

# 在課堂上進行 $\sqrt{2}$ 是無理數的教學建議

張海潮教授／臺灣大學數學系(退休)

## 一、導言

有關 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明，傳統上是用歸謬法，先令 $\sqrt{2}$ 是分數，例如 $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$ ， $q > 1$ ， $p, q$ 互質，然後兩邊平方，得

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

接著去分母 $2q^2 = p^2$ ，因此 $p^2$ 為偶數，因此 $p$ 為偶數，因此可令 $p=2k, \dots$ （我們在此省略了一般常見的證明）。

我們現在建議一個簡化的證明如下：

如果 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ， $p, q$ 正整數， $q > 1$ ，假設 $p, q$ 互質。那麼 $p$ 除以 $q$ ，除不盡。現在觀察 $\frac{p^2}{q^2}$ ，由於 $p^2$ 和 $q^2$ 也沒有公因數，所以 $p^2$ 除以 $q^2$ 也除不盡，所以 $2 \neq \frac{p^2}{q^2}$ 。

換句話說，任何一個非整數的分數 $\frac{p}{q}$ ，平方以後都不是整數，這也同時證明了：除非一個正整數 $n$ 是完全平方數（即 $n = m^2$ ， $m$ 為整數），否則 $\sqrt{n}$ 都無法寫成分數。

## 二、 $\sqrt{2}$ 是無理數的教學建議

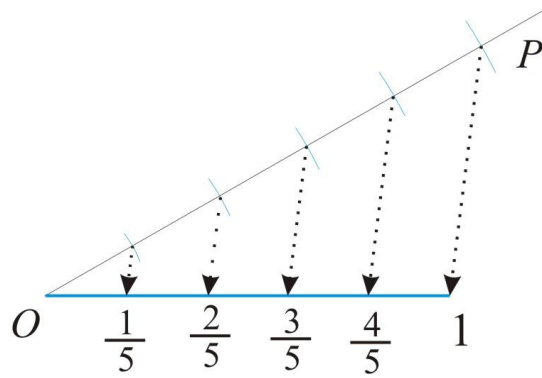
**步驟一：**複習（正）整數、分數和小數。

略提分數可以化成（有限）小數和循環小數。

**步驟二：**說明如何利用（無刻度的）尺和圓規在另一把（無刻度的）尺上定出刻度。

取出 $O$ 點，先定一個單位刻度，作為1，利用圓規定出2, 3, 4, ...，再利用平行線將單位刻度作任意 $n$ 等分。

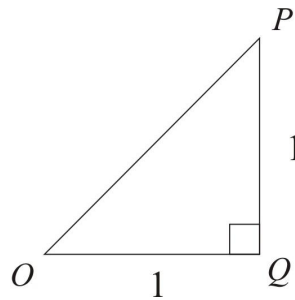
例如，先畫一條斜線段 $\overline{OP}$ ，以圓規刻5個刻度，將最後一點 $P$ 與1連結，再依序作平行線，就可在 $[0,1]$ 上作出五等分點，



結論：以尺規可以作出任意分數刻度。  
 (有限) 小數是分母為 10, 100, 1000, ... 的分數

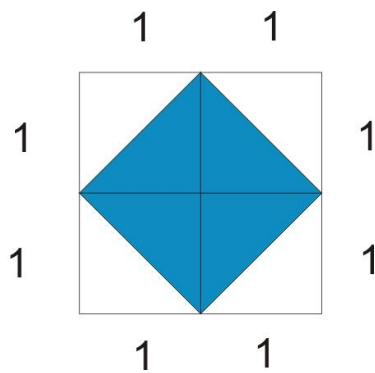
步驟三：

作



以畢氏定理說明  $\overline{OP} = \sqrt{2}$ 。

或作四個正方形：



斜線部分是一個面積為 2 的正方形，因此對角線的長是  $\sqrt{2}$ 。

步驟四：逐步說明並要求學生手算驗證

$$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

**步驟五：**提問： $\sqrt{2}$  是一個有限小數嗎？ $\sqrt{2}$  是一個分數嗎（分數可以是有限小數，也可以是循環小數）？

或者，步驟三，面積為 2 的正方形，邊長可能是一個分數嗎？

**步驟六：**在數線上除了整數，分數，小數之外，還有 $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,...除此之外還有那些數？

**步驟七：**數線上每一點代表的數是一個實數，同學們能舉出哪些「新的」實數來？

**步驟八：**解釋並進入平面直角坐標系的教學。