素養導向國民中學數學教材

指數律──國王的棋盤

教師手冊

國家教育研究院

十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯小組

單元

指數律

國王的棋盤

教師手冊

單元目標

1. 認識次方的記錄方法，理解 a^n 的意義，其中指數 n 爲自然數，底數 a 爲任意數。
2. 透過運算發現同底數相乘或相除的指數律。
3. 藉由計算機的操作，認識科學記號（指數爲自然數）。
4. 知道 10^n 中的 n，其實是一種刻畫數字大小與用做比較的有效指標（即所謂的「數量級」）。

對照分年細目

7-n-10　能理解指數爲非負整數的次方，並能運用到算式中。

7-n-11　能理解同底數的相乘或相除的指數律。

7-n-12　能用科學記號表示法表達很大的數或很小的數。

教材設計理念

在教材中希望透過教材的呈現，讓生活經驗與數學知識相連結。藉由故事的引入，協助學生探索數學內容。在故事中，引發學生協助國王解決紀錄的問題，因而發現次方的意義；藉由學生熟悉的十進位的位值與位名，在個、十、百、千、萬、億及兆的位值關係理解基礎下，進行以 10 爲底數的乘法、除法運算，引導學生發現同底數的相乘或相除的指數律；最後，透過計算機的使用，讓學生認識科學記號，並藉由前面學到的指數律，用以比較數字大小。

本教材與以往教材設計不同處，在於我們希望整個課程是以國王的棋盤故事貫連，因此第一節與最後一節都是在討論米粒數的計算（以 2 爲底數）；課程中的活動目標透過學生熟悉的內容，以 10 爲底的正整數、生活的用語、計算過程與結果的對照，發現指數律的記錄與方便性，而非抽象地呈現代數符號的計算或記錄。

教學過程是先讓學生自我發覺現象，再做性質的討論與說明，所以 a^n 的意義，會限制在指數 n 爲自然數，底數 a 爲正數的範圍內。

以往部分教材會將指數律與科學記號分在不同的兩個單元，但是由於我們限制指數 n 爲自然數，有利於呈現很大的數，以科學記號表示的優點，且能讓學生藉由以 2、10 爲底數間不同的轉換來做大小的估算與比較。

教材說明

◎ 第一節課（P2～5）

藉由閱讀文章及討論來思考大臣們與國王在想什麼？讓同學發表他們的看法，以引起動機。透過大臣們想出解決的方法，來找出有效的記錄方式。如 5 連乘 3 次，可以表示成 5^3，其中 5^3 讀作五的三次方，5 稱爲底數，右上角的 3 稱爲指數，用來表示連乘的次數。

◎ 第二節課（P6～8）

以實際數值例子作爲學習主要的媒介，不過度強調抽象化的表徵方式。利用新聞中的「兆」是多大，與清朝《數理精蘊》的文句「萬億爲兆」來進行以 10 爲底數的乘法運算，再藉由許多生活中的案例，經由運算練習，來發現乘法指數律 $a^m \times a^n = a^{m+n}$、除法指數律 $a^m \div a^n = a^{m-n}$。

◎ 第三節課（P9～10）

透過運算練習，引入另外一個跟指數有關的運算規律 $(a^m)^n = a^{m \times n}$。並藉由一個被創造出來的大數，10^{100}，古戈爾（英語：googol），及 GOOGLE 相關的小故事，以討論這個數有多大，再利用指數有關的運算規律，進行數的計算與比較。

◎ 第四節課（P11～15）

透過計算機的使用，協助學生使用計算機計算次方的值。常見的計算機有簡易型與工程型，可以兩種都讓學生試試看，使學生進而感受生活中非常大的數，以用科學記號表示的需求性（註）。並練習將一些生活或科學中的大數字用科學記號表示。

最後的活動連結回第一節課的故事，藉由以 2 爲底數和以 10 爲底數的兩種表示法，找出一種估算的方式以解決問題。

註：計算機運算結果的顯示，由於機件顯示器的欄位限制，業者引用科學記號，並由於各廠牌設計不同，而有不同的呈現方式。

模組架構

(一)教學模組架構概述。

1. 教材僅處理到指數為正整數的次方，指數為 0 或負整數則另外討論，或作為延伸學習的內容。
2. 教材介紹 $a^b \times a^c = a^{b+c}$、$a^b \div a^c = a^{b-c}$、$(a^m)^n = a^{m\times n}$ 三種同底數時的指數律。將 $(a\times b)^m = a^m \times b^m$ 視為延伸學習的內容，未放入此次教材中。
3. 在此利用計算機來算指數為正整數的次方的值，並藉以介紹出科學記號表示法。本教材僅用以表達很大的數，很小的數待學過指數為 0 或負整數的次方時，再進行教學即可。
4. 利用 $2^{10} = 1024 \fallingdotseq 1000 = 10^3$ 來估算以 2 為底數次方值的大小。

(二)課程前後安排的銜接說明，與相關之能力指標分年細目。

1. 前置經驗

1-n-01　能認識 100 以內的數及「個位」、「十位」的位名，並進行位值單位的換算。

2-n-01　能認識 1000 以內的數及「百位」的位名，並進行位值單位換算。

2-n-03　能用＜、＝與＞表示數量大小關係，並在具體情境中認識遞移律。(同 2-a-01)

2-n-06　能理解乘法的意義，使用×、＝做橫式紀錄與直式紀錄，並解決生活中的問題。

2-a-03　能在具體情境中，認識乘法交換律。

3-n-01　能認識 10000 以內的數及「千位」的位名，並進行位值單位換算。

4-n-01　能透過位值概念，延伸整數的認識到大數(含「億」、「兆」之位名)，並做位值單位的換算。

4-n-06　能在具體情境中，對大數在指定位數取概數(含四捨五入法)，並做加、減之估算。

4-n-07　能理解分數之「整數相除」的意涵。

5-n-01　能熟練整數乘、除的直式計算。

5-n-03　能熟練整數四則混合計算。

5-n-06　能用約分、擴分處理等值分數的換算。

6-a-03　能用符號表示常用的公式。

7-n-07　能熟練數的運算規則。

2. 銜接概念

7-n-12　能用科學記號表示法表達很大的數或很小的數。

7-n-02　能理解因數、質因數、倍數、公因數、公倍數及互質的概念，並熟練質因數分解的計算方法。

8-a-01　能熟練二次式的乘法公式。

8-a-04　能熟練多項式的加、減、乘、除四則運算。

8-a-05　能理解畢氏定理（Pythagorean Theorem）及其應用。（同 8-s-08）

8-a-06　能理解二次多項式因式分解的意義。

8-a-07　能利用提公因式法分解二次多項式。

（三）與其他領域、科目的連結。

自然領域

連結自然領域 2-4-4-6 瞭解原子量、分子量、碳氫化合物的概念。

例如：八年級下學期理化介紹「原子量與莫耳」內容之中，即有使用科學記號。

核心素養指標

數-J-A2

能執行基本的有理數、根式、平面坐標系之操作，能以符號代表數或幾何物件，執行基本的運算與推論，並在生活情境或可理解的想像情境中，用數學表述與解決問題。

數-J-B1

能熟練地操作代數式，認識數量或幾何中的數學關係，並用以描述情境中的現象。在經驗範圍內，以數學語言表述平面與空間的基本關係和性質。理解生活中的不確定性，並以基本的統計量與機率描述其程度。

