

宜蘭縣 105 年度國民中小學科學展覽會

作品說明書

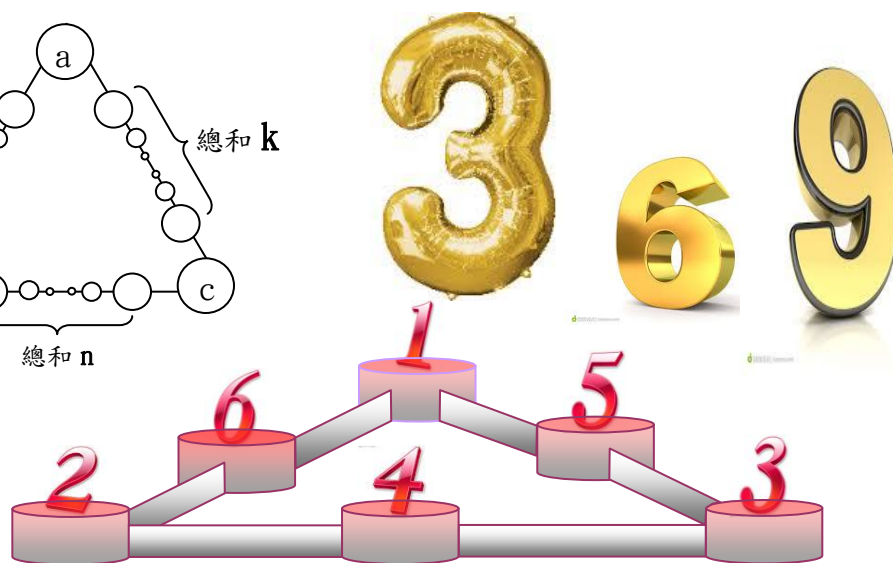
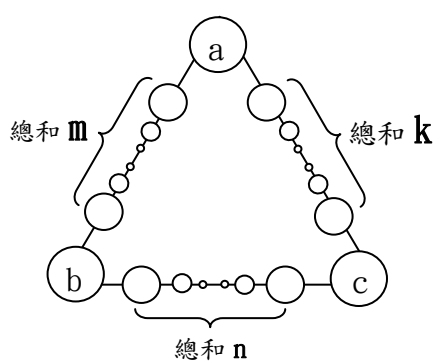
科 別：數 學 科

組 別：國 中 組

作品名稱：六九先鋒，三分天下

關 鍵 詞：數列和 S_n ，側邊和 R ，組合 $C(n, m)$

編 號：



目 錄

摘要.....	1
壹、研究動機.....	1
貳、研究目的.....	1
參、研究設備及器材.....	1
肆、名詞解釋.....	1
伍、研究過程.....	1
陸、研究結果.....	28
柒、問題與討論.....	29
捌、結論.....	29
玖、參展心得與活動花絮.....	30

六九先鋒，三分天下

摘要

此研究主要是探討：空心的正三角形在每側數字個數相同，且數字不重複的情況下，如何使三側數字和皆相等。

壹、研究動機

國二下老師在講解 1-2 等差級數的例題 8 時:用棋子排出空心的正三角形，第一個圖 3 顆，第二個圖 6 顆，第三個圖 9 顆……，一時興起把 1、2、3 填入第一個圖中，發現三邊和不一樣，接著把第二個圖隨意填入 1~6 六個不重複的數字，竟發現有些填法會讓三角形三個邊的數字和都相等，但有些卻會失敗，此時不禁引起了的好奇心，想究竟要如何的填放，方可使三側的和相等呢？而它們是否有規律性可循？在好奇心的驅使下邀了二位同學去請教老師，老師對我們說：「這個我沒有特別去研究，不過這題目還蠻有趣的!如果你們想要知道結果，可以和同學一起去討論看看，或許有某種規律可循！」於是我們便用課餘時間開始研究。

貳、研究目的

一、從 1 開始到 n 的連續整數中，想推究出空心正三角形在每側擺放個數均相同下，應如何填入，方能使每側的數字總和皆相等。並且從中探討三角形三頂點數與剩餘每側中間數的擺放是否有規律或關聯。

參、研究設備及器材

- 一、原子筆、螢光筆、白紙、鉛筆、擦子、釘書機
- 二、電腦(Excel、Word、小畫家)

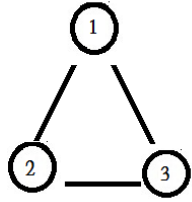
肆、名詞解釋

- 一、 S_n ：從 1 到 n 的和
- 二、 R ：每一側邊所有數的和
- 三、 $C(n, m)$ 表從 n 個數中隨機取出 m 個數的組合

伍、研究過程

剛開始，我們採用土法煉鋼的方式進行討論：

一、側邊為兩個數字的研究：填入 1, 2, 3 三個數字，共一種填入法



$$1+2 \neq 2+3 \neq 1+3$$


※小結：(1)可拼出每側 2 個數的正三角形。

(2)每側和皆不相等。

二、側邊為三個數字的研究：1, 2, 3, 4, 5, 6 六個數字。

$$\text{共 } C(6, 3) \times 3! = \frac{6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3} \times (1 \times 2 \times 3) = 20 \times 6 = 120 \text{ 種組合方式。}$$

三 頂點	中間數	側邊和
1, 2, 3	4, 5, 6	$1+4+2=7 \neq 2+5+3=10 \neq 1+6+3=10$ $1+4+2=7 \neq 2+6+3=11 \neq 1+5+3=9$ $1+5+2=8 \neq 2+4+3=9 \neq 1+6+3=10$ $1+5+2=8 \neq 2+6+3=11 \neq 1+4+3=8$ $1+6+2=9 = 2+4+3=9 = 1+5+3=9$ 成功 $1+6+2=9 \neq 2+5+3=10 \neq 1+4+3=8$
1, 2, 4	3, 5, 6	$1+3+2=6 \neq 2+5+4=11 \neq 1+6+4=11$ $1+3+2=6 \neq 2+6+4=12 \neq 1+5+4=10$ $1+5+2=8 \neq 2+3+4=9 \neq 1+6+4=11$ $1+5+2=8 \neq 2+6+4=12 \neq 1+3+4=8$ $1+6+2=9 \neq 2+3+4=9 \neq 1+5+4=10$ $1+6+2=9 \neq 2+5+4=11 \neq 1+3+4=9$
1, 2, 5	3, 4, 6	$1+3+2=6 \neq 2+4+5=11 \neq 1+6+5=12$ $1+3+2=6 \neq 2+6+5=13 \neq 1+4+5=10$ $1+4+2=7 \neq 2+3+5=10 \neq 1+6+5=12$


		$1+4+2=7 \neq 2+6+5=13 \neq 1+3+5=9$ $1+6+2=9 \neq 2+3+5=10 \neq 1+4+5=10$ $1+6+2=9 \neq 2+4+5=11 \neq 1+3+5=9$
1, 2, 6	3, 4, 5	$1+3+2=6 \neq 2+4+6=12 \neq 1+5+6=12$ $1+3+2=6 \neq 2+5+6=13 \neq 1+4+6=11$ $1+4+2=7 \neq 2+3+6=11 \neq 1+5+6=12$ $1+4+2=7 \neq 2+5+6=13 \neq 1+3+6=10$ $1+5+2=8 \neq 2+3+6=11 \neq 1+4+6=11$ $1+5+2=8 \neq 2+4+6=12 \neq 1+3+6=10$
1, 3, 4	2, 5, 6	$1+2+3=6 \neq 3+5+4=12 \neq 1+6+4=11$ $1+2+3=6 \neq 3+6+4=13 \neq 1+5+4=10$ $1+5+3=9 \neq 3+2+4=9 \neq 1+6+4=11$ $1+5+3=9 \neq 3+6+4=13 \neq 1+2+4=7$ $1+6+3=10 \neq 3+2+4=9 \neq 1+5+4=10$ $1+6+3=10 \neq 3+5+4=12 \neq 1+2+4=7$
1, 3, 5	2, 4, 6	$1+2+3=6 \neq 3+4+5=12 = 1+6+5=12$ $1+2+3=6 \neq 3+6+5=14 \neq 1+4+5=10$ $1+4+3=8 \neq 3+2+5=10 \neq 1+6+5=12$ $1+4+3=8 \neq 3+6+5=14 \neq 1+2+5=8$ $1+6+3=10 = 3+2+5=10 = 1+4+5=10$  $1+6+3=10 \neq 3+4+5=12 \neq 1+2+5=8$
1, 3, 6	2, 4, 5	$1+2+3=6 \neq 3+4+6=13 \neq 1+5+6=12$ $1+2+3=6 \neq 3+5+6=14 \neq 1+4+6=11$ $1+4+3=8 \neq 3+2+6=11 \neq 1+5+6=12$ $1+4+3=8 \neq 3+5+6=14 \neq 1+2+6=9$ $1+5+3=9 \neq 3+2+6=11 \neq 1+4+6=11$

