



# 等差數列



# 1 / 生活中的數列

## 1 數列的意義

將一些數字依序排成一列，我們稱之為數列。數列可以是有規律的，也可以是沒有規律的。

例如：1, 3, 5, 7, 9、

2, 9, 5, 4, 3、

1, 1, 2, 3, 5, 8、

5, 5, 5, 5, 5, 5、

2, 4, 8, 16, 32、

8, 5, 2, -1, -4。

像這樣將數字排成一列，無論有規律、沒規律或重複出現都叫做數列。

## 2 生活中的數列

生活中常會看到一些數字排列在一起，例如：

### 1. 月曆

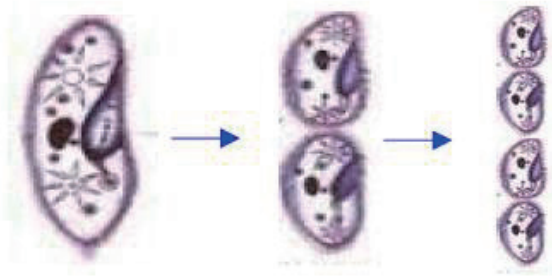
August						
Sun.	Mon.	Tue.	Wed.	Thur.	Fri.	Sat.
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

觀察月曆上的數字 1, 8, 15, 22, 29，想想看，

(1) 這是數列嗎？

(2) 在這個月曆上，你還可以找到什麼有規律的數列嗎？

## 2. 細胞分裂



某單細胞生物，一個細胞就是一個生物，其進行第一次的細胞分裂後，產生二個細胞，就變成二個生物；進行第二次的細胞分裂後，產生四個細胞，就變成四個生物(如上圖所示)。因此，此單細胞生物經多次細胞分裂產生的細胞數依次為 1, 2, 4, ……，想想看，

- (1) 這是數列嗎？
- (2) 有沒有什麼規律？

## 3. 費率

北北基計程車運價自 104 年 10 月 1 日起，調漲的費率表中增列了加收費用，如下表：

大臺北地區計程車運價簡易對照表 New Taxi Fare Table for Taipei City, New Taipei City and Keelung City. (effective from Oct.1st, 2015) 台北市、新北市及基隆市計程車運價簡易對照表 (2015 年 10 月 1 日施行)				
※2015 年 10 月 1 日零時起實施「計程車新運價」，乘客應付車資除舊式計費表顯示金額外，再依本表加收。				
	計費表級距(元) Current Fare	加收費用(元) Surcharge Fare	計費表級距(元) Current Fare	加收費用(元) Surcharge Fare
日間 (Day-time) 06:00-23:00	70-95	0	550-595	120
	100-145	5	600-645	130
	150-195	20	650-695	145
	200-245	30	700-745	155
	250-295	45	750-795	170
	300-345	55	800-845	180
	350-395	70	850-895	195
	400-445	80	900-945	205
	450-495	95	950-995	220
	500-545	105	1,000-1,045	230

北北基計程車新式計費表

加收費用金額數字如下：

0, 5, 20, 30, 45, 55, 70, 80, 95, 105, 120, 130, ……，想想看，

- (1) 這是數列嗎？
- (2) 有沒有什麼規律？

## 4. 植物的花瓣



觀察花瓣的數目，我們發現最常見的花瓣數目是 5，其他花瓣的數目如下：

- 3：百合。
- 5：朱槿、杜鵑、梅花。
- 8：桔梗。
- 13：金盞花。
- 21：紫莞。
- 雛菊大多是 34，55，89 瓣。

花瓣的數目包含了一種極為奇妙的模式，這個奇特的數目：3，5，8，13，21，34，55，89，幾乎囊括了所有的花朵瓣數。

(資料來源：<http://www.twiki.com/wiki/%E8%B2%BB%E6%B0%8F%E6%95%B8%E5%88%97>)