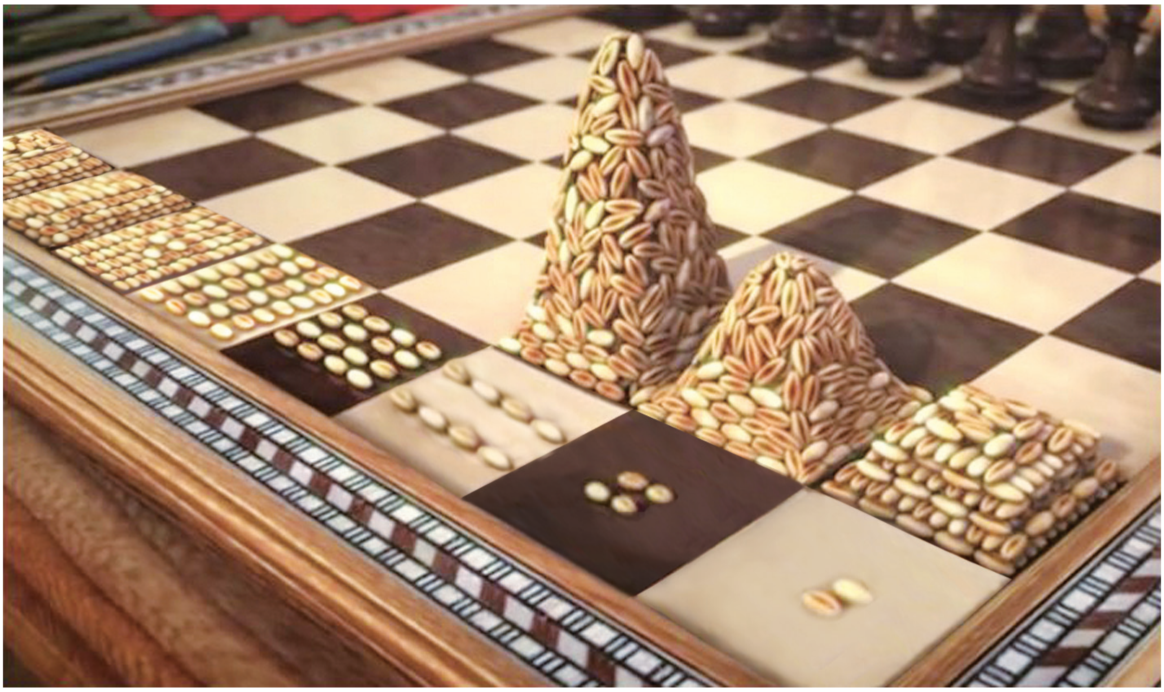
數-J-B2

知道計算器的數學運算功能，知道其適用性與限制，認識其與數學知識的輔成價值，並能用以執行數學程序。能認識統計資料的基本特徵。

數-J-C3

在適當的課題與時機，知道數學發展的全球性歷史與地理背景。

1 某種記錄方法



很久以前，在現今的印度，住著一位很有智慧的人。這個智者創造西洋棋的遊戲，國王非常喜愛智者所發明的遊戲。

國王對智者說：「你想要什麼作為獎賞？」

智者鞠躬並說道：「能為陛下您服務，這件事對我來說就已經是獎賞了。」

「但是我希望你能得到實質的獎賞。」國王用嚴厲的聲音說。「你得選擇一個獎賞！」

智者沉默了很久，「好的，陛下」智者終於說了：「我僅有一個要求，就是明天時，請國王您在棋盤的第 1 個方格上，賜給我 2 粒米；隔天，在第 2 個方格上，賜給我 4 粒米；第 3 天，在第 3 個方格上，賜給我 8 粒米；第 4 天，在第 4 個方格上，賜給我 16 粒米；⋯⋯。就這樣每 1 個方格上，都賜給我前一天 2 倍的米粒，直到棋盤所有格子上都放了米為止。」

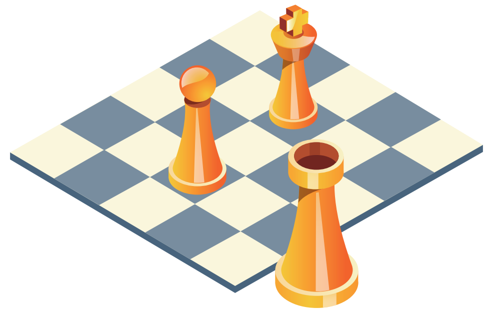
搭配學生手冊 P2

■ 本篇故事取自網路內容並經改寫，主要變更在於將第 1 天放的米粒數由 1 粒米改為 2 粒米，讓孩子在後面的內容可以跟 2^1 對應，第 2 天的 4 粒米可以和 2^2 對應，……，避免學生記錄天數與米粒數時產生混淆。這段五百多字的文字可以讓學生在上課前 5 分鐘，自行閱讀。

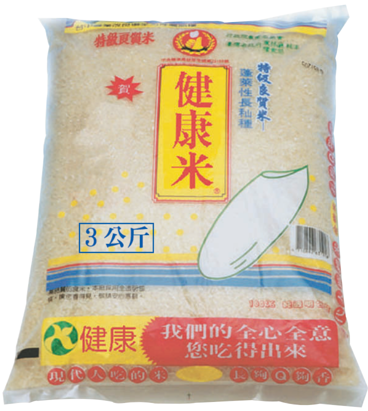
■ 「國王的棋盤」是一個關於一粒米的古老故事，也是一個充滿數學驚奇與趣味的故事 。探討級數倍增的威力到底有多驚人？除了數學趣味外，作者 David Birch 還突顯了人性的優缺點，帶上了施捨的眞義，賦與這個故事可愛的結局。

■ 參考網址為網路上翻譯的內容：
http://story999.pixnet.net/blog/post/5051445-%E5%9C%8B%E7%8E%8B%E7%9A%84%E6%A3%8B%E7%9B%A4