		$1+5+3=9 \neq 3+4+6=13 \neq 1+2+6=9$
1, 4, 5	2, 3, 6	$1+2+4=7 \neq 4+3+5=12 \neq 1+6+5=12$ $1+2+4=7 \neq 4+6+5=15 \neq 1+3+5=9$ $1+3+4=8 \neq 4+2+5=11 \neq 1+6+5=12$ $1+3+4=8 \neq 4+6+5=15 \neq 1+2+5=8$ $1+6+4=11 \neq 4+2+5=11 \neq 1+3+5=9$ $1+6+4=11 \neq 4+3+5=12 \neq 1+2+5=8$
1, 4, 6	2, 3, 5	$1+2+4=7 \neq 4+3+6=12 \neq 1+5+6=12$ $1+2+4=7 \neq 4+5+6=15 \neq 1+3+6=10$ $1+3+4=8 \neq 4+2+6=12 \neq 1+5+6=12$ $1+3+4=8 \neq 4+5+6=15 \neq 1+2+6=9$ $1+5+4=10 \neq 4+2+6=12 \neq 1+3+6=10$ $1+5+4=10 \neq 4+3+6=13 \neq 1+2+6=9$
1, 5, 6	2, 3, 4	$1+2+5=8 \neq 5+3+6=14 \neq 1+4+6=11$ $1+2+5=8 \neq 5+4+6=15 \neq 1+3+6=10$ $1+3+5=9 \neq 5+2+6=13 \neq 1+4+6=11$ $1+3+5=9 \neq 5+4+6=15 \neq 1+2+6=9$ $1+4+5=10 \neq 5+2+6=13 \neq 1+3+6=10$ $1+4+5=10 \neq 5+3+6=14 \neq 1+2+6=9$
2, 3, 4	1, 5, 6	$2+1+3=6 \neq 3+5+4=12 \neq 4+6+2=12$ $2+1+3=6 \neq 3+6+4=13 \neq 4+5+2=11$ $2+5+3=10 \neq 3+1+4=8 \neq 4+6+2=12$ $2+5+3=10 \neq 3+6+4=13 \neq 4+1+2=7$ $2+6+3=11 \neq 3+1+4=8 \neq 4+5+2=11$ $2+6+3=11 \neq 3+5+4=12 \neq 4+1+2=7$
2, 3, 5	1, 4, 6	$2+1+3=6 \neq 3+4+5=12 \neq 5+6+2=13$



		$2+1+3=6 \neq 3+6+5=14 \neq 5+4+2=11$ $2+4+3=9 \neq 3+1+5=9 \neq 5+6+2=13$ $2+4+3=9 \neq 3+6+5=14 \neq 5+1+2=8$ $2+6+3=11 \neq 3+1+5=9 \neq 5+4+2=11$ $2+6+3=11 \neq 3+4+5=12 \neq 5+1+2=8$
2, 3, 6	1, 4, 5	$2+1+3=6 \neq 3+4+6=13 \neq 6+5+2=13$ $2+1+3=6 \neq 3+5+6=14 \neq 6+4+2=12$ $2+4+3=9 \neq 3+1+6=10 \neq 6+5+2=13$ $2+4+3=9 \neq 3+5+6=14 \neq 6+1+2=9$ $2+5+3=10 \neq 3+1+6=10 \neq 6+4+2=12$ $2+5+3=10 \neq 3+4+6=12 \neq 6+1+2=9$
2, 4, 5	1, 3, 6	$2+1+4=7 \neq 4+3+5=12 \neq 5+6+2=13$ $2+1+4=7 \neq 4+6+5=15 \neq 5+3+2=10$ $2+3+4=9 \neq 4+1+5=10 \neq 5+6+2=13$ $2+3+4=9 \neq 4+6+5=15 \neq 5+1+2=8$ $2+6+4=12 \neq 4+1+5=10 \neq 5+3+2=10$ $2+6+4=12 \neq 4+3+5=12 \neq 5+1+2=8$
2, 4, 6	1, 3, 5	$2+1+4=7 \neq 4+3+6=13 \neq 6+5+2=13$ $2+1+4=7 \neq 4+5+6=15 \neq 6+3+2=11$ $2+3+4=9 \neq 4+1+6=11 \neq 6+5+2=13$ $2+3+4=9 \neq 4+5+6=15 \neq 6+1+2=9$ $2+5+4=11 \neq 4+1+6=11 \neq 6+3+2=11$ $2+5+4=11 \neq 4+3+6=13 \neq 6+1+2=9$
2, 5, 6	1, 3, 4	$2+1+5=8 \neq 5+3+6=14 \neq 6+4+2=12$ $2+1+5=8 \neq 5+4+6=15 \neq 6+3+2=11$ $2+3+5=10 \neq 5+1+6=12 \neq 6+4+2=12$



		$2+3+5=10 \neq 5+4+6=15 \neq 6+1+2=9$ $2+4+5=11 \neq 5+1+6=12 \neq 6+3+2=11$ $2+4+5=11 \neq 5+3+6=14 \neq 6+1+2=9$
3, 4, 5	1, 2, 6	$3+1+5=9 \neq 4+2+5=11 \neq 5+6+3=14$ $3+1+5=9 \neq 4+6+5=15 \neq 5+2+3=10$ $3+2+5=10 \neq 4+1+5=10 \neq 5+6+3=14$ $3+2+5=10 \neq 4+6+5=15 \neq 5+1+3=9$ $3+6+5=14 \neq 4+1+5=10 \neq 5+2+3=10$ $3+6+5=14 \neq 4+2+5=11 \neq 5+1+3=9$
3, 4, 6	1, 2, 5	$3+1+6=10 \neq 6+2+4=12 \neq 4+5+3=12$ $3+1+6=10 \neq 6+5+4=15 \neq 4+2+3=9$ $3+2+6=11 \neq 6+1+4=11 \neq 4+5+3=12$ $3+2+6=11 \neq 6+5+4=15 \neq 4+1+3=8$ $3+5+6=14 \neq 6+1+4=11 \neq 4+2+3=9$ $3+5+6=14 \neq 6+2+4=12 \neq 4+1+3=8$
3, 5, 6	1, 2, 4	$3+1+6=10 \neq 6+2+5=13 \neq 5+4+3=12$ $3+1+6=10 \neq 6+4+5=15 \neq 5+2+3=10$ $3+2+6=11 \neq 6+1+5=12 \neq 5+4+3=12$ $3+2+6=11 \neq 6+4+5=15 \neq 5+1+3=9$ $3+4+6=13 \neq 6+1+5=12 \neq 5+2+3=10$ $3+4+6=13 \neq 6+2+5=13 \neq 5+1+3=9$
4, 5, 6	1, 2, 3	$4+1+6=11 \neq 6+2+5=13 \neq 5+3+4=12$ $4+1+6=11 \neq 6+3+5=14 \neq 5+2+4=11$ $4+2+6=12 = 6+1+5=12 = 5+3+4=12$  $4+2+6=12 \neq 6+3+5=14 \neq 5+1+4=10$ $4+3+6=13 \neq 6+1+5=12 \neq 5+2+4=11$

		$4+3+6=13 \neq 6+2+5=13 \neq 5+1+4=10$
--	--	--

※小結：(1)可找到每側個數為 3 的空心正三角形之三側相等和的填入法。

(2)在 20 種三頂點填入之組合中，只有四組頂點(1, 2, 3)&(4, 5, 6)&(1, 3, 5)&(2, 4, 6)成功，其餘側邊和皆無法相等。

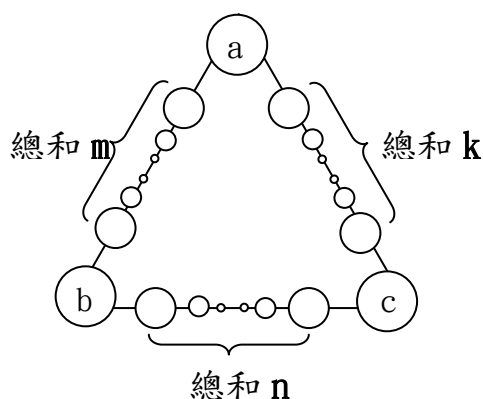
三、側邊為四個數字的研究：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 九個數字

(一)探討方式：因中間數有 2 個，不適合隨機填入的方法，因此改以每側和減去兩頂點後剩餘的中間數和，將其分解後再行配對。

1. 側邊和的探究：

已知三頂點的數字分別為 a、b、c

左側中間數字和為 m，右側中間數字和為 k，底部中間數字和為 n



(步驟一)今假設每側數字之總和為 R，故三側總和為 3R。

(步驟二)所以 $3R = (a+m+b) + (b+n+c) + (c+k+a)$

$$= (a+b+c) + (a+m+b+n+c+k)$$

$$= (a+b+c) + S_n$$

$$\text{所以 } R = \frac{(a+b+c) + S_n}{3}$$

2. 三頂點填入數字的發現：

因三側填入的個數必相同，故我們所填入的數字，從最少填入數字 1, 2, 3 開始(每側兩個數字)；接著填入 1 至 6(每側三個數字)；填入 1 至 9(每側四個數字)；...；進而填入 1 至 3p(每側 p+1 個數字)，以此類推。此外，由第五冊的代數證明得知，「連續三個整數和必為 3 的倍數」，故我們所填入之所有的數總和必為 3 的倍數。

$$\therefore S_n = 3q \text{ (3 的倍數)}$$

$$\text{故 } R = \frac{(a+b+c)}{3} + q$$

又因爲 R 爲正整數，故三頂點 $a+b+c$ 必爲 3 的倍數。

3. 三頂點填入之組合數探討：

爲了討論完整，故將 1~9 數分爲三類：

$$3n+1(1, 4, 7); 3n+2(2, 5, 8); 3n(3, 6, 9)$$

故滿足三頂點和爲 3 的倍數的填入法共有

$$\begin{aligned} & C(3, 1) \times C(3, 1) \times C(3, 1) + C(3, 3) + C(3, 3) + C(3, 3) \\ & = (3 \times 3 \times 3) + 1 + 1 + 1 = 30 \text{ 種組合方式。} \end{aligned}$$

