

宜蘭縣第 51 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：國中組

作品名稱：**您不知的語言**

關 鍵 詞：密碼、進位制、費氏數列



編 號：

目 錄

| | |
|----------------|----|
| 摘要..... | 1 |
| 壹、研究動機..... | 2 |
| 貳、研究目的..... | 2 |
| 參、研究設備及器材..... | 2 |
| 肆、研究過程或方法..... | 2 |
| 伍、研究結果..... | 3 |
| 陸、討論..... | 10 |
| 柒、結論..... | 13 |
| 捌、應用..... | 13 |
| 玖、參考資料..... | 17 |

摘要

本研究是利用十進位、九進位、八進位、七進位、六進位、五進位、四進位、三進位與二進位等不同的進位制做簡易的加法運算，再配合國中數學翰林版第四冊第一章數列與級數所提到的費氏數列等概念，設計出不為人知的注音符號密碼表、英文字母密碼表及不怕別人看到的提款卡密碼。

您不知的語言

壹、研究動機

剛上課時，同學間難免會吵鬧，把風的同學總會說「老師來了！」但又不能被老師發現，於是想到利用暗號，來表示生活中不便說出口的話。我們嘗試用數字及簡單的運算規則，再搭配第四冊學過的費氏數列等概念來創造別人不知的語言，接著我們請教數學老師一些相關問題，就此展開我們的研究。

貳、研究目的

- 一、創造密碼語言取代不方便直接說出口的話語。例如：“我喜歡你”這種較直接的話。
- 二、創造不怕別人看到的提款卡密碼。

參、研究設備及器材

紙、筆、三顆聰明的小腦袋

肆、研究過程或方法

- 一、先算出 $0+1=1$ 、 $1+1=2$ 、 $1+2=3$ ，依序算下去，如果算出的結果是兩位數時，就將十位數字刪除，僅保留個位數字，舉例：「 $5+7=12$ 」就只取個位數 2，依此類推，例如：「 $0+1=1$ 、 $1+1=2$ 、 $1+2=3$ 、 $2+3=5$ 、 $3+5=8$ 、 $5+8=3$ 、 $8+3=1$ 、.....」，最後會再次回到 $0+1=1$ ，進一步把這組數寫成：「 $0+1+1+2+3+5+8+3+\cdots+0+1$ 」，將這些數稱爲一組「十進位循環鍊」。我們用以下的式子表示： $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots + A_n$ ，當中 $A_k + A_{k+1} = A_{k+2}$ ， $k=1, 2, 3, 4, \dots$ （費氏數列）， A_k 、 A_{k+1} 爲 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的任一數。 A_{k+2} 只看個位數字，十位數字去掉（有十位數字時）。接著依序再算 $0+2$ 、 $0+3$ 、.....、 $0+9$ 、 $1+0$ 、 $1+1$一直算到 $9+9$ 爲止，總共有 99 組。

二、九進位

九進位（0、1、2、3、4、5、6、7、8、10、11、.....），仿照十進位的作法，仍舊以 $0+1=1$ 開始加，依序算下去，算到超過 9 的數，以那個數字去減 9，如果等於 9，則寫成 0。例

如：「 $0+1=1$ 、 $1+1=2$ 、 $1+2=3$ 、 $2+3=5$ 、 $3+5=8$ 、 $5+8=4$」，最後會再次回到 $0+1=1$ 」，進一步把這組數寫成：「 $0+1+1+2+3+5+8+4+\cdots+0+1$ 」，將這些數稱為「九進位循環鍊」。接著依序再算 $0+2$ 、 $0+3$ 、.....、 $0+8$ 、 $1+0$ 、 $1+1$一直算到 $8+8$ 為止，總共有 80 組。

三、依序再算出八進位、七進位、六進位、五進位、四進位、三進位、二進位之循環鍊。

伍、研究結果

一、十進位

(一)共有 0 、 1 、 2 、 3 、 4 、 5 、 6 、 7 、 8 、 9 這些數在相加，相加等於 10 的數變成 0 ，如果相加超過 10 的數，就把那個數減 10 ，即為我們要的數字。

(二)討論 $0+1$ 開始至 $9+9$ 開始，共 99 組。

(三)「十進位 60 循環鍊」

1. $0+1$ 開始的如下所示：

$0+1+1+2+3+5+8+3+1+4+5+9+4+3+7+0+7+7+4+1+5+6+1+7+8+5+3+8+1+9+0+9+9+8+7+5+2+7+9+6+5+1+6+7+3+0+3+3+6+9+5+4+9+3+2+5+7+2+9+1+0+1$ 共有 60 個數在循環，所以稱為「十進位 60 循環鍊」。