國王與在場的每一個人都感到很好奇，到最後會有多少粒米在棋盤上呢？他想像著棋盤上的米粒：「1、2、3、4、5、……、共有 64 個格子。到最後的米會有 1 公斤重嗎？」國王可不確定。



此時皇后對國王輕聲說：「最簡單的方式就是直接問智者一共需要多少米？」



國王怎能顯露出他有不確定的事呢？在這樣的自尊心作祟下，他大方地對智者說：「你的要求已被允許了。」

這件事引發了大臣與貴族們的一陣笑聲，討論著智者與他的古怪要求。

如上圖，你認為在一般大賣場可見的每 3 公斤一袋的米，夠不夠應付智者的要求呢？

搭配學生手冊 P3

■ 教師在學生閱讀時或閱讀後，可以提出以下幾個問題來了解學生是否有閱讀。

1. 這位智者發明什麼遊戲？
   參考答案：西洋棋
2. 他的棋盤有多少個格子？
   參考答案：64 格
3. 智者提出什麼樣的要求？
   參考答案：每一個格子都賜給我前一天數量兩倍的米粒，直到棋盤上所有格子都放了米爲止。
4. 第 1 天幾粒米？第 2 天幾粒米呢？
   參考答案：第 1 天 2 粒，第 2 天 4 粒
5. 一般大賣場所賣的 3 公斤袋裝米，夠不夠應付智者的要求呢？
   參考答案：此爲開放性問題，可讓學生提出自己的想法。
   例如：智者要的很多嗎？那是多少呢？智者要的很少，你看第 1 天才 2 粒米。

■ 本教材在實驗的班級中，班上只有兩位學生舉手表示夠，約 20 位左右舉手表示不夠。

■ 教具與設備：
教師如果希望能在課堂中引起學生討論的效果，可準備一袋市售賣場賣的米，是個有趣的引入。若有其他考量，使用照片呈現即可。

國王為了方便負責的士兵知道每天要拿多少粒米，因此請大臣們一起商量如何記錄。

甲大臣說：「先幫負責的士兵算好米粒數。第 1 天，2 粒米；第 2 天，4 粒米；第 3 天，8 粒米；第 4 天，16 粒米，依此記錄下去即可。」

乙大臣說：「只要列出算式，負責的士兵們就可以算出來。第 1 天，2 粒米；第 2 天，2×2 粒米；第 3 天，2×2×2 粒米；第 4 天，2×2×2×2 粒米，依此記錄下去即可。」

丙大臣說：「我這邊想到一種記錄方式，只要負責的士兵能了解這個方法就可以。」

第 1 天，記為 2^1 粒米；第 2 天，2×2 記為 2^2 粒米；第 3 天，2×2×2 記為 2^3 粒米；第 4 天，2×2×2×2 記為 2^4 粒米，依此記錄下去。」

任務 1

請分別依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，完成以下的問題與討論。

1. 完成以下表格：

	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天	第 9 天	第 10 天	第 11 天
甲大臣	32	64	128	256	512	1024	2048
乙大臣	2×2×2 2×2	2×2×2× 2×2×2	2×2×2 2×2×2×2	2×2×2× 2×2×2× 2×2	2×2×2× 2×2×2× 2×2×2	2×2×2×2 2×2×2×2 2×2	2×2×2×2× 2×2×2×2× 2×2×2
丙大臣	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}

2. 依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，記錄第 20 天時所需要的米粒數。請寫出不同記錄方式的優缺點。（參考答案參見教師手冊 P11）

   甲大臣：

   乙大臣：

   丙大臣：

3. 如果你是國王，你會喜歡哪一種記錄方式呢？請寫出算式或是理由來支持你。

搭配學生手冊 P4

■ 提供 3 位大臣不同的記錄方式，讓學生討論各方式的優缺點。

甲大臣：將實際的值計算出來。

乙大臣：將計算的算式記錄起來。

丙大臣：想一個較爲有效的記錄方法，簡記算式。

■ 任務 1

第 1 題：藉由表格的完成，可以確定學生是否理解甲、乙、丙三位大臣的記錄方式，並透過實際的數字計算操作，發現三位大臣的差異。若能讓學生計算到 2 的 11 次方，對於他們以後在使用 2 的次方相關數值，會比較熟悉。

教學注意事項

(1)學生可能不熟悉表格的填寫，教師可以在黑板上先帶領孩子做前面第 5、6 天的記錄，確認學生理解三位大臣的做法，或須再解釋題意，讓學生能順利完成表格。

(2)由於表格的格子較小，部分學生寫乙大臣的記錄法時，寫的數字字級可能很小。

(3)學生在念多個 2 相乘時，可能會少唸或多唸一個 2，建議請他們寫出來。

第 2 題：乙、丙大臣的表格算容易完成，甲大臣的表格較具挑戰性。計算的工作量大，可以讓學生分組分工完成甲、乙、丙三位大臣的任務。

第 3 題：此題與第 2 題學生的回答可能類似，將前面的優缺點拿來當理由。鼓勵學生嘗試舉例或用算式說明，以培養學生的數學說理能力。

教學注意事項

可以考慮將第 2、3 題合併，部分學生認爲到第 20 天時，所需要米粒數，是容易表示（乙大臣）與計算（甲大臣），鼓勵學生想想最後一天的情形，讓學生認同丙大臣的方式。

■ 學生或許會提出使用計算機，告知將在後續的活動中，學習如何有效地使用計算機，目前的活動僅在讓學生質疑甲、乙大臣的方法，所以讓學生做計算的練習有利於後續的學習。

法國數學家笛卡兒(René Descartes，1596～1650)在 1637 年的著作《幾何學》中創立了一種與丙大臣相同想法的簡記方式。

一數連加數次時，可用乘法來簡記，例如：$5+5+5=5\times3$。

同樣的，一個數連乘數次時，有和丙大臣建議一樣的簡記方法。例如：5 連乘 3 次，即 $5\times5\times5$，可以表示成 5^3，其中 5^3 讀作五的三次方，5 稱為**底數**(或簡稱**底**)，右上角的 3 稱為**指數**，用來表示連乘的次數。

另外，相同數連乘的運算稱為**乘方**(或次方)。當乘方的指數為 1 時，通常省略不寫，例如：3^1 寫成 3。

任務 2

以下是國王的棋盤，請試著幫丙大臣記錄以下各天所需的米粒數。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)
(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)
(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)
(41)	(42)	(43)	(44)	(45)	(46)	(47)	(48)
(49)	(50)	(51)	(52)	(53)	(54)	(55)	(56)
(57)	(58)	(59)	(60)	(61)	(62)	(63)	(64)