於是我們將三頂點和不是 3 的倍數剔除後，對剩餘的 30 組去作探究。

(二) 30 種頂點組合的探討：

成功 (1) 三頂點 1, 2, 3

$$\text{三頂點和} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+6}{3} = 17 \quad \text{已出現：1, 2, 3} \quad \text{尙餘：4, 5, 6, 7, 8, 9}$$

$$\begin{array}{lll} \triangle \text{左側：} 1+2=3 & \triangle \text{右側：} 1+3=4 & \triangle \text{下側：} 2+3=5 \\ 17-3=14 & 17-4=13 & 17-5=12 \end{array}$$

$$14 \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} 9 \\ 4 \end{cases}$$

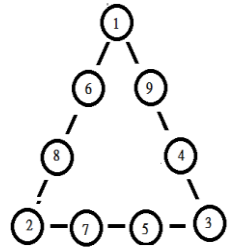
$$12 \begin{cases} 7 \\ 5 \end{cases}$$

或

$$14 \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases}$$

$$12 \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$$



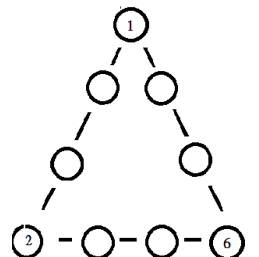
(2) 三頂點 1, 2, 6

$$\text{三頂點和} = 1 + 2 + 6 = 9$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+9}{3} = 18 \quad \text{已出現：1, 2, 6} \quad \text{尙餘：3, 4, 5, 7, 8, 9}$$

$$\begin{array}{lll} \triangle \text{左側：} 1+2=3 & \triangle \text{右側：} 1+6=7 & \triangle \text{下側：} 2+6=8 \\ 18-3=15 & 18-7=11 & 18-8=10 \end{array}$$



$$15 \begin{cases} 7 \\ 8 \end{cases}$$

11 ?

10 ?

(3) 三頂點 1, 2, 9

$$\text{三頂點和} = 1 + 2 + 9 = 12$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 12}{3} = 19 \quad \text{已出現：1, 2, 9} \quad \text{尚餘：3, 4, 5, 6, 7, 8}$$

$$\triangle \text{左側：} 1 + 2 = 3$$

$$\triangle \text{右側：} 1 + 9 = 10$$

$$\triangle \text{下側：} 2 + 9 = 11$$

$$19 - 3 = 16$$

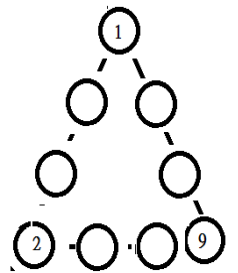
$$19 - 10 = 9$$

$$19 - 11 = 8$$

$$16 ?$$

$$9 \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$$

$$8 ?$$



成功

(4) 三頂點 2, 3, 7

$$\text{三頂點和} = 2 + 3 + 7 = 12$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 12}{3} = 19 \quad \text{已出現：2, 3, 7} \quad \text{尚餘：1, 4, 5, 6, 8, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 2 + 3 = 5$$

$$\triangle \text{右側：} 2 + 7 = 9$$

$$\triangle \text{下側：} 3 + 7 = 10$$

$$19 - 5 = 14$$

$$19 - 9 = 10$$

$$19 - 10 = 9$$

$$14 \begin{cases} 5 \\ 9 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$$

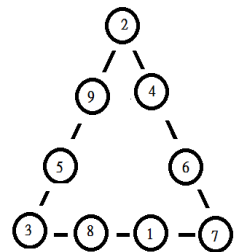
$$9 \begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$$

或

$$14 \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$$



(5) 三頂點 1, 3, 8

$$\text{三頂點和} = 1 + 3 + 8 = 12$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 12}{3} = 19 \quad \text{已出現：1, 3, 8} \quad \text{尚餘：2, 4, 5, 6, 7, 9}$$

$$\triangle\text{左側} : 1+3=4$$

$$\triangle\text{右側} : 1+8=9$$

$$\triangle\text{下側} : 3+8=11$$

$$19-4=15$$

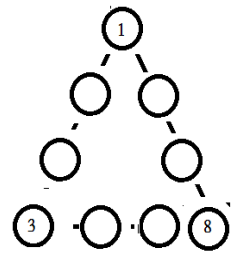
$$19-9=10$$

$$19-11=8$$

$$15 \begin{cases} 6 \\ 9 \end{cases}$$

$$10 ?$$

$$8 ?$$



(6) 三頂點 1, 4, 7

$$\text{三頂點和} = 1+4+7=12$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+12}{3} = 19$$

已出現 : 1, 4, 7

尚餘 : 2, 3, 5, 6, 8, 9

$$\triangle\text{左側} : 1+4=5$$

$$\triangle\text{右側} : 1+7=8$$

$$\triangle\text{下側} : 4+7=11$$

$$19-5=14$$

$$19-8=11$$

$$19-11=8$$

$$14 \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} 3 \\ 8 \end{cases}$$

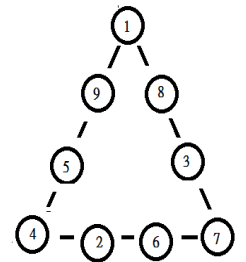
$$8 \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$$

或

$$14 \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}$$



(7) 三頂點 1, 5, 6

$$\text{三頂點和} = 1+5+6=12$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+12}{3} = 19$$

已出現 : 1, 5, 6

尚餘 : 2, 3, 4, 7, 8, 9

$$\triangle\text{左側} : 1+5=6$$

$$\triangle\text{右側} : 1+6=7$$

$$\triangle\text{下側} : 5+6=11$$

$$19-6=13$$

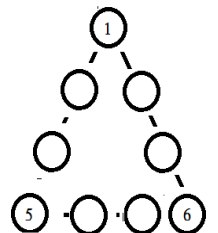
$$19-7=12$$

$$19-11=8$$

$$13 \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases}$$

$$12 ?$$

$$8 ?$$



(8) 三頂點 1, 6, 8

$$\text{三頂點和} = 1+6+8=15$$

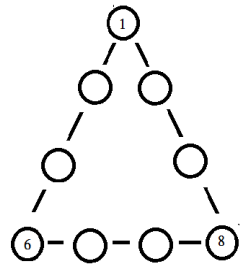
$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+15}{3} = 20 \quad \text{已出現：1, 6, 8} \quad \text{尚餘：2, 3, 4, 5, 7, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 1+6=7 \quad \triangle \text{右側：} 1+8=9 \quad \triangle \text{下側：} 6+8=14$$

$$20-7=13 \quad 20-9=11 \quad 20-14=6$$

$$13 \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases} \quad 11? \quad 6?$$



成功 (9) 三頂點 4, 5, 6

$$\text{三頂點和} = 4+5+6 = 15$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+15}{3} = 20 \quad \text{已出現：4, 5, 6} \quad \text{尚餘：1, 2, 3, 7, 8, 9}$$

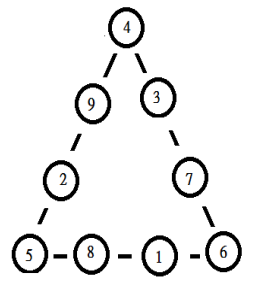
$$\triangle \text{左側：} 4+5=9 \quad \triangle \text{右側：} 4+6=10 \quad \triangle \text{下側：} 5+6=11$$

$$20-9=11 \quad 20-10=10 \quad 20-11=9$$

$$11 \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases} \quad 10 \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases} \quad 9 \begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$$

或

$$11 \begin{cases} 3 \\ 8 \end{cases} \quad 10 \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases} \quad 9 \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases}$$



成功 (10) 三頂點 2, 5, 8

$$\text{三頂點和} = 2+5+8 = 15$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

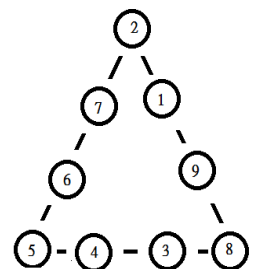
$$\text{側邊和} = \frac{45+15}{3} = 20 \quad \text{已出現：2, 5, 8} \quad \text{尚餘：1, 3, 4, 6, 7, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 2+5=7 \quad \triangle \text{右側：} 2+8=10 \quad \triangle \text{下側：} 5+8=13$$

$$20-7=13 \quad 20-10=10 \quad 20-13=7$$

$$13 \begin{cases} 7 \\ 6 \end{cases} \quad 10 \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases} \quad 7 \begin{cases} 4 \\ 3 \end{cases}$$