2.發現以 $0+3$ 、 $0+7$ 、 $0+9$ 、 $1+0$ 、 $1+1$ 、 $1+2$ 、 $1+4$ 、 $1+5$ 、 $1+6$ 、 $0+7$ 、 $1+9$ 、 $2+3$ 、 $2+5$ 、 $2+7$ 、 $2+9$ 、 $3+0$ 、 $3+1$ 、 $3+2$ 、 $3+3$ 、 $3+5$ 、 $3+6$ 、 $3+7$ 、 $3+8$ 、 $4+1$ 、 $4+3$ 、 $4+5$ 、 $4+9$ 、 $5+1$ 、 $5+2$ 、 $5+3$ 、 $5+4$ 、 $5+6$ 、 $5+7$ 、 $5+8$ 、 $5+9$ 、 $6+1$ 、 $6+5$ 、 $6+7$ 、 $6+9$ 、 $7+0$ 、 $7+2$ 、 $7+3$ 、 $7+4$ 、 $7+5$ 、 $7+7$ 、 $7+8$ 、 $7+9$ 、 $8+1$ 、 $8+3$ 、 $8+5$ 、 $8+7$ 、 $9+0$ 、 $9+1$ 、 $9+3$ 、 $9+4$ 、 $9+5$ 、 $9+6$ 、 $9+8$ 、 $9+9$ 這 59 組數開始的計算結果與 $0+1$ 開始的循環數字相同，即他們都是「十進位 60 循環鍊」。

3.其實上述 2.所說的那 59 組數與 $0+1$ 這組，剛好就是將 60 循環鍊的 60 個數，相鄰二數為一組，所分出來的 60 組數。

(四)「十進位 20 循環鍊」

1. $0+2$ 開始的如下所示：

$0+2+2+4+6+0+6+6+2+8+0+8+8+6+4+0+4+4+8+2+0+2$ 共有 20 個數字在循環，所以稱為「十進位 20 循環鍊」

2.發現以 $0+4$ 、 $0+6$ 、 $0+8$ 、 $2+0$ 、 $2+2$ 、 $2+4$ 、 $2+8$ 、 $4+0$ 、 $4+4$ 、 $4+6$ 、 $4+8$ 、 $6+0$ 、 $6+2$ 、 $6+4$ 、 $6+6$ 、 $8+0$ 、 $8+2$ 、 $8+6$ 、 $8+8$ 這 19 組數開始的計算結果與 $0+2$ 開始的循環數字相同，即

他們都是「十進位 20 循環鍊」。

3.其實上述 2. 所說的那 19 組數與 $0+2$ 這組，剛好就是將 20 循環鍊的 20 個數，相鄰二數為一組，所分出來的 20 組數。

(五)「十進位 3 循環鍊」

1. $0+5$ 開始的如下所示：

$0+5+5+0+5$ 共有 3 個數字在循環，所以稱為「十進位 3 循環鍊」。

2.發現以 $5+0$ 、 $5+5$ 這 2 組數開始的計算結果與 $0+5$ 開始的循環數字相同，即他們都是「十進位 3 循環鍊」。

3.其實 2. 所說的那 2 組數與 $0+5$ 這組，剛好就是將 3 循環鍊的 3 個數，相鄰二數為一組，所分出來的 3 組數。

(六)「十進位 12 循環鍊」

1. $1+3$ 開始的如下所示：

$1+3+4+7+1+8+9+7+6+3+9+2+1+3$ 共有 12 個數字在循環，所以稱為「十進位 12 循環鍊」。

2.發現以 $1+8$ 、 $2+1$ 、 $3+4$ 、 $3+9$ 、 $4+7$ 、 $6+3$ 、 $7+1$ 、 $7+6$ 、 $8+9$ 、 $9+2$ 、 $9+7$ 這 11 組數開始的計算結果與 $1+3$ 開始的循環數字相同，即他們都是「十進位 12 循環鍊」。

3.其實 2. 所說的那 11 組數與 $1+3$ 這組，剛好就是將 12 循環鍊的 12 個數，相鄰二數為一組，所分出來的 12 組數。

(七)「十進位 4 循環鍊」

1. $2+6$ 開始的如下所示：

$2+6+8+4+2+6$ 共有 4 個數字在循環，所以稱為「十進位 4 循環鍊」。

2.發現以 $4+2$ 、 $6+8$ 、 $8+4$ 這 3 組數開始的計算結果與 $2+6$ 開始的循環數字相同，即他們都是「十進位 4 循環鍊」。

3.其實 2. 所說的那 3 組數與 $2+6$ 這組，剛好就是將 4 循環鍊的 4 個數，相鄰二數為一組，所分出來的 4 組數。

二、九進位

(一)共有 0、1、2、3、4、5、6、7、8 這些數在相加，相加等於 9 的數變成 0，如果相加超過 9 的數，就把那個數減 9，即為我們要的數字。

(二)討論 $0+1$ 開始至 $8+8$ 開始，共 80 組。

(三)「九進位 24 循環鍊」

1. $0+1$ 開始的如下所示：

0+1+1+2+3+5+8+4+3+7+1+8+0+8+8+7+6+4+1+5+6+2+8+1+0+1 共有 24 個數字在循環，所以稱為「九進位 24 循環鍊」。

2.發現以 0+8、1+0、1+1、1+2、1+5、1+8、2+3、2+8、3+5、3+7、4+1、4+3、5+6、5+8、6+2、6+4、7+1、7+6、8+0、8+1、8+4、8+7、8+8 這 23 組數開始的計算結果與 0+1 開始的循環數字相同，即他們都是「九進位 24 循環鍊」。

(四)「九進位 24 循環鍊」

1.0+2 開始的如下所示：

0+2+2+4+6+1+7+8+6+5+2+7+0+7+7+5+3+8+2+1+3+4+7+2+0+2 共有 24 個數字在循環，所以稱為「九進位 24 循環鍊」。