1. 第 30 天
   2^{30}
2. 第 60 天
   2^{60}
3. 最後一天
   2^{64}

大臣們一面記錄，一面討論以下的問題。

任務 3

1. 第 4 天，需要 2^4 粒米，隔天，需要多少粒米？(請以 2 為底數的乘方表示)
   隔天爲第 5 天，答案爲 2^5。學生可能答 $2^4\times2$。
2. 第 9 天所需要米粒數是第 6 天所需要米粒數的幾倍？
   第 9 天爲第 6 天的 3 天後，$2\times2\times2=8$ 倍。

搭配學生手冊 P5

■ 指數符號是由法國數學家笛卡兒（René Descartes，1596～1650）在1637年的著作《幾何學》中創立了 x^3、x^4 等，但他以 xx 表示 x 的二次方。笛卡兒在數學界的貢獻很多，例如直角座標也是他的重要貢獻，在七年級下學期會有相關內容的介紹。本段文字引自 http://web.cc.ntnu.edu.tw/~495401219/page5.htm

■ 此頁正式引入指數的符號記錄方式，並介紹底數和指數。

教學注意事項：

(1)為加深學生對指數的印象，教師可以用拇指為譬喻說明「指數」。

(2)利用同學們在討論甲、乙、丙大臣第 1 天的寫法時，指出 2^1 中的指數 1 通常省略不寫，即 $2^1=2$。

■ 任務 2

透過棋盤的實物，讓學生了解棋盤的格子數，但本活動旨在讓學生練習次方的表示法。因此只要學生回答幾個小題即可。

■ 任務 3

(1)此部分的學習，在加深加廣學生對指數性質的認識問題。

(2)若時間允許，這兩題視為指數記法的延伸，以做為下一節「指數律」的課前準備，且此兩題跟後續的指數律乘法與除法也有相關。

第 1 題：

教學注意事項

(1)學生常見錯誤會寫 2^4+2^1，教師可以追問學生，是寫錯或是不懂其中 2 倍的概念。

(2)另一種常見錯誤是將 2^5 說成 2^4 的 5 倍。

第 2 題：

教學注意事項

(1)學生也可能會用任務 1 第 9 天、第 6 天記錄所得的值做除法運算。

(2)完成這個任務後，可以讓學生注意下列算式，

$$\frac{2^9}{2^6}=\frac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2\times2}=\frac{512}{64}=8$$

這樣的紀錄對於後面指數律的學習會有幫助。

(3)學生雖然能使用指數的記錄方式，但運算時仍回到實際數字運算，提醒老師要關注學生的指數運算能力發展，避免進階過快，造成學習困難。

(4)請留意學生手冊第 4 頁與第 5 頁的任務中，是否能順利使用指數進行運算，若學生有困難，請再回到具體數字的計算。

2 次方的運算

在臺灣，數字的位值由小到大會用到個、十、百、千、萬、億等名詞，這些名詞其實可以和 10 為底數的乘方相對應，在後續的學習中我們會討論。

【2014 年 7 月 30 日新聞】
審計部 29 日公布「102 年度中央政府總決算」報告書，經審計部審核，民國 102 年度審定歲入決算 1 兆 7304 億餘元。兆有多大呢？

名詞	實際數字	算式(以 10 連乘的運算)	以 10 為底數的乘方記錄
個	1		?
十	10	10	10^1
百	100	10 × 10	10^2
千	1000	10 × 10 × 10	10^3
萬	10000	10 × 10 × 10 × 10	10^4
十萬	100000	10 × 10 × 10 × 10 × 10	10^5
百萬	1000000	10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10	10^6
千萬	10000000	10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10	10^7
億	100000000	10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10	10^8
十億	1000000000	10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10	10^9
百億	10000000000	10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10	10^{10}
千億	100000000000	10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10	10^{11}
兆	1000000000000	10×10×10×10×10×10×10×10×10×10×10×10	10^{12}

表一

任務 1

1. 10^8 是幾位數？是 1 後面幾個 0？
   九位數，8 個 0。

2. 10^{12} 是幾位數？是 1 後面幾個 0？
   十三位數，12 個 0。

學生手冊 P6

搭配學生手冊 P6

■ 教師可先引導學生閱讀圖框中的新聞內容，討論「兆」的實際大小意義。

■ 在臺灣，數字的表達常用到個、十、百、千、萬、億等，整理這些名詞與實際數字的對照、讓學生理解他們與「以 10 爲底數的乘方」的關係。本教材顧及學生剛升上國一，才學完整數的四則運算，希望學生從第 6、7 頁的指數記錄樣式中，先練習以 10 爲底數的記錄方法，再發現可以用指數來處理相同底數的乘法與除法，而非讓學生直接以一般化的符號，得到運算規律。

■ 任務 0

讓學生透過表格的觀察，找到以 10 爲底數的乘法和大的數字位值的對應關係，課堂中留下最後一行的「兆」，讓學生依前面發現的規律完成。

■ 任務 1

讓學生透過表格，發現大數以 10 爲底數的乘方及位數的關係。

清朝《數理精蘊》記載的數字單位，由小到大依次為一、十、百、千、萬、億、兆、京、垓。萬以下是十進位，萬以後則為萬進位，即「萬萬為億、萬億為兆、萬兆為京、萬京為垓」。

任務 2

「萬萬為億」是指 1 萬的 1 萬倍為億，即 $10000 \times 10000 = 100000000$，也可利用以 10 為底數的乘方，參考上方的表格，記作 $10^4 \times 10^4 = 10^8$。請將下列各題的文字描述與運算，以 10 為底數的乘方記錄下來，並將「兆」、「京」、「垓」以 10 為底數的乘方表示。

1. 萬億為兆：$100000000 \times 10000 = 1000000000000$，可記作 $10^8 \times 10^4 = 10^{12}$。
   兆：1000000000000、$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$、$10^{12}$
2. 萬兆為京：$1000000000000 \times 10000 = 10000000000000000$，記作 $10^{12} \times 10^4 = 10^{16}$
   京：10000000000000000、
   $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$、$10^{16}$
3. 萬京為垓：
   $10000000000000000 \times 10000 = 100000000000000000000$，記作 $10^{16} \times 10^4 = 10^{20}$
   垓：100000000000000000000、$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$
   $\times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$、$10^{20}$