常見花瓣數目：3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89，想想看，

- (1) 這是數列嗎？
- (2) 有沒有什麼規律？

把數字像這樣依序排列成一串稱為數列，數列中的每一個數都稱為一個項，  
 例如：數列 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 中，  
 第一個數 3 稱為第 1 項或首項，以符號  $a_1$  表示；  
 第二個數 5 稱為第 2 項，以符號  $a_2$  表示；  
 第三個數 8 稱為第 3 項，以符號  $a_3$  表示。  
 這個數列共有 8 項，最後一個數稱為末項（或稱為第  $n$  項），通常用  $a_n$  表示。  
 （特別注意  $a_n$  的紀錄方式，其中  $n$  為下標，且  $n$  為正整數，為每一項的相對位置）

因此，這個數列分別以符號可表示為：

$$a_1=3, a_2=5, a_3=8, a_4=13, a_5=21, a_6=34, a_7=55, a_8=89。$$

## 補給站

### 代數符號的產生

現在的代數式子，用  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ……表示未知數，這種記法是十六、七世紀時在歐洲逐漸發展起來的。十六世紀末，法國數學家韋達(*Francois Viète*，1540-1603 年)，在他所著的《分析方法入門》一書，對符號代數學的發展有不少貢獻。現在我們所用的加號「+」及減號「-」，是他所創用的。他用母音( $a$ 、 $e$ 、 $i$ 、 $o$ 、 $u$ )代表未知量，但是笛卡兒(*Rene Descartes*，1596-1650 年)後來改用字母序列的後面部分字母  $x$ 、 $y$ 、 $z$ ……表示未知量，這個習慣一直延用到現在。



韋達



笛卡兒

### 任務 1

請舉一個數列的例子，並說明此數列是否有規律，規律為何？

### 練習 1



(資料來源: 樂透彩網站 <http://www.pilio.idv.tw/>)

某期大樂透的開獎號碼 3, 6, 8, 15, 20, 30, 40，想想看，

- (1) 這是數列嗎？
- (2) 有沒有什麼規律？
- (3) 若是數列，此數列有幾項？首項是多少？末項是多少？

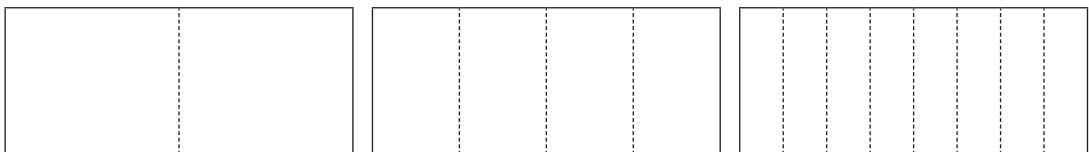
### 練習 2



汽車儀表板上的數字 0, 20, 40, 60, ……; 240，想想看，

- (1) 這是數列嗎？
- (2) 有沒有什麼規律？
- (3) 若是數列，此數列有幾項？首項是多少？末項是多少？

### 練習 3



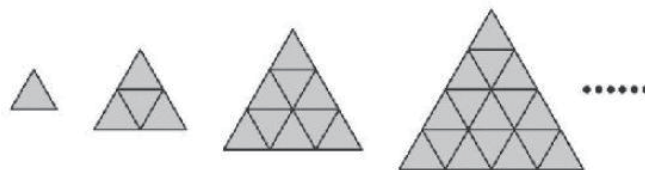
一張紙對摺一次可將紙分成兩等分，對摺兩次可將紙分成四等分，對摺三次可分成八等分，依此規則，每次對摺後形成的等分數字為 2, 4, 8, ……，想想看，

- (1) 這是數列嗎？
- (2) 有沒有什麼規律？

## 2 / 數形關係

生活中到處可見「數與形」，以及一些隱藏在「數與形」裡的某些規律，以下圖為例：

小貝與小真一起用火柴棒排成如下列的圖案，依此規律，



圖(1)

圖(2)

圖(3)

圖(4)