2.發現以 0+7、1+3、1+7、2+0、2+1、2+2、2+4、2+7、3+4、3+8、4+6、4+7、5+2、5+3、6+1、6+5、7+0、7+2、7+5、7+7、7+8、8+2、8+6 這 23 組數開始的計算結果與 0+2 開始的循環數字相同，即他們都是「九進位 24 循環鍊」。

(五)「九進位 8 循環鍊」

1.0+3 開始的如下所示：

0+3+3+6+0+6+6+3+0+3 共有 8 個數字在循環，所以稱為「九進位 8 循環鍊」。

2.發現以 0+6、3+0、3+3、3+6、6+0、6+3、6+6 這 7 組數開始的計算結果與 0+3 開始的循環數字相同，即他們都是「九進位 8 循環鍊」。

(六)「九進位 24 循環鍊」

1.0+4 開始的如下所示：

0+4+4+8+3+2+5+7+3+1+4+5+0+5+5+1+6+7+4+2+6+8+5+4+0+4 共有 24 個數字在循環，所以稱為「九進位 24 循環鍊」。

2.發現以 0+5、1+4、1+6、2+5、2+6、3+1、3+2、4+0、4+2、4+4、4+5、4+8、5+0、5+1、5+4、5+5、5+7、6+7、6+8、7+3、7+4、8+3、8+5 這 23 組數開始的計算結果與 0+4 開始的循環數字相同，即他們都是「九進位 24 循環鍊」。

三、八進位

(一)共有 0、1、2、3、4、5、6、7 這些數在相加，相加等於 8 的數變成 0，如果相加超過 8 的數，就把那個數減 8，即為我們要的數字。

(二)討論 0+1 開始至 7+7 開始，共 63 組。

(三)「八進位 12 循環鍊」

1. $0+1$ 開始的如下所示：

$0+1+1+2+3+5+0+5+5+2+7+1+0+1$ 共有 12 個數字在循環，所以稱為「八進位 12 循環鍊」。

2. 發現以 $0+5$ 、 $1+0$ 、 $1+1$ 、 $1+2$ 、 $2+3$ 、 $2+7$ 、 $3+5$ 、 $5+0$ 、 $5+2$ 、 $5+5$ 、 $7+1$ 這 11 組數開始的計算結果與 $0+1$ 開始的循環數字相同，即他們都是「八進位 12 循環鍊」。

(四)「八進位 6 循環鍊」

1. $0+2$ 開始的如下所示：

$0+2+2+4+6+2+0+2$ 共有 6 個數字在循環，所以稱為「八進位 6 循環鍊」。

2. 發現以 $2+0$ 、 $2+2$ 、 $2+4$ 、 $4+6$ 、 $6+2$ 這 5 組數開始的計算結果與 $0+2$ 開始的循環數字相同，即他們都是「八進位 6 循環鍊」。

(五)「八進位 12 循環鍊」

1. $0+3$ 開始的如下所示：

$0+3+3+6+1+7+0+7+7+6+5+3+0+3$ 共有 12 個數在循環，所以稱為「八進位 12 循環鍊」。

2. 發現以 $0+7$ 、 $1+7$ 、 $3+0$ 、 $3+3$ 、 $3+6$ 、 $5+3$ 、 $6+1$ 、 $6+5$ 、 $7+0$ 、 $7+6$ 、 $7+7$ 這 11 組數開始的計算結果與 $0+3$ 開始的循環數字相同，即他們都是「八進位 12 循環鍊」。

(六)「八進位 3 循環鍊」

1. $0+4$ 開始的如下所示：

$0+4+4+0+4$ 共有 3 個數在循環，所以稱為「八進位 3 循環鍊」。

2. 發現以 $4+0$ 、 $4+4$ 這 2 組數開始的計算結果與 $0+4$ 開始的循環數字相同，即他們都是「八進位 3 循環鍊」。

(七)「八進位 6 循環鍊」

1. $0+6$ 開始的如下所示：

$0+6+6+4+2+6+0+6$ 共有 6 個數在循環，所以稱為「八進位 6 循環鍊」。

2. 發現以 $2+6$ 、 $4+2$ 、 $6+0$ 、 $6+4$ 、 $6+6$ 這 5 組數開始的計算結果與 $0+6$ 開始的循環數字相同，即他們都是「八進位 6 循環鍊」。

(八)「八進位 12 循環鍊」

1. $1+3$ 開始的如下所示：

$1+3+4+7+3+2+5+7+4+3+7+2+1+3$ 共有 12 個數在循環，所以稱為「八進位 12 循環鍊」。

2. 發現以 $2+1$ 、 $2+5$ 、 $3+2$ 、 $3+4$ 、 $3+7$ 、 $4+3$ 、 $4+7$ 、 $5+7$ 、 $7+2$ 、 $7+3$ 、 $7+4$ 這 11 組數開始的計算結果與 $1+3$ 開始的循環數字相同，即他們都是「八進位 12 循環鍊」。