或



$$13 \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$$

(11)三頂點 1, 8, 9

$$\text{三頂點和} = 1 + 8 + 9 = 18$$

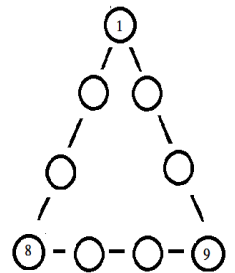
$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 18}{3} = 21 \quad \text{已出現：1, 8, 9} \quad \text{尚餘：2, 3, 4, 5, 6, 7}$$

$$\triangle \text{左側：} 1 + 8 = 9 \quad \triangle \text{右側：} 1 + 9 = 10 \quad \triangle \text{下側：} 9 + 8 = 17$$

$$21 - 9 = 12 \quad 21 - 10 = 11 \quad 21 - 17 = 4$$

$$12 \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases} \quad 11? \quad 4?$$



(12)三頂點 2, 3, 4

$$\text{三頂點和} = 2 + 3 + 4 = 9$$

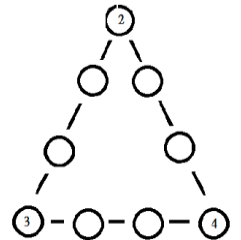
$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 9}{3} = 18 \quad \text{已出現：2, 3, 4} \quad \text{尚餘：1, 5, 6, 7, 8, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 2 + 3 = 5 \quad \triangle \text{右側：} 2 + 4 = 6 \quad \triangle \text{下側：} 3 + 4 = 7$$

$$18 - 5 = 13 \quad 18 - 6 = 12 \quad 18 - 7 = 11$$

$$13 \begin{cases} 6 \\ 7 \end{cases} \quad 12? \quad 11?$$



(13)三頂點 2, 4, 6

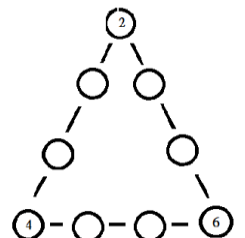
$$\text{三頂點和} = 2 + 4 + 6 = 12$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 12}{3} = 19 \quad \text{已出現：2, 4, 6} \quad \text{尚餘：1, 3, 5, 7, 8, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 2 + 4 = 6 \quad \triangle \text{右側：} 2 + 6 = 8 \quad \triangle \text{下側：} 6 + 4 = 10$$

$$19 - 6 = 13 \quad 19 - 8 = 11 \quad 19 - 10 = 9$$



$$13 \begin{cases} 5 \\ 8 \end{cases}$$

11?

9?

成功 (14) 三頂點 3, 7, 8

$$\text{三頂點和} = 3 + 7 + 8 = 18$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 18}{3} = 21 \quad \text{已出現} : 3, 7, 8 \quad \text{尚餘} : 1, 2, 4, 5, 6, 9$$

$$\triangle \text{左側} : 3 + 7 = 10 \quad \triangle \text{右側} : 3 + 8 = 11 \quad \triangle \text{下側} : 7 + 8 = 15$$

$$21 - 10 = 11$$

$$21 - 11 = 10$$

$$21 - 15 = 6$$

$$11 \begin{cases} 5 \\ 6 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

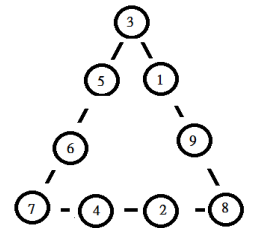
$$6 \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

或

$$11 \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$



(15) 三頂點 2, 4, 9

$$\text{三頂點和} = 2 + 4 + 9 = 15$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 15}{3} = 20 \quad \text{已出現} : 2, 4, 9 \quad \text{尚餘} : 1, 3, 5, 6, 7, 8$$

$$\triangle \text{左側} : 2 + 4 = 6 \quad \triangle \text{右側} : 2 + 9 = 11 \quad \triangle \text{下側} : 9 + 4 = 13$$

$$20 - 6 = 14$$

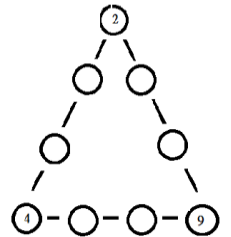
$$20 - 11 = 9$$

$$20 - 13 = 7$$

$$14 \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases}$$

9?

7



(16) 三頂點 2, 6, 7

$$\text{三頂點和} = 2 + 6 + 7 = 15$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 15}{3} = 20 \quad \text{已出現} : 2, 6, 7 \quad \text{尚餘} : 1, 3, 4, 5, 8, 9$$

$$\triangle\text{左側} : 2+4=6$$

$$\triangle\text{右側} : 2+9=11$$

$$\triangle\text{下側} : 9+4=13$$

$$20-6=14$$

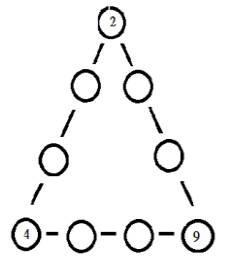
$$20-11=9$$

$$20-13=7$$

$$14 \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases}$$

$$9?$$

$$7?$$



(17)三頂點 2, 7, 9

$$\text{三頂點和} = 2+7+9=18$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+18}{3} = 21$$

已出現：2, 7, 9

尚餘：1, 3, 4, 5, 6, 8

$$\triangle\text{左側} : 2+7=9$$

$$\triangle\text{右側} : 2+9=11$$

$$\triangle\text{下側} : 7+9=16$$

$$21-9=12$$

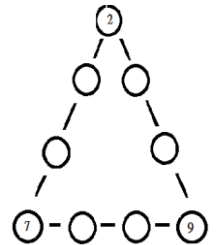
$$21-11=10$$

$$21-16=5$$

$$12 \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$$

$$10?$$

$$5?$$



(18)三頂點 3, 4, 5

$$\text{三頂點和} = 3+4+5=12$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+12}{3} = 19$$

已出現：3, 4, 5

尚餘：1, 2, 6, 7, 8, 9

$$\triangle\text{左側} : 3+4=7$$

$$\triangle\text{右側} : 3+5=8$$

$$\triangle\text{下側} : 4+5=9$$

$$19-7=12$$

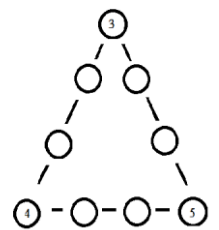
$$19-8=11$$

$$19-9=10$$

$$12?$$

$$11 \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases}$$

$$10?$$



(19)三頂點 3, 4, 8

$$\text{三頂點和} = 3+4+8=15$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+15}{3} = 20$$

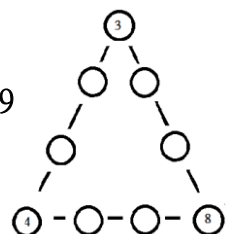
已出現：3, 4, 8

尚餘：1, 2, 5, 6, 7, 9

$$\triangle\text{左側} : 3+4=7$$

$$\triangle\text{右側} : 3+8=11$$

$$\triangle\text{下側} : 4+8=13$$



$$20-7=13$$

13?

$$20-11=9$$

$$9 \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases}$$

$$20-13=7$$

$$7 \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$$

(20)三頂點 4, 5, 9

$$\text{三頂點和} = 4 + 5 + 9 = 18$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+18}{3} = 21 \quad \text{已出現: } 4, 5, 9 \quad \text{尚餘: } 1, 2, 3, 6, 7, 8$$

$$\triangle \text{左側: } 4+5=9 \quad \triangle \text{右側: } 4+9=13 \quad \triangle \text{下側: } 5+9=14$$

$$21-9=12$$

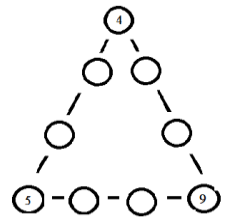
12?

$$21-13=8$$

$$8 \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$$

$$21-14=7$$

7?



(21)三頂點 4, 6, 8

$$\text{三頂點和} = 4 + 6 + 8 = 18$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+18}{3} = 21 \quad \text{已出現: } 4, 6, 8 \quad \text{尚餘: } 1, 2, 3, 5, 7, 9$$

$$\triangle \text{左側: } 4+6=10 \quad \triangle \text{右側: } 4+8=12 \quad \triangle \text{下側: } 6+8=14$$

$$21-10=11$$

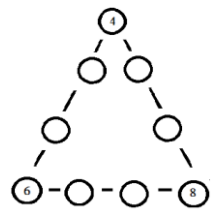
$$11 \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases}$$

$$21-12=9$$

9?

$$21-14=7$$

$$7 \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$



成功

(22)三頂點 3, 6, 9

$$\text{三頂點和} = 3 + 6 + 9 = 18$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+18}{3} = 21 \quad \text{已出現: } 3, 6, 9 \quad \text{尚餘: } 1, 2, 4, 5, 7, 8$$

$$\triangle \text{左側: } 3+6=9 \quad \triangle \text{右側: } 3+9=12 \quad \triangle \text{下側: } 6+9=15$$

$$21-9=12$$

$$21-12=9$$

$$21-15=6$$

$$12 \begin{cases} 5 \\ 7 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$$

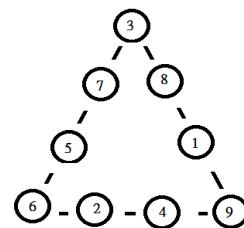
$$6 \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