### 任務 2

根據上圖的規律，將各圖的小三角形個數紀錄如下，並完成以下空格：

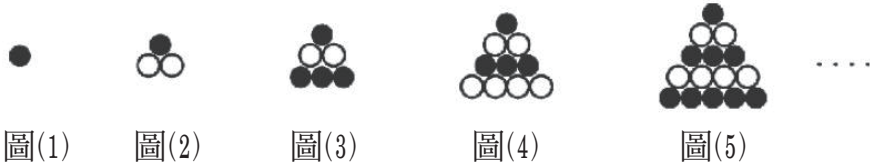
	圖(1)	圖(2)	圖(3)	圖(4)	圖(5)	圖(6)
	$a_1$	$a_2$	$a_3$			
三角形個數	1	4				

### 任務 3

請幫他們想想看，圖(10)會有多少個小三角形？請說明理由。

### 練習 4

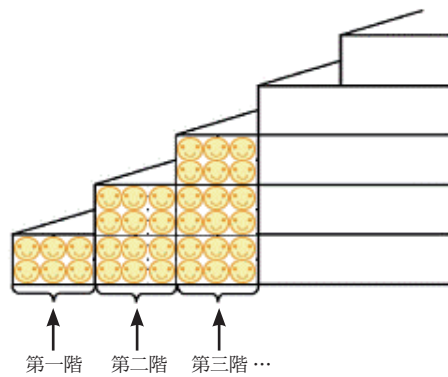
觀察下圖，並依圖(1)至圖(5)的規則性排列，回答下列問題：



1. 請依序寫出圖(1)至圖(7)中，黑珠的顆數。
2. 請依序寫出圖(1)至圖(7)中，白珠的顆數。

### 練習 5

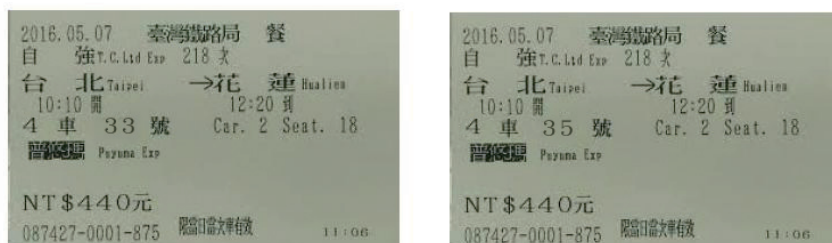
如圖，有一樓梯，它的每一階的長度、寬度與增加的高度都一樣。有一工人在此樓梯的一側貼上大小相同的正方形磁磚，第一階貼了 6 塊，第二階貼了 12 塊，……，依此規律貼了每一階的磁磚，請寫下此樓梯第一階到第六階各貼了多少磁磚？（仿自 91 年基測題）





### 3 / 等差數列的意義

小貝與小真想搭自強號火車到花蓮去玩，買了兩張火車票(如圖一)，小貝、小真座位號碼分別為 4 車 33 號、4 車 35 號。



圖一

小真：先來找找我的座位到底在哪裡呢？

小貝：好啊！但你知道火車內的座位是怎麼安排的嗎？

小真：知道阿！我畫給你看。(如圖二)



火車座位

	左窗	左道		右道	右窗
第一列	1	3	走 道	4	2
第二列	5	7		8	6
第三列	9	11		12	10
...	...			...	...

圖二 火車座位配置表

#### 任務 4

請幫小真與小貝檢查看看，是不是會坐在一起呢？請說明理由。

小貝：我發現火車的每一排座位號碼是有規律的。例如，將左窗的號碼依序排列成一數列為：1, 5, 9, 13, 17, ……。

小真：你好厲害喔！怎麼知道 9 後面的號碼是多少呢？

小貝：5 跟 1 差 4，9 跟 5 差 4，前後兩數都差 4，也就是後面的數減前面的數，差都一樣都是 4(如圖三)。所以可以用這樣的規律，把 9 後面的號碼寫出來。

火車座位

	左窗	左道		右道	右窗
第一列	1	3	走 道	4	2
第二列	5	7		8	6
第三列	9	11		12	10
...	...	...		...	...