(九)「八進位 12 循環鍊」

1. $1+4$ 開始的如下所示：

$1+4+5+1+6+7+5+4+1+5+6+3+1+4$ 共有 12 個數在循環，所以稱為「八進位 12 循環鍊」。

2. 發現以 $1+5$ 、 $1+6$ 、 $3+1$ 、 $4+1$ 、 $4+5$ 、 $5+1$ 、 $5+4$ 、 $5+6$ 、 $6+3$ 、 $6+7$ 、 $7+5$ 這 11 組數開始的計算結果與 $1+4$ 開始的循環數字相同，即他們都是「八進位 12 循環鍊」。

四、七進位

(一)共有 0、1、2、3、4、5、6 這些數在相加，相加等於 7 的數變成 0，如果相加超過 7 的數，就把那個數減 7，即為我們要的數字。

(二)討論 $0+1$ 開始至 $6+6$ 開始，共 48 組。

(三)「七進位 16 循環鍊」

1. $0+1$ 開始的如下所示：

$0+1+1+2+3+5+1+6+0+6+6+5+4+2+6+1+0+1$ 共有 16 個數在循環，所以稱為「七進位 16 循環鍊」。

2. 發現以 $0+6$ 、 $1+0$ 、 $1+1$ 、 $1+2$ 、 $1+6$ 、 $2+3$ 、 $2+6$ 、 $3+5$ 、 $4+2$ 、 $5+1$ 、 $5+4$ 、 $6+0$ 、 $6+1$ 、 $6+5$ 、 $6+6$ 這 15 組數開始的計算結果與 $0+1$ 開始的循環數字相同，即他們都是「七進位 16 循環鍊」。

(四)「七進位 16 循環鍊」

1. $0+2$ 開始的如下所示：

$0+2+2+4+6+3+2+5+0+5+5+3+1+4+5+2+0+2$ 共有 16 個數在循環，所以稱為「七進位 16 循環鍊」。

2. 發現以 $0+5$ 、 $1+4$ 、 $2+0$ 、 $2+2$ 、 $2+4$ 、 $2+5$ 、 $3+1$ 、 $3+2$ 、 $4+5$ 、 $4+6$ 、 $5+0$ 、 $5+2$ 、 $5+3$ 、 $5+5$ 、 $6+3$ 這 15 組數開始的計算結果與 $0+2$ 開始的循環數字相同，即他們都是「七進位 16 循環鍊」。

(五)「七進位 16 循環鍊」

1. $0+3$ 開始的如下所示：

$0+3+3+6+2+1+3+4+0+4+4+1+5+6+4+3+0+3$ 共有 16 個數在循環，所以稱為「七進位 16 循環鍊」。

2. 發現以 $0+4$ 、 $1+3$ 、 $1+5$ 、 $2+1$ 、 $3+0$ 、 $3+3$ 、 $3+4$ 、 $3+6$ 、 $4+0$ 、 $4+1$ 、 $4+3$ 、 $4+4$ 、 $5+6$ 、 $6+2$ 、 $6+4$ 這 15 組數開始的計算結果與 $0+3$ 開始的循環數字相同，即他們都是「七進位 16 循環鍊」。

五、六進位

(一)共有 0、1、2、3、4、5 這些數在相加，相加等於 6 的數變成 0，如果相加超過 6 的數，就把那個數減 6，即為我們要的數字。

(二)討論 0+1 開始至 5+5 開始，共 35 組。

(三)「六進位 24 循環鍊」

1. 0+1 開始的如下所示：

0+1+1+2+3+5+2+1+3+4+1+5+0+5+5+4+3+1+4+5+3+2+5+1+0+1 共有 24 個數在循環，所以稱為「六進位 24 循環鍊」。

2. 發現以 0+5、1+0、1+1、1+2、1+3、1+4、1+5、2+1、2+3、2+5、3+1、3+2、3+4、3+5、4+1、4+3、4+5、5+0、5+1、5+2、5+3、5+4、5+5 這 23 組數開始的計算結果與 0+1 開始的循環數字相同，即他們都是「六進位 24 循環鍊」。

(四)「六進位 8 循環鍊」

1. 0+2 開始的如下所示：

0+2+2+4+0+4+4+2+0+2 共有 8 個數在循環，所以稱為「六進位 8 循環鍊」。

2. 發現以 0+4、2+0、2+2、2+4、4+0、4+2、4+4 這 7 組數開始的計算結果與 0+2 開始的循環數字相同，即他們都是「六進位 8 循環鍊」。