在小學時，3 個 2 相加與 4 個 2 相加，總共有 7 個 2 相加。可記作

$$(2+2+2)+(2+2+2+2)=2+2+2+2+2+2+2$$

或者

$$2 \times 3 + 2 \times 4 = 2 \times 7$$

那麼，3 個 2 相乘再與 4 個 2 相乘，總共有 7 個 2 相乘。可以怎麼記，想一想？

$$(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

或者

$$2^3 \times 2^4 = 2^7$$

你有發現什麼比較好的計算方法？

任務 3

試著計算下列以3為底數的乘法運算，並將答案以3為底數表示。

1. $3^2 \times 3^2$ 3^4
2. $3^5 \times 3^6$ 3^{11}
3. 3×3^4 3^5
4. 當兩個底數相同的乘方相乘時，指數之間有什麼關係嗎？
   指數乘法中得到的結果，其底數仍是一樣，指數是兩個指數的相加。

學生手冊 P7

搭配學生手冊 P7

■ 任務 2

透過清朝《數理精蘊》的文句，引入以 10 爲底數的乘法運算。

■ 目前對「兆」的定義仍有爭議。中華民國的《法定度量衡單位及其使用之倍數、分數之名稱、定義及代號》中，將代表一萬億（10^{12}）的「國際單位制」詞頭 tera 譯成「兆」。但《中華人民共和國法定計量單位》一書，將代表一百萬（10^{6}）的詞頭 mega 譯成「兆」；另《新華字典》中，「兆」的定義是「① 百萬，② 古代指萬億」。

■ 萬億：清朝《數理精蘊》記載的數字由小到大依次爲一、十、百、千、萬、億、兆、京、垓、秭、穰、溝、澗、正、載、極、恆河沙、阿僧祇、那由他、不可思議、無量大數，萬以下是十進位，萬以後則爲萬進位，即「萬萬爲億、萬億爲兆、萬兆爲京、萬京爲垓」。本段文字引自 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%85%86

■ 清 康熙皇帝（1654～1722）是一位很有作爲且關心科學技術的君主，不僅熱心學習新的科技知識，而且親自參加科學研究和實驗，這在封建帝王中可說是絕無僅有的。1712 年他命梅瑴成等編撰《律歷淵源》100 卷，於 1723 年編成印行。其中數學部分爲《數理精蘊》共 53 卷。

教學注意事項

(1)爲讓學生理解「萬萬爲億」，教師可以用九九乘法表來類比解釋「萬萬爲億」的意思，再寫下$10000\times10000=100000000$，並利用 $10^{4}\times10^{4}=10^{8}$ 的記錄方式做對照，參考第 1 小題的過程以方便任務 2 與其它小題的進行。

(2)學生對「垓」（讀音爲ㄍㄞ）是怎麼念會很有興趣，既然提到，老師可以指導其正確念法。

■ 利用任務 2 的紀錄與國小所學乘法的經驗，瞭解

$(2+2+2)+(2+2+2+2)=2+2+2+2+2+2+2$，

可記作 $2\times3+2\times4=2\times7$，再過渡到

$(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2)=2\times2\times2\times2\times2\times2\times2$，

可記作 $2^{3}\times2^{4}=2^{7}$。

■ 任務 3

教學注意事項

(1)由於學生可以得到「底數仍是一樣，指數則是兩個指數的相加」的結論，此處可再做抽象化的記錄「$a^{b}\times a^{c}=a^{b+c}$」，並請學生記錄在旁邊。

(2)部分學生對於「$3\times3^{4}=3^{5}$」算式的理解較易有困難，其難處通常沒有想到 3 是 3 的 1 次方，建議在教學中布題讓學生討論。

過去新聞報導中，曾出現很大且需運算的數，下面是利用以 10 為底數的記錄方式，請試著完成任務。

例如：某公司將半年的業績獎金 100000 元均分給 100 位員工，即 $100000\div100=1000$（元），記作 $10^5\div10^2=10^3$（元）。

任務 4

1. 新聞報導，這次威力彩頭獎金為 1 億元，由一家工廠的 100 位同事共同獲得，請問每人可分得多少元？

   $100,000,000\div100=1000,000$，$10^8\div10^2=10^6$

2. A 國目前國民人數約有 1000 萬人，如果 A 國負債約一兆元，請問 A 國平均每個人負債多少元？

   $1000,000,000,000\div10,000,000=100,000$，$10^{12}\div10^7=10^5$

在小學時，6 個 3 相加減掉 2 個 3 相加，會剩下 4 個 3 相加。可記作

$$(3+3+3+3+3+3)-(3+3)=3+3+3+3$$

或者 $$3\times6-3\times2=3\times4$$

那麼，6 個 3 相乘除以 2 個 3 相乘，會剩下幾個 3 相乘呢？可以怎麼記錄？

$$(3\times3\times3\times3\times3\times3)\div(3\times3)=\frac{3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3}=3\times3\times3\times3$$

或者 $$3^6\div3^2=3^4$$

你有發現什麼比較好的計算方法？

任務 5

試著計算下列以 5 為底數的除法運算，並將答案以 5 為底數表示。

1. $5^6\div5^2$

   $5^{6-2}=5^4$

2. $5^{12}\div5^4$

   $5^{12-4}=5^8$

3. 當兩個底數相同的乘方相除時，指數之間有什麼關係嗎？

   同底數兩數相除得到的結果，當底數一樣時，指數部分則是兩個指數相減。

搭配學生手冊 P8

■ 任務 4

教學注意事項

(1)題目要求「以 10 爲底數的乘方來做運算，並將答案以 10 爲底數的乘方表示。」但是建議教師先以實際數字運算，再改用以 10 爲底數的乘方做運算並表示結果。

(2)與任務 2 的用意相同，利用 $100000\div100=1000$ 與 $10^5\div10^2=10^3$ 的相互對照來呈現指數律，因此，這兩題都要提醒學生，寫下指數除法的記錄。

(3)都是除法的概念，以學生的反應來看，從加法指數律進到減法指數律要有充分的鋪陳，並給學生足夠的時間去熟練。

■ 利用任務 4 的紀錄與小學階段所習得的除法的知識，

$(3+3+3+3+3+3)-(3+3)=3+3+3+3$，可記作 $3\times6-3\times2=3\times4$，過渡到

$(3\times3\times3\times3\times3\times3)\div(3\times3)=\dfrac{3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3}=3\times3\times3\times3$，

可記作 $3^6\div3^2=3^4$。

■ 任務 5

教學注意事項

(1)當學生得到「底數仍是一樣，指數部分則是兩個指數相減」的結論時，再做「$a^b\div a^c=a^{b-c}$」的抽象化記錄，並請學生記錄在旁邊。

(2)因爲學生若能掌握指數的乘、除法，就足以解決國王的問題，故本教材未處理指數爲 0、指數爲負整數等情況。若學生能快速操作兩個同底數的數的乘除運算，或許可討論本教材沒呈現的部分，如以下加深加廣的任務。