圖三 火車座位配置表

### 【等差數列】

一個數列中，如果它的任意相鄰兩個數字之間，後項減前項的差是固定的，則稱為「等差數列」，而這個固定的差稱之為「公差」。

所以數列 1, 5, 9, 13, 17, ……，稱為等差數列，公差為 4。

利用符號記錄這個數列的前五項可表示如下：

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 5 = 1 + 4 = 1 + 1 \times 4$$

$$a_3 = 9 = 1 + 8 = 1 + 2 \times 4$$

$$a_4 = 13 = 1 + 12 = 1 + 3 \times 4$$

$$a_5 = 17 = 1 + 16 = 1 + 4 \times 4$$

或以表格方式記錄成如下：

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
座位號碼	1	5	9		
		+ 4	+ 4	+ 4	

### 任務 5

請把這個等差數列的第六項到第十項依照上面的規則寫下來。

	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
座位號碼					

### 任務 6

依照上面對火車座位號碼配置的觀察，請幫小真找找看她的座位到底在哪裡呢？（請回答左窗、左道、右道、右窗及第幾列）

### 任務 7

請將火車座位中，左道、右道的號碼所形成的數列，寫出前 10 項。

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
左道	3	7	11							
右道	4	8	12							

### 練習 6

判斷下列數列是否為等差數列？如果是，公差是多少呢？

(1) 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

(2) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

### 練習 7

在下列空格中填入適當的數，使得每個數列成為等差數列：

(1) 4, 11, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。

(2) -4, -2, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_。

## 4 / 等差數列第 $n$ 項

小貝與小真逛賣場的時候，發現飲料排得很特別，像是一個飲料塔(如圖四)，兩個人又開始討論起來，推測如果有三十層，則最底層有多少瓶？



圖四

小貝：這些飲料的排列方式似乎也是有規律的。

### 任務 8

請寫出這些飲料排列方式的規律？

### 任務 9

根據前面觀察到的規律，如果這個飲料要排十層，則最下面一層要放幾瓶？寫出你的做法。

小真：有沒有其他比較快的方法可以算出來？

小貝：利用前面火車座位例子的記錄方式，這是一個等差數列 1, 3, 5, 7, 9, ……，第一項是 1，公差是 2。（如圖五）



圖五

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3 = 1 + 2$$

$$a_3 = 5 = 1 + 4$$

$$a_4 = 7 = 1 + 6$$

$$a_5 = 9 = 1 + 8$$

小真：各項在首項後面出現的數字 2, 4, 6, 8，好像都跟公差 2 有關！

小貝：每列的瓶數可以寫成這樣，如下圖六說明。



圖六

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3 = 1 + 2 = 1 + 1 \times 2$$

$$a_3 = 5 = 1 + 4 = (1 + 2) + 2 = 1 + 2 \times 2$$

$$a_4 = 7 = 1 + 6 = (1 + 2 + 2) + 2 = 1 + 3 \times 2$$

$$a_5 = 9 = 1 + 8 = (1 + 2 + 2 + 2) + 2 = 1 + 4 \times 2$$

小真：首項是固定要加的，各項公差前面乘數字 1, 2, 3, 4，跟項數是否有關係？

小貝：再改寫一下會看得更清楚喔！如下圖七說明。



圖七

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3 = 1 + 2 = 1 + 1 \times 2 = 1 + (2 - 1) \times 2$$

$$a_3 = 5 = 1 + 4 = 1 + 2 \times 2 = 1 + (3 - 1) \times 2$$

$$a_4 = 7 = 1 + 6 = 1 + 3 \times 2 = 1 + (4 - 1) \times 2$$

$$a_5 = 9 = 1 + 8 = 1 + 4 \times 2 = 1 + (5 - 1) \times 2$$

將以上算式以表格方式記錄如下：

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
	1	3	5	7	
記錄一	1	1 + 2	1 + 4	1 + 6	
記錄二	1	1 + 1 × 2	1 + 2 × 2	1 + 3 × 2	
記錄三	1	1 + (2 - 1) × 2	1 + (3 - 1) × 2	1 + (4 - 1) × 2	