(五)「六進位 3 循環鍊」

1. 0+3 開始的如下所示：

0+3+3+0+3 共有 3 個數在循環，所以稱為「六進位 3 循環鍊」。

2. 發現以 3+0、3+3 這 2 組數開始的計算結果與 0+3 開始的循環數字相同，即他們都是「六進位 3 循環鍊」。

六、五進位

(一)共有 0、1、2、3、4 這些個位數在相加，相加等於 5 的數變成 0，如果相加超過 5 的數，就把那個數減 5，即為我們要的數字。

(二)討論 0+1 開始至 4+4 開始，共 24 組。

(三)「五進位 20 循環鍊」

1. 0+1 開始的如下所示：

0+1+1+2+3+0+3+3+1+4+0+4+4+3+2+0+2+2+4+1+0+1 共有 20 個數在循環，所以稱為「五進位 20 循環鍊」。

2. 發現以 0+2、0+3、0+4、1+0、1+1、1+2、1+4、2+0、2+2、2+3、2+4、3+0、3+1、3+2、

3+3、4+0、4+1、4+3、4+4 這 19 組數開始的計算結果與 0+1 開始的循環數字相同，即他們都是「五進位 20 循環鍊」。

(四)「五進位 4 循環鍊」

1. 1+3 開始的如下所示：

1+3+4+2+1+3 共有 4 個數在循環，所以稱為「五進位 4 循環鍊」。

2. 發現以 2+1、3+4、4+2 這 3 組數開始的計算結果與 1+3 開始的循環數字相同，即他們都是「五進位 4 循環鍊」。

七、四進位

(一)共有 0、1、2、3 這些個位數在相加，相加等於 4 的數變成 0，如果相加超過 4 的數，就把那個數減 4，即為我們要的數字。

(二)討論 0+1 開始至 3+3 開始，共 15 組。

(三)「四進位 6 循環鍊」

1. 0+1 開始的如下所示：

0+1+1+2+3+1+0+1 共有 6 個數在循環，所以稱為「四進位 6 循環鍊」。

2. 發現以 1+0、1+1、1+2、2+3、3+1 這 5 組數開始的計算結果與 0+1 開始的循環數字相同，即他們都是「四進位 6 循環鍊」。

(四)「四進位 3 循環鍊」

1. 0+2 開始的如下所示：

0+2+2+0+2 共有 3 個數在循環，所以稱為「四進位 3 循環鍊」。

2. 發現以 2+0、2+2 這 2 組數開始的計算結果與 0+2 開始的循環數字相同，即他們都是「四進位 3 循環鍊」。

(五)「四進位 6 循環鍊」

1. 0+3 開始的如下所示：

0+3+3+2+1+3+0+3+3 共有 6 個數在循環，所以稱為「四進位 6 循環鍊」。

2. 發現以 1+3、2+1、3+0、3+2、3+3 這 5 組數開始的計算結果與 0+3 開始的循環數字相同，即他們都是「四進位 6 循環鍊」。

八、三進位

(一)共有 0、1、2 這些個位數在相加，相加等於 3 的數變成 0，如果相加超過 3 的數，就把那個數減 3，即為我們要的數字。

(二)討論 0+1 開始至 2+2 開始，共 8 組。

(三)「三進位 8 循環鍊」

1. 0+1 開始的如下所示：

0+1+1+2+0+2+2+1+0+1 共有 8 個數在循環，所以稱為「三進位 8 循環鍊」。

2. 發現以 0+2、1+0、1+1、1+2、2+0、2+1、2+2 這 7 組數開始的計算結果與 0+1 開始的循環數字相同，即他們都是「三進位 8 循環鍊」。

九、二進位

(一)共有 0、1 這些數在相加，相加等於 2 的數變成 0，如果相加超過 2 的數，就把那個數減 2，即為我們要的數字。

(二)討論 0+1 開始至 1+1 開始，共 3 組。

(三)「二進位 3 循環鍊」

1. 0+1 開始的如下所示：

0+1+1+0+1 共有 3 個數在循環，所以稱為「二進位 3 循環鍊」。

2. 發現以 1+0、1+1 這 2 組數開始的計算結果與 0+1 開始的循環數字相同，即他們都是「四進位 3 循環鍊」。

陸、討論

將各種進位制之循環鍊裡的數字，依 (0、1、2、3、4、5、6、7、8、9) 各數字出現次數整理成下表：

| 數 字 出 現 次 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0+1 之十進位 60 循環鍊 | 4 | 8 | 4 | 8 | 4 | 8 | 4 | 8 | 4 | 8 |
| 0+2 之十進位 20 循環鍊 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 | 4 | 0 |
| 0+5 之十進位 3 循環鍊 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1+3 之十進位 12 循環鍊 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2+6 之十進位 4 循環鍊 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 十進位各循環鍊合計 | 9 | 10 |
| | | | | | | | | | | |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|
| 0+1 之九進位 24 循環鍊 | 2 | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 5 | |
| 0+2 之九進位 24 循環鍊 | 2 | 2 | 5 | 2 | 2 | 2 | 2 | 5 | 2 | |
| 0+3 之九進位 8 循環鍊 | 2 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 3 | | | |
| 0+4 之九進位 24 循環鍊 | 2 | 2 | 2 | 2 | 5 | 5 | 2 | 2 | 2 | |
| 九進位各循環鍊合計 | 8 | 9 | |
| | | | | | | | | | | |
| 0+1 之八進位 12 循環鍊 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | | |
| 0+2 之八進位 6 循環鍊 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | | |
| 0+3 之八進位 12 循環鍊 | 2 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | | |
| 0+4 之八進位 3 循環鍊 | 1 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | | |
| 0+6 之八進位 6 循環鍊 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | | |
| 1+3 之八進位 12 循環鍊 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | | |
| 1+4 之八進位 12 循環鍊 | 0 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | | |
| 八進位各循環鍊合計 | 7 | 8 | | |
| | | | | | | | | | | |
| 0+1 之七進位 16 循環鍊 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 | | | |
| 0+2 之七進位 16 循環鍊 | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 | | | |
| 0+3 之七進位 16 循環鍊 | 2 | 2 | 1 | 4 | 4 | 1 | 2 | | | |
| 七進位各循環鍊合計 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 0+1 之六進位 24 循環鍊 | 2 | 6 | 3 | 4 | 3 | 6 | | | | |
| 0+2 之六進位 8 循環鍊 | 2 | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | | | | |
| 0+3 之六進位 3 循環鍊 | 1 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | | | | |
| 六進位各循環鍊合計 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 0+1 之五進位 20 循環鍊 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | | | | | |
| 1+3 之五進位 4 循環鍊 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | |
| 五進位各循環鍊合計 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 0+1 之四進位 6 循環鍊 | 1 | 3 | 1 | 1 | | | | | | |
| 0+2 之四進位 3 循環鍊 | 1 | 0 | 2 | 0 | | | | | | |
| 0+3 之四進位 6 循環鍊 | 1 | 1 | 1 | 3 | | | | | | |
| 四進位各循環鍊合計 | 3 | 4 | 4 | 4 | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|----------------|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 0+1 之三進位 8 循環鍊 | 2 | 3 | 3 | | | | | | | |
| 三進位各循環鍊合計 | 2 | 3 | 3 | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | |
| 0+1 之二進位 3 循環鍊 | 1 | 2 | | | | | | | | |
| 二進位各循環鍊合計 | 1 | 2 | | | | | | | | |