或

$$12 \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$



成功 (23)三頂點 7, 8, 9

$$\text{三頂點和} = 7 + 8 + 9 = 24$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 24}{3} = 23 \quad \text{已出現} : 7, 8, 9 \quad \text{尚餘} : 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$\triangle \text{左側} : 7 + 9 = 16 \quad \triangle \text{右側} : 8 + 9 = 17 \quad \triangle \text{下側} : 7 + 8 = 15$$

$$23 - 16 = 7$$

$$23 - 17 = 6$$

$$23 - 15 = 8$$

$$7 \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$

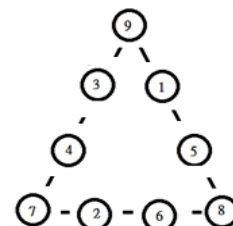
$$8 \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases}$$

或

$$7 \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 3 \\ 5 \end{cases}$$



(24)三頂點 4, 8, 9

$$\text{三頂點和} = 4 + 8 + 9 = 21$$

$$S_9 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45 + 21}{3} = 22 \quad \text{已出現} : 4, 8, 9 \quad \text{尚餘} : 1, 2, 3, 5, 6, 7$$

$$\triangle \text{左側} : 4 + 8 = 9 \quad \triangle \text{右側} : 4 + 9 = 13 \quad \triangle \text{下側} : 8 + 9 = 17$$

$$22 - 9 = 13$$

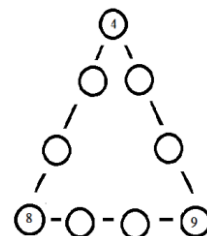
$$22 - 13 = 9$$

$$22 - 17 = 5$$

$$13 \begin{cases} 7 \\ 6 \end{cases}$$

$$9 ?$$

$$5 \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases}$$



(25)三頂點 5, 6, 7

$$\text{三頂點和} = 5 + 6 + 7 = 18$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+18}{3} = 21$$

已出現：5, 6, 7

尚餘：1, 2, 3, 5, 8, 9

$$\triangle\text{左側} : 5+6=11$$

$$\triangle\text{右側} : 5+7=12$$

$$\triangle\text{下側} : 6+7=13$$

$$21-11=10$$

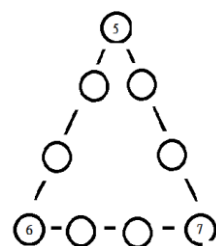
$$21-12=9$$

$$21-13=8$$

10?

$$9 \begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$



成功 (26) 三頂點 1, 5, 9

$$\text{三頂點和} = 1+5+9=15$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+15}{3} = 20$$

已出現：1, 5, 9

尚餘：2, 3, 4, 6, 7, 8

$$\triangle\text{左側} : 1+5=6$$

$$\triangle\text{右側} : 1+9=10$$

$$\triangle\text{下側} : 5+9=14$$

$$20-6=14$$

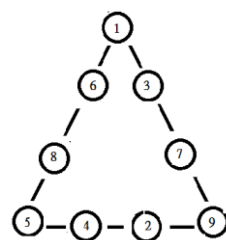
$$20-10=10$$

$$20-14=6$$

$$14 \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 3 \\ 7 \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$



(27) 三頂點 5, 7, 9

$$\text{三頂點和} = 5+7+9=21$$

$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+21}{3} = 22$$

已出現：5, 7, 9

尚餘：1, 2, 3, 4, 6, 8

$$\triangle\text{左側} : 5+7=12$$

$$\triangle\text{右側} : 5+9=14$$

$$\triangle\text{下側} : 7+9=16$$

$$22-12=10$$

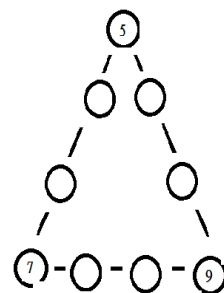
$$22-14=8$$

$$22-16=6$$

$$10 \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$$

8?

6?



(28) 三頂點 6, 7, 8

$$\text{三頂點和} = 6+7+8=21$$

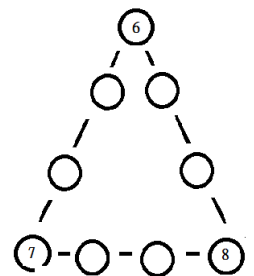
$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+21}{3} = 22 \quad \text{已出現：6, 7, 8} \quad \text{尚餘：1, 2, 3, 4, 5, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 6+7=13 \quad \triangle \text{右側：} 6+8=14 \quad \triangle \text{下側：} 7+8=15$$

$$22-13=9 \quad 22-14=8 \quad 22-15=7$$

$$9 \begin{cases} 4 \\ 5 \end{cases} \quad 8? \quad 7?$$



成功 (29) 三頂點 3, 5, 7

$$\text{三頂點和} = 3+5+7=15$$

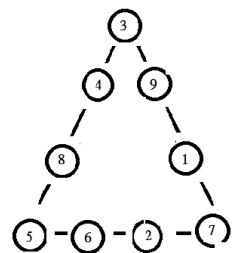
$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+15}{3} = 20 \quad \text{已出現：3, 5, 7} \quad \text{尚餘：1, 2, 4, 6, 8, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 3+5=8 \quad \triangle \text{右側：} 3+7=10 \quad \triangle \text{下側：} 5+7=12$$

$$20-8=12 \quad 20-10=10 \quad 20-12=8$$

$$12 \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases} \quad 10 \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases} \quad 8 \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases}$$



(30) 三頂點 1, 3, 5

$$\text{三頂點和} = 1+3+5=9$$

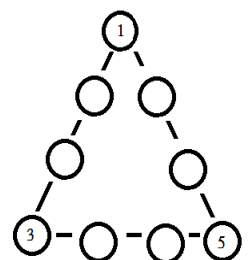
$$S_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9 = \frac{9(1+9)}{2} = 45$$

$$\text{側邊和} = \frac{45+9}{3} = 18 \quad \text{已出現：1, 3, 5} \quad \text{尚餘：2, 4, 6, 7, 8, 9}$$

$$\triangle \text{左側：} 1+3=4 \quad \triangle \text{右側：} 1+5=6 \quad \triangle \text{下側：} 3+5=8$$

$$18-4=14 \quad 18-6=12 \quad 18-8=10$$

$$14 \begin{cases} 6 \\ 8 \end{cases} \quad 12? \quad 10?$$



※小結：(1)可找到每側個數為 4 的空心正三角形之三側相等和的填入法。

(2)30 組中只有 10 組(1, 2, 3)&(4, 5, 6)&(7, 8, 9)&(2, 5, 8)&(1, 4, 7)&

(1, 5, 9)&(3, 5, 7)&(3, 7, 8)&(3, 6, 9)&(2, 3, 7)成功，另 20 個其三頂點的和雖是 3 的倍數，但卻無法成功。

接著我們探討 1~12，此時每側須擺放 5 個數字。在找到任一個可行的三頂點後，繼續考慮每側的中間 3 數，發現困難度增加了：

四、側邊為五個數字的研究：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 十二個數字

同樣的爲了討論完整，故將 1~12 數分爲三類：

$$3n+1(1, 4, 7, 10); 3n+2(2, 5, 8, 11); 3n(3, 6, 9, 12)$$

故滿足三頂點和爲 3 的倍數的填入法共有

$$C(4, 1) \times C(4, 1) \times C(4, 1) + C(4, 3) + C(4, 3) + C(4, 3) \\ = (4 \times 4 \times 4) + 4 + 4 + 4 = 76 \text{ 種組合方式。}$$

於是我們將三頂點和不是 3 的倍數剔除後，對剩餘的 76 組去作探究。

成功 (1) 三頂點 1, 2, 3

$$\text{三頂點的和} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$S_{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$$

$$\text{側邊和} = \frac{78+6}{3} = 28 \quad \text{已出現：1, 2, 3} \quad \text{尚餘：4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}$$

$$\triangle \text{左側：} 1+2=3 \quad \triangle \text{右側：} 1+3=4 \quad \triangle \text{下側：} 2+3=5$$

$$28 - 3 = 25$$

$$28 - 4 = 24$$

$$28 - 5 = 23$$

$$25 \left\{ \begin{array}{l} 14 \\ 11 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 8 \end{array} \right.$$

$$24 \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 12 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 7 \end{array} \right.$$

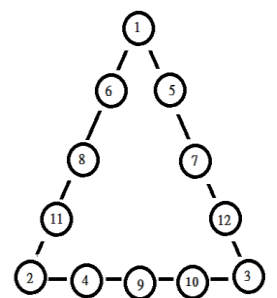
$$23 \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 10 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 9 \end{array} \right.$$

或

$$25 \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 12 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 9 \end{array} \right.$$

$$24 \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 11 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 6 \end{array} \right.$$

$$23 \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 10 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ 5 \end{array} \right.$$



成功 (2) 三頂點 2, 3, 4

$$\text{三頂點的和} = 2 + 3 + 4 = 9$$

$$S_{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$$

側邊和 = $\frac{78+9}{3} = 29$ 已出現 2, 3, 4 尚餘: 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