1. 從表中之紀錄，你看到什麼規律？

2. 請以記錄一、記錄二、記錄三之方式，完成  $a_5$  欄位的之空格。

## 任務 10

根據圖七的記錄方式，將第十層的瓶數以首項、項數及公差表示。

小真：哦！原來這麼簡單。

## 任務 11

根據前面的記錄方式，將第三十層的瓶數以首項、項數及公差表示。

小貝：如果  $n$  代表飲料某一層， $a_n$  代表某一層的飲料瓶數， $d$  代表相鄰兩層飲料瓶數的差， $a_1$  代表最上面一層飲料瓶數，由上面的規則可以發現：  
 某一層的飲料瓶數 = 最上面一層飲料瓶數 + (某一層 - 1) × 相鄰兩層飲料瓶數的差，即  $a_n = a_1 + (n - 1) \times d$ 。

例如：如果像圖七那樣排列，且飲料塔有 23 層，則最底層飲料有多少瓶？

$$1 + (23 - 1) \times 2 = 1 + 22 \times 2 = 45 \text{ (瓶)}。$$

### 【第 $n$ 項】

一等差數列中，若首項為  $a_1$ ，公差  $d$ ，則第  $n$  項為  $a_n = a_1 + (n - 1) \times d$ 。

 **任務 12**

請舉一個等差數列的例子(可以是數字或圖形)，並求出第 40 項，且說服同學你的解法是對的。

**練習 8**

已知某等差數列的首項為 13 且公差為 3，求第二十項。

**練習 9**

已知某等差數列的第三項為 5，第五項為 19，求首項及第十項。



## 5 等差數列公差為負

生活上等差數列的例子，公差也有可能為負的，以前面火車座位的例子，當你從車廂的後門進入時，車廂的座位排列也可能如圖八所示：

火車座位：

	左窗	左道		右道	右窗
第一列	49	51	走 道	52	50
第二列	45	47		48	46
第三列	41	43		44	42
	...	...		...	...

圖八

### 任務 13

如圖八，請將火車座位中，右窗的號碼所形成的數列之前 10 項寫出，並寫出其首項及公差。

	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$
右窗	50	46	42							

首項為\_\_\_\_\_，公差為\_\_\_\_\_。

### 任務 14

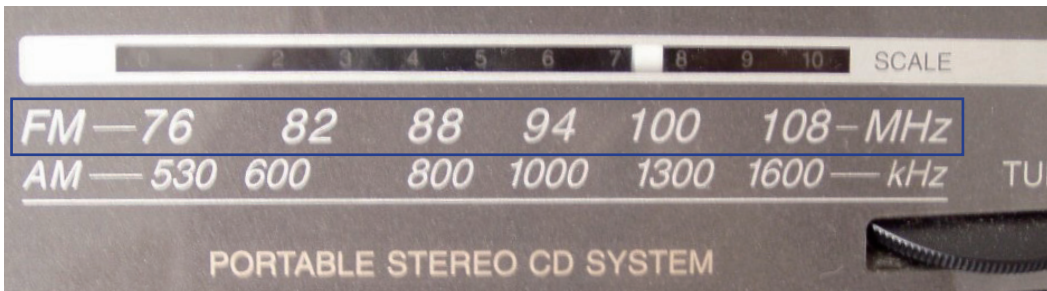
小貝與小真住在同一條馬路上，在此條馬路上的左邊的門牌號碼皆為奇數、右邊皆為偶數，每一號碼代表一棟大樓，小真的門牌號碼為 3 段 52 號，小貝家的門牌號碼為 3 段 12 號，若想要從小真家要走到小貝家(包含小貝、小真家的大樓)，請問要經過幾棟大樓呢？