分析上表結果，發現幾個很特別的地方：

- 一、十進位 60 循環鍊中，偶數（0、2、4、6、8）各出現 4 次，奇數（1、3、5、7、9）各出現 8 次。
- 二、十進位 20 循環鍊中，偶數（0、2、4、6、8）各出現 4 次，未出現奇數。
- 三、九進位的三個 24 循環鍊，出現最多的是 5 次，且都各有兩個數字是 5 次。我們由 1、2、3、4、5、6、7、8、0、1、2、3、4、5、6、7、8 這順序觀察可知：
 - 0+1 開始的，出現 5 次的數字就在 0 的左右兩側各 1 個數，即 1 與 8。
 - 0+2 開始的，出現 5 次的數字就在 0 的左右兩側各 2 個數，即 2 與 7。
 - 0+4 開始的，出現 5 次的數字就在 0 的左右兩側各 4 個數，即 4 與 5。
- 四、八進位的四個 12 循環鍊，出現最多的是 3 次，且都各有兩個數字是 3 次。我們由 1、2、3、4、5、6、7、0、1、2、3、4、5、6、7 這順序觀察可知：
 - 0+1 開始的，出現 3 次的數字就在 0 的右側 1 個數（即 1），再加 4（即 5）。
 - 0+3 開始的，出現 3 次的數字就在 0 的右側 3 個數（即 3），再加 4（即 7）。
 - 1+3 開始的，出現 3 次的數字就在 0 的右側 3 個數（即 3），再加 4（即 7）。
 - 1+4 開始的，出現 3 次的數字就在 0 的右側 1 個數（即 1），再加 4（即 5）。
- 五、八進位的兩個 6 循環鍊，出現最多的是 3 次，且都各有一個數字是 3 次。
 - 0+2 開始的，出現 3 次的數字就是 2。
 - 0+6 開始的，出現 3 次的數字就是 6。
- 六、七進位的三個 16 循環鍊，出現最多的是 4 次，且都各有兩個數字是 4 次。我們由 1、2、3、4、5、6、0、1、2、3、4、5、6 這順序觀察可知：
 - 0+1 開始的，出現 4 次的數字就在 0 的左右兩側各 1 個數，即 1 與 6。
 - 0+2 開始的，出現 4 次的數字就在 0 的左右兩側各 2 個數，即 2 與 5。
 - 0+3 開始的，出現 4 次的數字就在 0 的左右兩側各 3 個數，即 3 與 4。
 此結果與九進位的三個 24 循環鍊相同。
- 七、五進位 20 循環鍊裡的每個數字出現的最平均，（0、1、2、3、4）每個數字都出現 4 次。
- 八、各種進位制透過本研究的計算方式，其各個數字最後出現的次數剛好就是本身的進位數，即 n 進位制的话，每個數字（1、2、3、……、 $n-1$ ）會出現 n 次，0 則出現 $n-1$ 次。其原因為 n 進位時，我們討論從 0+0 開始到 $(n-1) + (n-1)$ 開始，共有 $n \times n$ 組，每一組有 2 個數字，故共有 $2 \times n \times n$ 個數字，但因為形成循環鍊時每個數字會被前後兩數各算 1 次（如：0+1+1+2+3+……，2 被分到 1+2 與 2+3），所以必須再除於 2，即 $2 \times n \times n \div 2 = n$

$\times n$ 個數字，又因為分組時每個數字出現次數相同，共有 n 個數字，故 $n \times n \div n = n$ ，即每個數字會出現 n 次，因為我們沒有計算 $0+0$ 這組，所以， 0 會少 1 次，即 0 出現 $n-1$ 次。