△左側: $2+3=5$ △右側: $2+4=6$ △下側: $3+4=7$

$$29 - 5 = 24$$

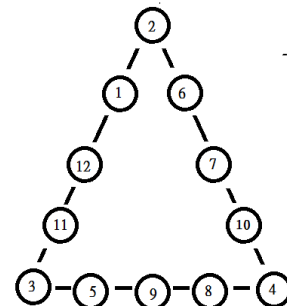
$$29 - 6 = 23$$

$$29 - 7 = 22$$

$$24 \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array}$$

$$23 \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6 \\ 7 \end{array}$$

$$22 \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \\ 8 \end{array}$$



或

$$24 \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \\ 7 \end{array}$$

$$21 \left\{ \begin{array}{l} 14 \\ 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 8 \\ 6 \end{array}$$

$$22 \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 \\ 10 \end{array}$$

成功 (3) 三頂點 1, 7, 10

三頂點的和 = $1 + 7 + 10 = 18$

$$S_{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$$

側邊和 = $\frac{78+18}{3} = 32$ 已出現 1, 7, 10 尚餘: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12

△左側: $1+7=8$ △右側: $1+10=11$ △下側: $7+10=17$

$$32 - 8 = 24$$

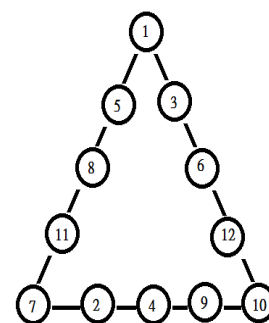
$$32 - 11 = 21$$

$$32 - 17 = 15$$

$$24 \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 5 \\ 8 \end{array}$$

$$21 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \\ 6 \end{array}$$

$$15 \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array}$$



或

$$24 \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 9 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 11 \\ 4 \end{array}$$

$$21 \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \\ 6 \end{array}$$

$$15 \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 8 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array}$$

成功 (4) 三頂點 2, 8, 11

三頂點的和 = $2 + 8 + 11 = 21$

$$S_{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$$

側邊和 = $\frac{78+21}{3} = 33$ 已出現：2, 8, 11 尚餘：1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12

△左側：2+8=10

△右側：2+11=13

△下側：8+11=19

33-10=23

33-13=20

33-19=14

$$23 \begin{cases} 11 \\ 5 \\ 6 \\ 12 \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} 10 \\ 3 \\ 7 \\ 10 \end{cases}$$

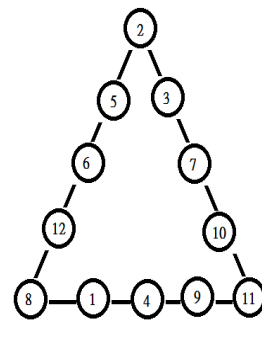
$$14 \begin{cases} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{cases}$$

或

$$23 \begin{cases} 13 \\ 9 \\ 4 \\ 10 \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} 8 \\ 1 \\ 7 \\ 12 \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} 9 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \end{cases}$$



成功 (5) 三頂點 3, 5, 10

三頂點的和 = 3+5+10=18

$S_{12} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$

側邊和 = $\frac{78+18}{3} = 32$ 已出現：3, 5, 10 尚餘：1, 2, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12

△左側：3+5=8

△右側：3+10=13

△下側：5+10=15

32-8=24

32-13=19

32-15=17

$$24 \begin{cases} 12 \\ 1 \\ 11 \\ 12 \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} 10 \\ 4 \\ 6 \\ 9 \end{cases}$$

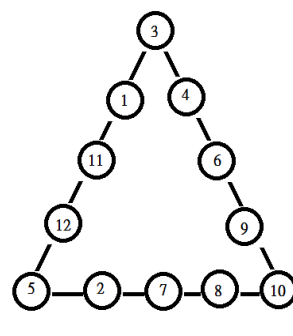
$$17 \begin{cases} 9 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{cases}$$

或

$$24 \begin{cases} 13 \\ 4 \\ 9 \\ 11 \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} 7 \\ 1 \\ 6 \\ 12 \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} 9 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{cases}$$



成功 (6) 三頂點 4, 8, 12

三頂點的和 = 4+8+12=24

$S_{12} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$

側邊和 = $\frac{78+24}{3} = 34$ 已出現：4, 8, 12 尚餘：1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11

$$\triangle\text{左側} : 4+8=12$$

$$\triangle\text{右側} : 4+12=16$$

$$\triangle\text{下側} : 8+12=20$$

$$34-12=22$$

$$34-16=18$$

$$34-20=14$$

$$22 \begin{cases} 11 \\ 11 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 10 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} 9 \\ 9 \end{cases} \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$$

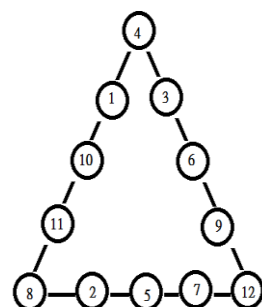
$$14 \begin{cases} 7 \\ 7 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

或

$$22 \begin{cases} 11 \\ 11 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 9 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} 8 \\ 8 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 7 \\ 10 \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$$



成功 (7) 三頂點 5, 6, 7

$$\text{三頂點的和} = 5+6+7=18$$

$$S_{12} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$$

$$\text{側邊和} = \frac{78+18}{3} = 32 \quad \text{已出現} : 5, 6, 7 \quad \text{餘} : 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10, 11, 12$$

$$\triangle\text{左側} : 5+6=11$$

$$\triangle\text{右側} : 5+7=12$$

$$\triangle\text{下側} : 6+7=13$$

$$32-11=21$$

$$32-12=20$$

$$32-13=19$$

$$21 \begin{cases} 10 \\ 11 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 9 \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} 10 \\ 10 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 8 \end{cases}$$

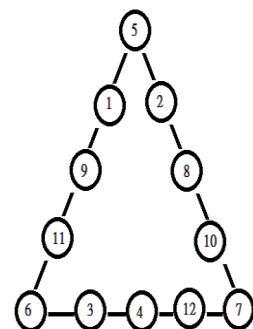
$$19 \begin{cases} 7 \\ 7 \end{cases} \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 12 \end{cases}$$

或

$$21 \begin{cases} 12 \\ 9 \end{cases} \begin{cases} 8 \\ 4 \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} 11 \\ 9 \end{cases} \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} 11 \\ 8 \end{cases} \begin{cases} 9 \\ 2 \end{cases}$$



成功 (8) 三頂點 6, 10, 11

$$\text{三頂點的和} = 6+10+11=27$$

$$S_{12} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$$

$$\text{側邊和} = \frac{78+27}{3} = 35 \quad \text{已出現} : 6, 10, 11 \quad \text{尚餘} : 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 12$$

$$\triangle\text{左側} : 6+10=16$$

$$\triangle\text{右側} : 6+11=17$$

$$\triangle\text{下側} : 10+11=21$$

$$35-16=19$$

$$35-17=18$$

$$35-21=14$$

$$19 \begin{cases} 7 \\ 12 \end{cases} \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} 9 \\ 9 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 8 \end{cases}$$

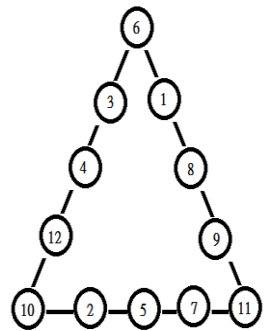
$$14 \begin{cases} 7 \\ 7 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

或

$$19 \begin{cases} 11 \\ 8 \end{cases} \begin{cases} 9 \\ 2 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} 6 \\ 12 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} 9 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 7 \end{cases}$$



成功 (9)三頂點 7, 9, 11

$$\text{三頂點的和} = 7+9+11=27$$

$$S_{12} = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12 = \frac{12(1+12)}{2} = 78$$

$$\text{側邊和} = \frac{78+27}{3} = 35 \quad \text{已出現: } 7, 9, 11 \quad \text{尚餘: } 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$$

$$\triangle\text{左側} : 7+9=16$$

$$\triangle\text{右側} : 7+11=18$$

$$\triangle\text{下側} : 9+11=20$$

$$35-16=19$$

$$35-18=17$$

$$35-20=15$$

$$19 \begin{cases} 7 \\ 12 \end{cases} \begin{cases} 1 \\ 6 \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} 7 \\ 10 \end{cases} \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

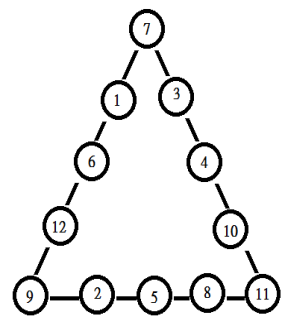
$$15 \begin{cases} 7 \\ 8 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}$$

或

$$19 \begin{cases} 9 \\ 10 \end{cases} \begin{cases} 3 \\ 6 \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} 12 \\ 5 \end{cases} \begin{cases} 4 \\ 8 \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} 3 \\ 12 \end{cases} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$



研究了 9 組填入 1~12 的數後，我們發現空心三角形每一側的個數不是奇數就是偶數，所以

只要先選擇『1~6』或『1~9』的基模後，剩餘的數利用等差數列的方法，就可以找到讓 1~12、

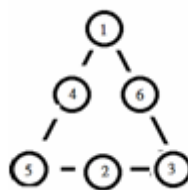
1~15、1~18、1~21……每一側的和相等填入法。

驗證：一、每側個數為奇數時，搭配『1~6』的任一基模，『1~6』的基模有四種型態：

(1)