加深與加廣任務

1. 請計算 $5^3\div5^3$。$5^3\div5^3=1$（同數相除等於1），$5^3\div5^3=5^0$（依據前面學過的指數律）
2. 依照前面所發現的運算規律，$5^3\div5^3=5^{3-3}=5^0$，和你運算的結果相等嗎？
3. 依照前面所發現的運算規律，$10^4\times10^0=10^{4+0}=10^4$，你認爲 10^0 的值爲多少？
4. 請計算 $5^2\div5^3$。5^{-1}

教學注意事項

(1)學生的答案可能有以下兩類，$5^3\div5^3=1$（同數相除等於 1），$5^3\div5^3=5^0$（依據前面學過的指數律），這都是正確，只是考慮角度不同。

(2)$5^3\div5^3=5^1$（認爲兩數除法時，其指數也要相除而得到 1），教師需要再提醒指數律的使用。

(3)建議讓學生將前兩類結果並置比較，引導他們發現 $1=5^0$，且都是可同時存在的正確表示方式。例如：$2=2^1$ 也是類似的例子。

(4)第3題也是讓學生再一次發現 $10^4\times10^0=10^{4+0}=10^4$，$10^4\times1=10^4$，來強化 $10^0=1$，但是若學生的理解力較弱，教師也可以採用其他的策略來說明。

(5)其他策略：建議提供 10 的次方表格，讓學生一路從 10 的 3 次方、2 次方、1 次方的數值變化規則，去推論 10 的 0 次方，甚至到負整數次方。

(6)指數爲 0 的情況及指數爲負整數的討論比較抽象，對學生的學習較爲困難，需要較多的時間討論與體會，可留待學生對指數除法熟悉時，再來處理。

在 14 世紀，歐洲數學家雷姆(Nicole Oresme，1323～1382)引用指數律中的加法律和乘法律來處理幾何和物理的問題。透過前面學習的指數律，對以下問題嘗試作運算。

任務 6

試計算下列算式，並在各式的(　)與□中，填入正確的數：

1. $(5^4)^2=(\quad)\times(\quad)=5^{\square}$

   $(5^4)^2=(5^4)\times(5^4)=5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5=5^8$

2. $(2^3)^4=(\quad)\times(\quad)\times(\quad)\times(\quad)=2^{\square}$

   $(2^3)^4=(2^3)\times(2^3)\times(2^3)\times(2^3)$

   $=(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2)=2^{12}$

3. 觀察以上的運算，你發現了什麼？請你舉例說明。

   得到的數，當底數一樣時，指數則是兩個相乘。

4. $(10^5)^3=10^{\square}$

   $(10^5)^3=10^{15}$

5. $(10^3)^5=10^{\square}$

   $(10^3)^5=10^{15}$

6. $(10^5)^3$ 與 $(10^3)^5$ 的計算結果是否相同，請寫出算式或理由來說明。

   $10^5\times10^5\times10^5=10^{15}=10^3\times10^3\times10^3\times10^3\times10^3$

學生手冊 P9

搭配學生手冊 P9

■ 引用指數律中的運算規律可以簡化我們的計算，並用來處理幾何和物理的問題。本頁的活動是爲了引入另一個跟指數有關的運算規律。

■ 到了十四世紀，歐洲的數學家奧雷姆（Nicole Oresme，1323～1382）在指數方面的研究已有有理指數和實數指數的概念，他並引用指數律中的加法律和乘法律來處理幾何和物理的問題。本段文字引自 http://web.cc.ntnu.edu.tw/~495401219/page5.htm

■ 任務 6

教學注意事項

⑴直接讓學生自行探索任務 6，他們會無法理解括號要填什麼？教師在第⑴小題，可以引導學生一起完成，例如：問（ ）×（ ），哪兩個一樣的數自己乘自己，這樣最後幾個 5 連乘，所以 $5^{\square}$ 的□要填多少。

⑵再讓他們自行挑戰第⑵小題。並且引導學生觀察 $(5^4)^2=(5^4)\times(5^4)=5^8$、$(2^3)^4=(2^3)\times(2^3)\times(2^3)\times(2^3)=2^{12}$ 的紀錄來回答第⑶小題。

⑶學生會將 5^4 讀作五的四倍，教師要提醒次方的讀法，並釐清四倍與乘四次的不同。

⑷由於學生可以得到「底數仍是一樣，指數則是兩個相乘」的結論，此處可再做抽象化的記錄「$(a^m)^n=a^{m\times n}$」，並請學生記錄在旁邊。

現在的資訊科學和網路通訊，與指數律也息息相關。

美國數學家愛德華．卡斯納(Edward Kasner)在 1940 年創造 Googol 這個名詞，代表 10^{100}。根據網際網路搜索引擎谷歌(Google)公司公布的資料，Google 在 Googol 這個名詞上稍作微小的改變，藉以反映 Google 公司的使命，用以表示該公司在網路上擁有無邊無際的訊息資源儲存量。

任務 7

1. 某網路公司所做的統計，發現平均每天在網際網路上約新增加 10^{15} 位元的訊息量。若依此速度多久才會累積到 1 Googol 位元的訊息量？

   $10^{100} \div 10^{15} = 10^{85}$，$\dfrac{10^{100}}{10^{15}} = 10^{85}$（天）

2. 我們認識 1 Googol $= 10^{100}$，小華聲稱他創造一個很大的數叫做 100^{10}，請比較 10^{100} 與 100^{10} 的大小？並寫出算式或理由來說明。

   $100^{10} = (10 \times 10)^{10} = (10^{2})^{10} = 10^{20}$

   10^{20} 與 10^{100} 比較，$100^{10} < 10^{100}$

學生手冊 P10

搭配學生手冊 P10

- 任務7與本頁最後的問題，目標在認識一個發明出來的大數，古戈爾（googol），10^{100}，而且透過一些計算與比較來討論這個數有多大。

- 古戈爾（googol），又譯估勾兒、古高爾，指自然數 10^{100}，用電子計算器顯示是 1e100，即數字 1 後掛 100 個 0。這個單字是在 1938 年美國數學家愛德華•卡斯納（Edward Kasner）九歲的侄子米爾頓•西羅蒂（Milton Sirotta）所創造出來的。卡斯納在他的《數學與想像》（Mathematics and the Imagination）一書中寫下了這一概念。
  本段文字引自 http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%A4%E9%AB%98%E7%88%BE