柒、結論

- 一、十進位的運算中，在 99 組數裡，共可分為 60 循環鍊、20 循環鍊、12 循環鍊、4 循環鍊、3 循環鍊等五大類。
- 二、九進位的運算中，在 80 組數裡，共可分為 24 循環鍊（3 個）、8 循環鍊等兩大類。
- 三、八進位的運算中，在 63 組數裡，共可分為 12 循環鍊（4 個）、6 循環鍊（2 個）、3 循環鍊等三大類。
- 四、七進位的運算中，在 48 組數裡，僅能分為 16 循環鍊（3 個）。
- 五、六進位的運算中，在 35 組數裡，共可分為 24 循環鍊、8 循環鍊、3 循環鍊等三大類。
- 六、五進位的運算中，在 24 組數裡，共可分為 20 循環鍊、4 循環鍊等兩大類。
- 七、四進位的運算中，在 15 組數裡，共可分為 6 循環鍊（2 個）、3 循環鍊等兩大類。
- 八、三進位的運算中，在 8 組數裡，僅能分為 8 循環鍊。
- 九、二進位的運算中，在 3 組數裡，僅能分為 3 循環鍊。

捌、應用

- 一、利用十進位循環鍊設計一套密碼，將 37 個注音符號分成 10 行，並且以行列概念標定其位置，再配合本研究的計算模式形成密碼，另編了 5 組密碼當聲調，即一個注音符號用一組數（3 個數字）表示，第一個數代表位置在第幾行，第二個數代表位置在第幾列，第三個數是驗證碼，驗證碼就是把前兩個數加起來，再刪除十位數，例如： $4+3=7$ 。（驗證碼的用意是在確認這組數是有意義的）

下表就是一份十進位的注音符號密碼表

| 注 音 符 號 | 密 碼 |
|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|------------------|--------|
| ㄅ | 112 | ㄆ | 213 | ㄇ | 314 | ㄏ | 415 | ㄏ | 516 | ㄏ | 617 | 一 | 718 |
| ㄉ | 123 | ㄊ | 224 | ㄋ | 325 | ㄌ | 426 | ㄌ | 527 | ㄌ | 628 | ㄌ | 729 |
| ㄏ | 134 | ㄎ | 235 | ㄏ | 336 | ㄏ | 437 | ㄏ | 538 | ㄏ | 639 | ㄏ | 730 |
| ㄏ | 145 | ㄏ | 246 | | | | | ㄏ | 549 | | | | |

| 注音符號 | 密碼 | 注音符號 | 密碼 | 注音符號 | 密碼 | 聲調 | 密碼 |
|------|-----|------|-----|------|-----|----|-----|
| ㄩ | 819 | ㄩ | 910 | ㄩ | 011 | • | 101 |
| ㄛ | 820 | ㄛ | 921 | ㄛ | 022 | / | 202 |
| ㄜ | 831 | ㄜ | 932 | ㄜ | 033 | ∨ | 303 |
| ㄝ | 842 | ㄝ | 943 | ㄝ | 044 | ˘ | 404 |
| | | | | ㄦ | 055 | 一聲 | 505 |

例如：729 820 303 538 404 426 718 943 505 112 718 303 224 831 404
我 是 邱 比 特

729 820 303 437 718 303 336 729 011 505 538 831 404 415 718 011 404
我 喜 歡 射 箭

二、仿照注音符號密碼表的編碼概念，我們採用六進位制的方法編定英文字母密碼表。

| 英文字母 | 密碼 |
|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|------|-----|
| A | 112 | B | 213 | C | 314 | D | 415 | E | 510 | F | 011 |
| G | 123 | H | 224 | I | 325 | J | 420 | K | 521 | L | 022 |
| M | 134 | N | 235 | O | 330 | P | 431 | Q | 532 | R | 033 |
| S | 145 | T | 240 | U | 341 | V | 442 | W | 543 | X | 044 |
| Y | 150 | Z | 251 | | | | | | | | |

例如：

150 330 341 112 033 510 145 330 224 112 235 415 145 330 134 510
You are so handsome
翻譯：你好帥氣

三、郵局或銀行的提款卡密碼共有 6 個數字，若是有好幾張卡的話，坦白說要牢記還真不容易，若用生日、電話號碼、身分證字號或其他特殊有意義的數字當成密碼，又怕萬一個人資料流出時，提款卡密碼被破解。為了解決這些困擾，我們設計了幾種設定提款卡密碼的方式，讓您可以很大方的把密碼寫在筆記本或電腦裡，既不必擔心自己會忘記，也不怕別人看到。以下為兩種密碼設定方式：

(一) 初級版：

我們以三個數字為 1 組密碼數字，首先採用十進位制寫出六組有意義的數（符合本研究的計算模式），接著將每一組數的 3 個數字加起來，再用十進位制轉換成 1 個密碼數字。當然也可以採九進位、八進位、...、二進位，重點是不要被人識破。

例 1. 十進位密碼

$$\begin{array}{cccccc} \underline{437} & \underline{572} & \underline{741} & \underline{224} & \underline{347} & \underline{785} \\ 4 & 4 & 2 & 8 & 4 & 0 \end{array}$$

說明：(1) $437 = 4 + 3 + 7 = 14$

$$14 \div 10 = 1 \dots 4 \quad \text{所以答案是 4}$$

(2) $572 = 5 + 7 + 2 = 14$

$$14 \div 10 = 1 \dots 4 \quad \text{所以答案是 4}$$

.....