(2)



(3)



(4)



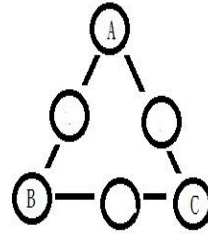
※基模填入方法：

若 $A < B < C$, $d < e < f$ (小對小，中對中，大對大)

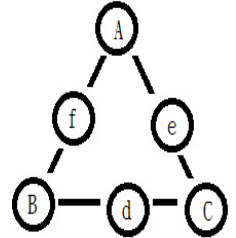
步驟 1：頂點處填入 ABC 三數，如(圖一)

步驟 2：

頂點	A	B	C
對邊	d	e	f



(圖一)



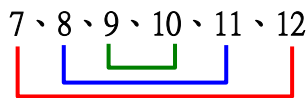
(圖二)

<例>填入 1~12，使其每側和均相等

步驟 1： $12 \div 3 + 1 = 5$ \Rightarrow 每側 5 個數 \Rightarrow 奇數

步驟 2：利用基模(1)，以 1、2、3 為頂點，填入 6 數，如(圖一)

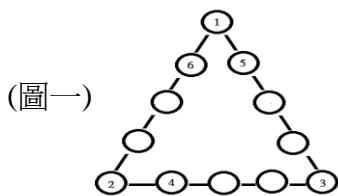
步驟 3：接著將剩餘的數字 7、8、9、10、11、12 利用等差數列



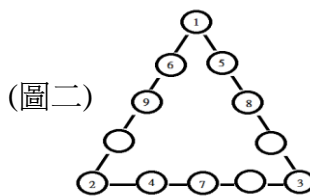
分成 3 組(7、12)、(8、11)、(9、10)因為此 3 組數字和相同

步驟 4：先任意填入前 3 個數字 7、8、9 如(圖二)

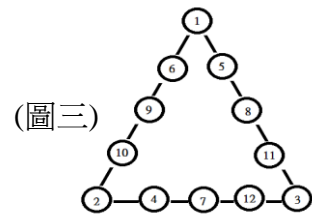
步驟 5：接著將組合的另一個數字填入，則每邊和皆相同(圖三)



(圖一)

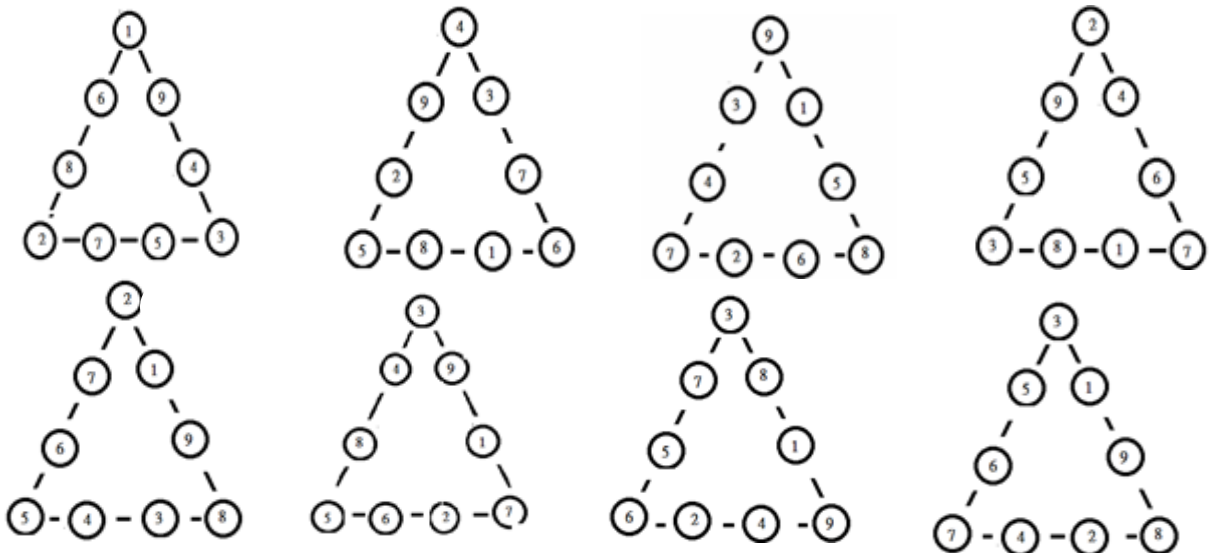


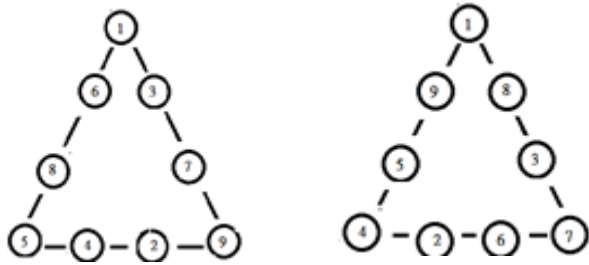
(圖二)



(圖三)

二、每側個數為偶數時，搭配『1~9』的任一基模，『1~9』的基模有十種形態：



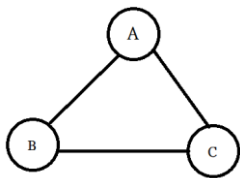


※基模填入方法：可區分為三種方法：

(1)頂點為 (1、2、3) (4、5、6) (7、8、9) (3、5、7)

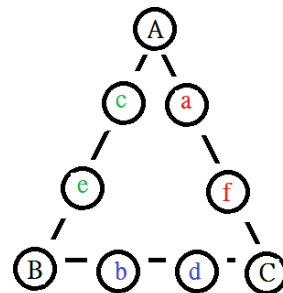
若三頂點為 A、B、C，且 $A < B < C$

①頂點處填入 ABC 三數，其餘數按順序由小排到大 $\Rightarrow a、b、c、d、e、f$



②剩餘數 a、b、c、d、e、f

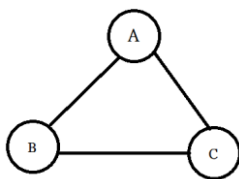
頂點	A	B	C
對邊	b、d	a、f	c、e



(2) 頂點為 (2、3、7) (1、4、7) (2、5、8) (3、7、8) (3、6、9)

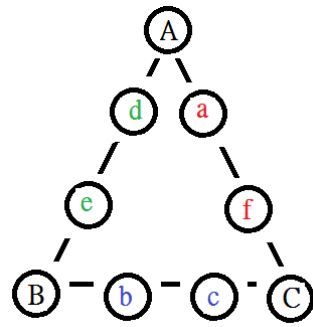
若三頂點為 A、B、C，且 $A < B < C$

①頂點處填入 ABC 三數，其餘數按順序由小排到大 $\Rightarrow a、b、c、d、e、f$



②剩餘數 a、b、c、d、e、f

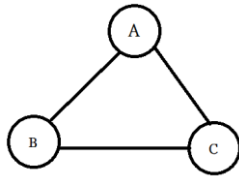
頂點	A	B	C
對邊	b、c	a、f	d、e



(3) 頂點為 (1、5、9)

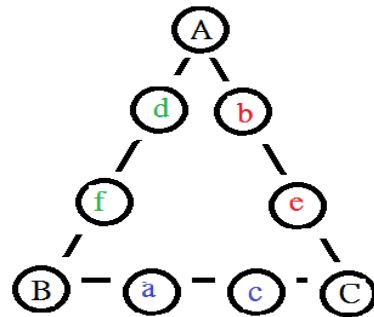
若三頂點為 A、B、C，且 $A < B < C$

①頂點處填入 ABC 三數，其餘數按順序由小排到大 \Rightarrow a、b、c、d、e、f



②剩餘數 a、b、c、d、e、f

頂點	A	B	C
對邊	a、c	b、e	d、f



<例> 填入 1~15，使其每側和均相等

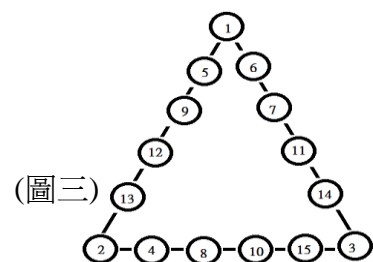
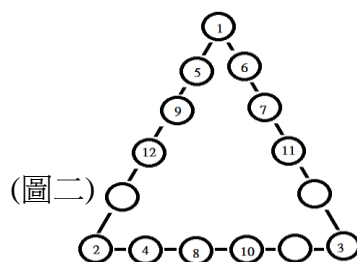
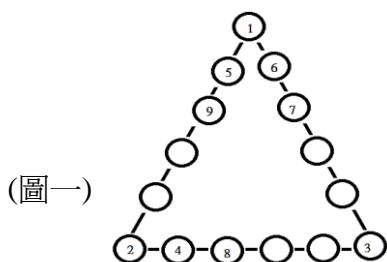
步驟 1： $15 \div 3 + 1 = 6 \Rightarrow$ 每側 6 個數 \Rightarrow 偶數