- 任務 7
  可以視爲這部分指數運算規律的挑戰任務。

教學注意事項

(1)第 1 題可以用 facebook 爲例解釋訊息量的增加，此處需確認學生是否理解題意，因爲學生對於訊息量、位元等名詞很陌生。也可以換成「有個人很有錢，但是他的目標是有 1 Googol 的新臺幣，他的收入一年有 10^{15} 新臺幣，請問他要多少年可以達成願望？」這樣的問題學生會比較知道用除法概念來解題。

(2)大部分學生認爲 10 的 100 次方較大，少數認爲一樣大，不少學生具體列出很多 0，然後做判斷，可請學生說明以確定是否能運用指數律解題。

(3)建議可以提示相關運算規律 $(a^m)^n=a^{m\times n}$ 來解決這一題。

(4)提醒：10^{20} 遠小於 10^{100}，可以讓學生討論兩個相差多大。

- 到本頁結束，解決國王難題所需要的指數律都介紹完，考量時間及教材的連貫性，因此本教材沒有處理 $(a\times b)^m=a^m\times b^m$ 的內容。

加深加廣任務

請嘗試計算下列算式，在下列的□中，填入正確的數：

(1) $(3\times7)^3=(\quad)\times(\quad)\times(\quad)=[\quad]\times[\quad]=3^{\square}\times7^{\square}$

$(3\times7)^3=(3\times7)\times(3\times7)\times(3\times7)=[3\times3\times3]\times[7\times7\times7]=3^3\times7^3$

(2) $2^6\times5^6=[\quad]\times[\quad]=(\quad)\times(\quad)\times(\quad)\times(\quad)\times(\quad)\times(\quad)=\square^6$

$2^6\times5^6=[2\times2\times2\times2\times2\times2]\times[5\times5\times5\times5\times5\times5]$

$=(2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5)$

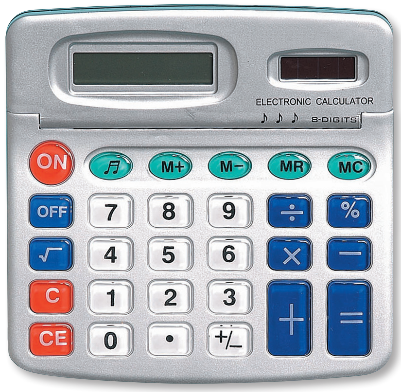
$=(2\times5)^6=10^6$

(3)說說看，你們發現什麼事？請你舉例說明。

$(a\times b)^m=a^m\times b^m$

3 計算機的使用

因為科技上的進步，以往複雜的計算現在可透過方便取得的計算機幫忙完成，請使用計算機，依指示做些小計算。（每臺計算機按鍵功能會有差異，可以請任課教師協助你。）



任務 1

拿出計算機，（參考答案參見教師手冊 P25）

1. 先按 $\boxed{10}$，再按 $\boxed{\times}$，接著按 $\boxed{=}$ 1 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

2. 歸零後，先按 $\boxed{10}$，再按 $\boxed{\times}$，接著按 $\boxed{=}$ 6 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

3. 歸零後，先按 $\boxed{10}$，再按 $\boxed{\times}$，接著按 $\boxed{=}$ 25 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

搭配學生手冊 P11

■ 本頁的活動目標在計算機的使用，主要是指導孩子計算乘方的值。由於計算機有簡易型與工程型，可以兩種都讓學生試試看。

■ 教具與設備：電腦的小算盤，單槍投影機及手機中的計算機軟體。

■ 任務 1

在這個活動中可以讓學生了解自己的計算機是否方便使用，也可以確認功能是否合適我們的討論。

參考答案：1. 因爲計算機的不同，按照學生手冊第 11 頁的指示操作計算機，8 位學生的計算機出現 100，2 位出現 error，12 位出現 10。

2. 出現 10,000,000，請學生寫成 10^7，討論按 $\boxed{=}$ 幾次的意義。

3. 可以先請學生猜猜看，出現的結果。請同學上台操作小算盤，可以看到數字的變化，螢幕顯示 1・e+26，與同學討論 1・e+26 與 10^{26} 的關係。

教學注意事項

(1)因每臺計算機按鍵功能會有差異，任課老師可以個別瞭解學生的按鍵使用方式。在第 1 題討論可以跟學生溝通，我們採用的計算機要出現 100 的才可以。

(2)按＝幾次等同×10 幾次，那學生可能會覺得少乘一個 10，那個 10 在一開始就輸入。

(3)需提醒學生把手機轉成靜音，以免影響上課。

(4)有的計算機可能得到 error，那是位數不夠顯示，這種計算機在完成我們的任務就會產生問題。

(5)這個活動希望每位學生都可以操作自己的計算機，但是由於各個不同型號計算機的按鍵功能不同，顯示位置視窗的大小及計算機內部的計算也會影響到螢幕顯示的情況，請老師酌情使用。若有困難，建議取電腦或手機兩種計算機呈現即可。

(6)電腦裡小算盤程式：做乘方的運算，可以先按底數，按×，接著按＝的次數少一得到。若選擇工程型，可以先按底數，再按 xy 與指數來得到運算結果。由於電腦可以顯示的位置較多，所以除非到 20 位數以上，否則還不會有次方的符號出現，均會計算出正確的值。

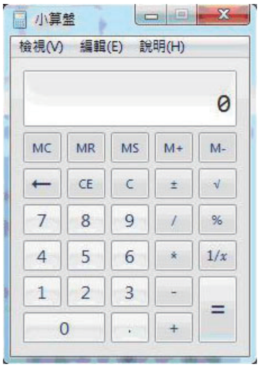
(7)手機的計算機：先按底數，再按×及 2，重複次數（螢幕呈現如 2×2×2×…×2），按＝得到乘方的值。若選擇工程型，可以先按底數，按 ^ 與指數來得到運算結果。顯示的位置較少，因此在 13 位數後，就會顯示次方，並且作四捨五入的動作。

你知道第 40 天，國王要放多少粒米在棋盤上嗎？你可以試著用手邊的計算機，算算看，並嘗試回答下面的問題。（你用的是哪一種計算機呢？電腦中的小算盤或是手機中的計算機？）

任務 2

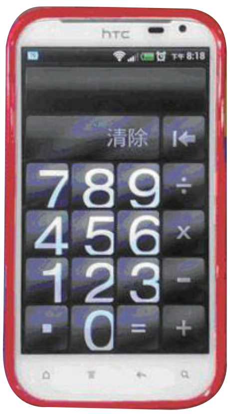
以計算 2^{40}（2 的 40 次方）為例：

❶ **標準型計算機**



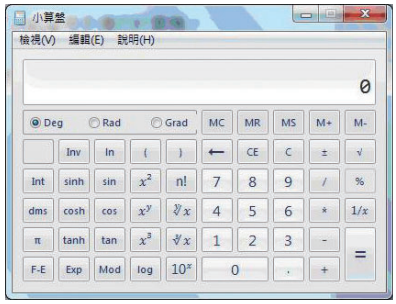
先按 $\boxed{2}$ ，再按 $\boxed{*}$ ，接著按 $\boxed{=}$ 39 次，即可以得到運算結果。