以此類推算出其他組所代表的數字，故終極密碼為 **442840**

例 2. 九進位密碼

$$\begin{array}{cccccc} \underline{437} & \underline{573} & \underline{742} & \underline{224} & \underline{347} & \underline{786} \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 5 & 3 \end{array}$$

說明：(1) $437 = 4 + 3 + 7 = 14$

$$14 \div 9 = 1 \dots 5 \quad \text{所以答案是 5}$$

(2) $573 = 5 + 7 + 3 = 15$

$$15 \div 9 = 1 \dots 6 \quad \text{所以答案是 6}$$

.....

以此類推算出其他組所代表的數字，故終極密碼為 **564853**

例 3. 八進位密碼

$$\begin{array}{cccccc} \underline{437} & \underline{574} & \underline{743} & \underline{224} & \underline{347} & \underline{776} \\ 6 & 0 & 6 & 0 & 6 & 4 \end{array}$$

說明：(1) $437 = 4 + 3 + 7 = 14$

$$14 \div 8 = 1 \dots 6 \quad \text{所以答案是 6}$$

(2) $574 = 5 + 7 + 4 = 16$
 $16 \div 8 = 2 \dots 0$ 所以答案是 0

.....
 以此類推算出其他組所代表的數字，故終極密碼為 **606064**

例 4. 七進位密碼

| | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|---------------------|
| <u>463</u> | <u>156</u> | <u>654</u> | <u>553</u> | <u>351</u> | <u>246</u> | |
| 6 | 5 | 1 | 6 | 2 | 5 | 終極密碼為 651625 |

(二) 進階版：

我們以三個數字為 1 組密碼數字，首先採用十進位制寫出六組有意義的數（符合本研究的計算模式），另搭配兩組無意義的數（不符合本研究的計算模式），接著將每一組數的 3 個數字加起來，再以每一組數的第 1 個數字決定轉換的進位制，轉換成 1 個密碼數字。當然也可以採九進位、八進位、...、二進位，看個人意願，當然採用的進位制越多種，別人就越看不出來。

例 1. 十進位密碼

| | | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <u>437</u> | <u>572</u> | <u>168</u> | <u>741</u> | <u>647</u> | <u>224</u> | <u>347</u> | <u>785</u> |
| 2 | 4 | 無意義 | 5 | 無意義 | 0 | 2 | 6 |

說明：(1) $437 = 4 + 3 + 7 = 14$
 $14 \div 4 = 3 \dots 2$ 所以答案是 2
 (2) $572 = 5 + 7 + 2 = 14$
 $14 \div 5 = 2 \dots 4$ 所以答案是 4

(3) 168 此組無意義（因為 $1 + 6 \neq 8$ ）

.....
 以此類推算出其他組所代表的數字，故終極密碼為 **245026**

例 2. 九進位密碼

| | | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <u>566</u> | <u>437</u> | <u>573</u> | <u>742</u> | <u>876</u> | <u>358</u> | <u>473</u> | <u>775</u> |
| 無意義 | 2 | 0 | 6 | 5 | 1 | 無意義 | 5 |

說明：(1) 566 此組無意義（因為九進位計算規則 $5 + 6 \neq 6$ ）

(2) $437 = 4 + 3 + 7 = 14$
 $14 \div 4 = 3 \dots 2$ 所以答案是 2

(3) $573 = 5 + 7 + 3 = 15$
 $15 \div 5 = 3 \dots 0$ 所以答案是 0

以此類推算出其他組所代表的數字，故終極密碼為 **206515**

例 3. 八進位密碼

| | | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <u>437</u> | <u>737</u> | <u>574</u> | <u>236</u> | <u>743</u> | <u>224</u> | <u>347</u> | <u>776</u> |
| 2 | 無意義 | 1 | 無意義 | 0 | 0 | 2 | 6 |

說明：(1) $437 = 4+3+7=14$

$14 \div 4 = 3 \dots 2$ 所以答案是 2

(2) 737 此組無意義 (因為八進位計算規則 $7+3 \neq 7$)

(3) $574 = 5+7+4=16$

$16 \div 5 = 3 \dots 1$ 所以答案是 1

.....

以此類推算出其他組所代表的數字，故終極密碼為 **210026**

例 4. 七進位密碼

| | | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| <u>531</u> | <u>819</u> | <u>516</u> | <u>236</u> | <u>665</u> | <u>235</u> | <u>340</u> | <u>654</u> |
| 4 | 無意義 | 2 | 無意義 | 5 | 0 | 1 | 3 |

說明：(1) $531 = 5+3+1=9$

$9 \div 5 = 1 \dots 4$ 所以答案是 4

(2) 819 此組無意義 (因為七進位沒有 8 這個數字)

(3) $516 = 5+1+6=12$

$12 \div 5 = 2 \dots 2$ 所以答案是 2

.....

以此類推算出其他組所代表的數字，故終極密碼為 **425013**

玖、參考資料及其他

一、參考書籍

1. 國民中學數學 (2 下) 教科書 (6~39 頁)。台北：翰林出版事業股份有限公司。

二、參考網站

1. 維基百科

<http://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%BF%9B%E4%BD%8D%E5%88%B6>