步驟 2： 利用基模(1)，以頂點為 1、2、3 填入 9 數，如(圖一)

步驟 3： 接著將剩餘的數字 10、11、12、13、14、15 利用等差數列分成 3 組(10、15)、(11、14)、(12、13)因為此 3 組數字和相同

步驟 4： 先任意填入前 3 個數字 10、11、12 如(圖二)

步驟 5： 接著將組合的另一個數字填入則每邊和皆相同(圖三)



※小結：若 1、2、3、……、n 可排成一個空心的正三角形時，

1、先分析每側的個數是奇數還是偶數：每側的個數算法是 $n \div 3 + 1$

<例>：1~18 $\Rightarrow (18 \div 3) + 1 = 7 \Leftrightarrow$ 奇數

2、接著判斷其為奇數還是偶數，若奇數個就以『1~6』為基模，偶數個就以『1~9』為基模套入，其餘的數利用等差數列的方法，以連續每 6 個數為一組去合成，同組放同側，分別填入即可。

後來我們又想，連續數如果不是從 1 開始，它是從 2、從 3 或從 20...開始，是否可套此模式呢？於是我們繼續嘗試：

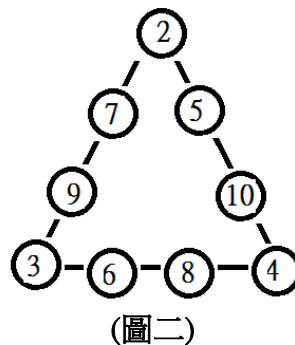
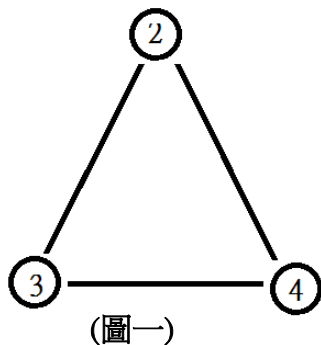
(1)2~10:

步驟一：2~10 共 9 個數， $9 \div 3 + 1 = 4$ (偶數) \therefore 用『1~9』基模(1)

步驟二：先放入 2、3、4，如(圖一)

步驟三：剩餘數 5、6、7、8、9、10

步驟四：2 的對面放 6、8；3 的對面放 5、10；4 的對面放 7、9，成立如(圖二)



(2)20~31:

步驟一：20~31 共 12 個數， $12 \div 3 + 1 = 5$ (奇數) \therefore 用『1~6』基模

步驟二：先放入 20、21、22，如(圖一)

步驟三：剩餘數 23、24、25、26、27、28、29、30、31，先取(23、24、25)

步驟四：20 的對面放 23；21 的對面放 24；22 的對面放 25，如(圖二)

步驟五：接著將剩餘的數字 26、27、28、29、30、31 利用等差數列

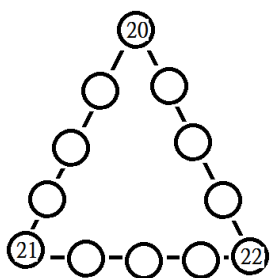
26、27、28、29、30、31



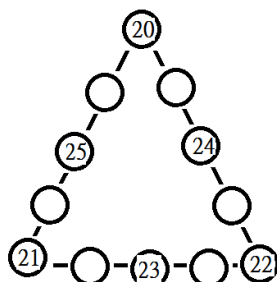
分成 3 組(26、31)、(27、30)、(28、29)因為此 3 組數字和相同

步驟六：先任意填入前 3 個數字 26、27、28 如(圖三)

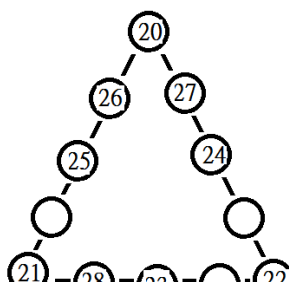
步驟七：接著將組合的另一個數字填入則每邊和皆相同(圖四)



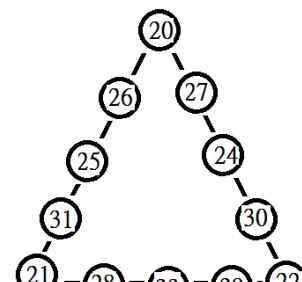
(圖一)



(圖二)



(圖三)



(圖四)

能驗證到此結果也是我們額外的收穫。

※小結：填入的三頂點數無需從 1 開始，只要是連續 $3n$ ($n > 1$) 個整數，必可找到每側和均相等的填入法。

陸、研究結果

一、將 $1 \sim n$ 填入正空心三角形，其每側的個數為末項(n)除以 3 加 1 \Rightarrow 每側個數 = $(n \div 3) + 1$

【例】：放入 $1 \sim 24$ ，每側個數有 $(24 \div 3) + 1 = 9$ 個

二、每一側邊的和 $R = \frac{S_n + \text{三頂點和}}{3}$ 。 $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

【如】 $1 \sim 18$ 中，三頂點為 1, 2, 3 時

$$S_{18} = 1 + 2 + 3 + \dots + 18 = 171 \quad \text{三頂點和} = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\therefore \text{每側和} = \frac{171 + 6}{3} = 59$$

三、要得到正空心三角形，三個頂點的和必須是 3 的倍數。但 $1 \sim 6$ 及 $1 \sim 9$ 中，有些特例無法成功；從 $1 \sim 12$ 以後，必可成功。

【例】： $1, 3, 5$ & $1, 2, 9$ & $2, 4, 9$ & \dots ，和雖為 3 的倍數但卻失敗。

四、除 3 頂點外，每側中間數的擺入，在判斷完每側的個數後，奇數個以『 $1 \sim 6$ 』為基模，偶

數個以『1~9』為基模套入，其餘的數利用等差數列的方法，以連續每6個數為一組去合成，同組放同側，填入即可成功。

柒、問題與討論

一、要如何才能排成一個空心的正三角形？

答：只要擺入 1、2、3、……、n 個連續整數，其末位數 $n=3m$ 即可。

二、若連續 1、2、3、……、n 可排成一個空心的正三角形，如何知道其每側個數？

答：每側的個數都是 n 除以 3 加 1。

三、如何求出空心正三角形其每側的數字和？

答：每側和 $R = \frac{S_n + \text{三頂點和}}{3}$

四、是不是只要三個頂點和是 3 的倍數就一定可以列出三側和相等的空心正三角形？

答：根據實驗結果，1~6、1~9 這兩組會有例外，從 1~12 起均成立。

五、預使空心的正三角形其每側個數和相等，除考慮三頂點外，其他中間數的取捨是否有規律性？

答：基本上這些中間數可以利用『數』的分解、或利用「基模」來考慮，會找到成立的條件。

六、如何快速完成每側的個數和相等？

答：先算出每側的個數，若奇數個則利用『1~6』的基模；偶數個則利用『1~9』的基模，剩餘的各數依序每 6 個一組，利用等差數列方法分組配對即可完成。

七、是不是每次填入一定要從 1 開始，才能滿足三側和相等？

答：填入的三頂點數無需從 1 開始，只要是連續 $3n$ ($n > 1$) 個整數，必可找到每側和均相等的填入法。【例】：2~7，2~10，3~17……。

捌、結論

一、將 1~n 填入三角形三側，每側的個數有 $(n \div 3) + 1$ 個

二、從 1~n，每一側邊的和 $R = \frac{S_n + \text{三頂點和}}{3}$ 。

三、12 個以上且末項為 3 的倍數的連續整數(從 1 開始)，我們可以搭配『1~6』基模或『1~9』基模，找到讓空心三角形的三邊和相等的填法。

四、研究發現，填入連續 $3m(m>1)$ 個整數(不一定從 1 開始的連續整數)於空心正三角形的三側，均可找到使空心正三角形的三側和相等的填法。

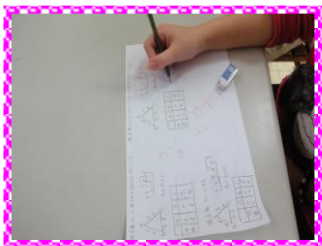
五、從 1~12 後(包含 1~12)，只要 3 頂點和為 3 的倍數，都可找到使每側和相等的填法。

玖、參展心得與活動花絮

這次的科展使我們受益良多，因為，藉由此科展我們發現彼此之間有種團結的精神等……雖然我們在討論的過程中有遇到一些挫折及爭執，但失敗為成功之母，我們每一次的挫折使我們彼此間的想法又近了一步。回想起那時我們付出了無數個假日、犧牲了無數個午睡時間，三個志同道合的人全心全意想找出結論，果然，黃天不負苦心人，我們終於找出了數字間的關係，而在找出關係的當下，三個人雀躍不已。我們也期盼能繼續挑戰困難度更高的空心正三角形。

俗話說:一分耕耘一分收穫，正因我們都對這次的科展付出了許多心血，所以才能完成這次的科展。此外，我們能找出其中的關係也要感謝有老師們的幫助！每當我們迷失方向時，老師就像燈塔似地為我們指引方向，好讓我們不再迷惘……由衷的感謝這次幫助過我們的老師。

活 動 花 絮



動筆計算，驗證有無



一起討論，尋找規律性



手稿資料



彙整資料~~討論