 f) 試問 25 開菊版紙是否可以蓋住（邊與邊平行的覆蓋）整個 32 開菊版紙。
 g) 某菊版紙的視覺率為 1.2，求其開數？
- 2-2. 四六版紙的全開是 31×43 （以英吋為單位）大小的紙張，而 2 開，3 開，4 開， \dots ，128 開等的對應紙張的分割方式完全仿菊版紙的分割方法。

- a) 64 開四六版紙尺寸為何？24 開四六版紙尺寸為何？
- b) 7 開四六版紙尺寸為何？90 開四六版紙尺寸為何？
- c) 96 開四六版紙尺寸為何？

第三部份：理想的紙張大小（25%）

如果你將前一節中的紙張之兩邊邊長，拿來除一下，你會發現它們的比值會幾乎是一個常數。難道接近這個常數的紙張，會讓人賞心悅目或使用方便嗎？

出版社為了美觀及作業方便，希望他們出版的書本，攤開時（如下圖所示）整體的長寬比例與書本合起來時的整頁長寬比例一樣。



▲ 書本攤開的樣式

- 3-1. 試問該出版社使用紙張的長寬比是多少？
- 3-2. 該出版社想出袖珍本書籍，將現成的整頁紙張切割成兩等張，並以此小張的紙當一頁。試問袖珍本書籍攤開的長寬比例與小張的長寬比例一樣嗎？

★★★參考解答★★★

1-1. 因為 18 有

$$1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6$$

三種分解方式，而 3×6 是兩數差最小的一組。所以 3×6 是 18 的最佳分解，且 $F_{18} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 。

1-2. 因為 48 有

$$1 \times 48, 2 \times 24, 3 \times 16, 4 \times 12, 6 \times 8$$

五種分解方式，而 6×8 是兩數差最小的一組。所以 6×8 是 48 的最佳分解，且 $F_{48} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ 。

1-3. 因為 $221 = 13 \times 17$ ，所以 221 有

$$1 \times 221, 13 \times 17$$

種分解方式，而 13×17 是兩數差最小的一組。所以 13×17 是 221 的最佳分解，且 $F_{221} = \frac{13}{17}$ 。

1-4. 因為 2^{99} 有

$$1 \times 2^{99}, 2^1 \times 2^{98}, 2^2 \times 2^{97}, \dots, 2^{44} \times 2^{45}$$

45 種分解方式，而 $2^{44} \times 2^{45}$ 是兩數差最小的一組。所以 $2^{44} \times 2^{45}$ 是 2^{99} 的最佳分解，且 $F_{2^{99}} = \frac{2^{44}}{2^{45}} = \frac{1}{2}$ 。

1-5. 令 $p \times q (p \leq q)$ 是正整數 n 的最佳分解。因為 $F_n = 1$ ，所以 $\frac{p}{q} = 1$ ，即 $p = q$ 。又由 $n = p \times q$ 得 $n = p^2$ 。故當 n 是完全平方數時， $F_n = 1$ 。

2-1. a) $64 = 8 \times 8$ 開菊版紙尺寸為

$$\frac{25}{8} \times \frac{35}{8} = 3\frac{1}{8} \times 4\frac{3}{8},$$

而 $32 = 4 \times 8$ 開菊版紙尺寸為

$$\frac{25}{4} \times \frac{35}{8} = 6\frac{1}{4} \times 4\frac{3}{8}.$$

b) $25 = 5 \times 5$ 開菊版紙尺寸為

$$\frac{25}{5} \times \frac{35}{5} = 5 \times 7,$$

而 $18 = 3 \times 6$ 開菊版紙尺寸為

$$\frac{25}{3} \times \frac{35}{6} = 8\frac{1}{3} \times 5\frac{5}{6}.$$

c) 如果 $p \times q$ 是 n 的最佳分解，那麼 n 開菊版紙的尺寸定為

$$\frac{25}{p} \times \frac{35}{q},$$

也就是說，將長 25 的邊裁成 p 等份，寬 q 的邊裁成 q 等份的意思。

d) 因為全開菊版紙可以裁成

$$\frac{25 \times 35}{12.5} = 70$$

張名片，所以名片是 70 開菊版紙。

e) 因為 $70 = 7 \times 10$ ，所以該名片的長寬為

$$\frac{25}{7} \times \frac{35}{10} = 3\frac{4}{7} \times 3\frac{1}{2}.$$

f) 因為 25 開菊版紙的大小為 5×7 ，32 開菊版紙的大小為 4.375×6.25 ，又 $5 > 4.375, 7 > 6.25$ ，所以 25 開菊版紙可以蓋住整個 32 開菊版紙。

g) 設此菊版紙為 $n = p \times q$ 開 ($1 \leq p \leq q$ 且 $pq \leq 128$)，其大小為 $\frac{25}{p} \times \frac{35}{q}$ ，視覺率為

$$1.2 = \frac{6}{5} = \frac{\frac{25}{p}}{\frac{35}{q}} = \frac{5q}{7p} \quad \text{或} \quad 1.2 = \frac{6}{5} = \frac{\frac{35}{q}}{\frac{25}{p}} = \frac{7p}{5q}.$$

得到 $42p = 25q$ 或 $7p = 6q$ 。

如果是 $42p = 25q$ ，那麼 $42|q, 25|p$ ，此時 $42 \cdots 25|pq$ ，這與 $pq \leq 128$ 矛盾。所以 $7p = 6q$ ，又 $pq \leq 128$ ，解得 $p = 6, q = 7$ 。故此菊版紙為 $6 \times 7 = 42$ 開。

2-2. a) $64 = 8 \times 8$ 開四六版紙尺寸為

$$\frac{31}{8} \times \frac{43}{8} = 3\frac{7}{8} \times 5\frac{3}{8};$$

$24 = 4 \times 6$ 開四六版紙尺寸為

$$\frac{31}{4} \times \frac{43}{6} = 7\frac{3}{4} \times 7\frac{1}{6}.$$

b) $7 = 1 \times 7$ 開四六版紙尺寸為

$$\frac{31}{1} \times \frac{43}{7} = 31 \times 6\frac{1}{7};$$

$90 = 9 \times 10$ 開四六版紙尺寸為

$$\frac{31}{9} \times \frac{43}{10} = 3\frac{4}{9} \times 4\frac{3}{10}.$$

c) $96 = 8 \times 12$ 開四六版紙尺寸為

$$\frac{31}{8} \times \frac{43}{12} = 3\frac{7}{8} \times 3\frac{7}{12}.$$

3-1. 設紙張的長與寬分別為 x 與 y ，攤開的長寬比 $\frac{2x}{y}$ ，單頁的長寬比 $\frac{y}{x}$ 。由題意得

$$\frac{2x}{y} = \frac{y}{x} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2.$$

所以出版社使用紙張之長寬比為 $\sqrt{2}$ 。

3-2. 一樣。