## 練習 10

小真每天使用悠遊卡坐捷運上下課，有一天她下課後坐捷運刷卡出站時，刷卡機畫面顯示餘額為 0 元，當天她將悠遊卡加值到 500 元。她每天坐捷運上下學，每次均花費 30 元，問第幾次出站刷卡時，刷卡機畫面會出現餘額為負的？

### 綜合演練

1



圖為廣播儀表板上的數字 76, 82, 88, 94, 100, 108，

(1) 想想看，這是數列嗎？

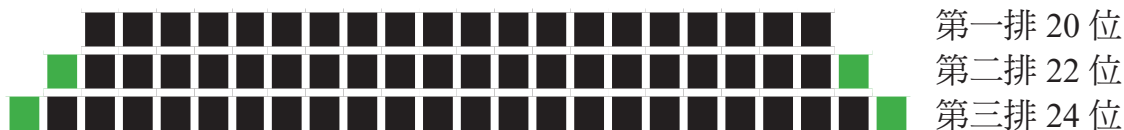
答：\_\_\_\_\_

(2) 有沒有甚麼規律？

答：\_\_\_\_\_

(3) 若是數列，請問有幾項？首項是多少？末項是多少？

- ② 暑假期間，區公所在學校舉辦居民蚊子電影院活動，小貝與小真參加志工服務協助搬椅子布置場地。區公所承辦人員告訴兩位同學，依照學校場地的大小與參加人數，第一排需要排 20 個座位，每一排比它的前一排多 2 個座位，以這樣的規律進行座位的安排，如果蚊子電影院共有 24 排的話，最後一排要搬幾張椅子？



1. 規律是什麼？

(1) 請將每一排的座位數量使用數字表示，並列出來。

20, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_.....

(2) 請觀察每一排座位數量的規律，發現它是一種\_\_\_\_\_數列。

說明原因：

2. 最後一排有幾個座位？

- ③ 小真 測試低溫冷凍車是否保持恆溫，於是他從某天中午開始，一直到隔天中午，每經過 1 個小時就去測量一下冷凍庫的溫度，其測量結果如下：

經過時間(小時)	溫度(°C)	經過時間(小時)	溫度(°C)
1	-18	13	-18
2	-18	14	-18
3	-18	15	-18
4	-18	16	-18
5	-18	17	-18
6	-18	18	-18
7	-18	19	-18
8	-18	20	-18
9	-18	21	-18
10	-18	22	-18
11	-18	23	-18
12	-18	24	-18

請問：

1. 冷凍庫每個小時顯示的溫度有什麼規律？
  2. 每小時顯示的溫度是等差數列嗎？
  3. 若是等差數列，請問有幾項？首項是多少？末項是多少？公差是多少？
- ④ 某公司舉辦體重減重管理計畫，活動時間為期 20 週，只要達標就可以獲得獎項。所謂健康體重管理是以補充足夠的營養，並搭配飲食控制及運動，進而達到理想體重。小文 因長時間不運動且常吃消夜，近年來體重暴增，為了讓自己減重及維持健康身體，於是他就去報名了體重減重管理計畫，希望能夠恢復到標準體重，報名當天量了身高與體重並開始記錄每日體重變化，其中身高為 166 公分，體重為 90.2 公斤。請問：
1. 以世界衛生組織計算男性標準體重之方法： $(\text{身高 } cm - 80) \times 70\% = \text{標準體重}$ ，求小文的標準體重為多少公斤？
  2. 開始報名後第一週小文去量他的體重，發現體重變成 88.7 公斤，如果每週減重的量都是固定的，求第十週小文的體重變成多少公斤？
  3. 持續這樣的方式減重，是否能於第 20 週後，達到標準體重呢？