❸



先按 $\boxed{2}$ ，再按 $\boxed{\times}$ 及 $\boxed{2}$ ，重複 39 次（螢幕呈現如 $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times\cdots\times2$），按 $\boxed{=}$ 即可以得到運算結果。

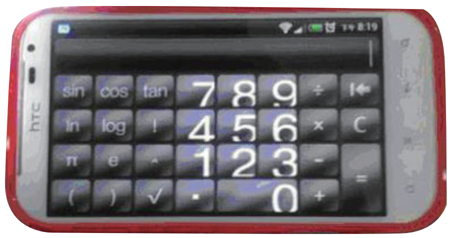
❷ **工程型計算機**



先按 $\boxed{2}$ ，再按 $\boxed{x^y}$ ，接著按 $\boxed{40}$ ，按 $\boxed{=}$ ，即可以得到運算結果。

在此計算機中，先輸入的數字為 x（代表底數），後輸入的數字為 y（代表指數）。

❹



先按 $\boxed{2}$ ，再按 $\boxed{\wedge}$ ，接著按 $\boxed{40}$ ，按 $\boxed{=}$ ，即可以得到運算結果。

搭配學生手冊 P12

■ 本頁讓學生練習用計算機計算第 40 天國王要放多少粒米在棋盤，但由於運算的結果因計算機的種類不同，在螢幕上會有不同的結果呈現，藉以引出科學記號的表示。

■ 任務 2

教學注意事項

(1)電腦上的小算盤可以透過單槍投影在螢幕上，當學生按到出現次方時，會特別有感覺數字的變化。只是其他計算機或手機的呈現比較困難，若能搭配實物投影機，學生就能看到兩者間的呈現，會更方便討論。

(2)電腦的呈現，小算盤太小，可以把解析度調整。

(3)課本提供的四種計算得到的結果。

① 電腦小算盤（基本型）：按 2× 加上＝39 次，按到不知道自己按幾次啦！

② 電腦小算盤（工程型）：按 2、x^y、40，得到 1099511627776

③ 手機軟體（基本型）：按 2×2×2×⋯×2，40 個連乘，按太久啦！

④ 手機軟體（工程型）：2 ^ 40，可以得到 1.099512e12

1.099512e12、1.099511627776×10^{12} 與 1099511627776 這三個數字相同嗎？

不同計算機的顯示方式有所不同，雖然 1.099511627776×10^{12} 與 1099511627776 這個十三位數相同，但受限於不同機型，顯示為 1.099512e12，此為近似值，數字最右邊的 **e12** 指的就是乘上 10^{12}（以 10 為底數時，指數為12）。

你可以對一個數取四捨五入到很大的位數，也可以到很小的位數，就看你想要多準確。2^{40}＝1099511627776，這個數字寫在書上容易，但是要記住就很痛苦。為了讓此類數字容易記憶，可以將它四捨五入。

1099511627776 → **1099512**000000 取七位有效數字，在前七位數之後的數都變成零，精確度99.99999%。

1099511627776 → **11**00000000000 取兩位有效數字，在前兩位數之後的數都變成零，精確度99%。

1099511627776 → **1**000000000000 取一位有效數字，在前一位數之後的數都變成零，精確度90%。

其實 1100000000000 已經很精確，因此通常很大的大數我們會四捨五入到兩位有效數字。而下表是我們進一步使用指數的記錄方式來呈現 1100000000000 成為 1.1×10^{12} 的演變過程。

原本數字的簡單運算				指數的記錄方式		
1100000000000	×	1	=	1100000000000	×	1
110000000000.0	×	10	=	110000000000.0	×	10^{1}
11000000000.00	×	100	=	11000000000.00	×	10^{2}
1100000000.000	×	1000	=	1100000000.000	×	10^{3}
110000000.0000	×	10000	=	110000000.0000	×	10^{4}
11000000.00000	×	100000	=	11000000.00000	×	10^{5}
1100000.000000	×	1000000	=	1100000.000000	×	10^{6}
110000.0000000	×	10000000	=	110000.0000000	×	10^{7}
11000.00000000	×	100000000	=	11000.00000000	×	10^{8}
1100.000000000	×	1000000000	=	1100.000000000	×	10^{9}
110.0000000000	×	10000000000	=	110.0000000000	×	10^{10}
11.00000000000	×	100000000000	=	11.00000000000	×	10^{11}
1.100000000000	×	1000000000000	=	1.100000000000	×	10^{12}

表二

搭配學生手冊 P13

■ 這個問題與前面一頁的任務相關，目標在引出科學記號表示法，發現科學記號與次方的關係。

■ 1099511627776，1.099512e12 一樣嗎？學生大部分覺得一樣，但是也有學生指出 1.099512e12 是已經四捨五入取的近似值。可以讓學生討論對於 1099511627776 這樣的數，1.099512e12 將 627776 進位是否合適。62 萬進位到 100 萬，對 1099511627776 來說影響大嗎？以比例來說 627776 占 1099511627776 比例非常低。

■ 當計算機想表達大數目時，通常會發生問題，例如：1.1×10^{12}，計算機不能顯「×」，也不可能在 10 的右上角顯示一個小數目 12，結果顯示為 1.1E12。E 後面的數字告訴你要小數點要移動幾位，E12 與 10^{12} 一樣。當然如果你用的是個運算記憶體不足夠的計算機，也會顯示 E，卻沒有其他數字，這種情況下代表錯誤 ERROR。

■ 延續前一頁的活動，利用計算機得到的結果 1099511627776，1.099512e12 一樣嗎？對於 1099511627776 這樣的數，1.099512e12 將 627776 進位是否合適。62 萬進位到 100 萬，對 1099511627776 來說其實影響不大。

■ 在表二之前的文字是為了鋪陳科學記號的表示法，並且只要看 1～2 位的有效數字。透過表二讓學生觀察 1100000000000 與 1.1×10^{12} 的變化。從圖表的整理討論科學記號的引入。

教學注意事項

⑴當遇到像 1100000000000 這種很多 0 的數時，我們如何可以快速確定位數呢？為了讓我們知道數有多大，我們可以每三數之間加上一小撇，寫成 1,100,000,000,000，這是個十三位數。

⑵後面乘的數每多一個 0，就要把小數點向左移 1 位，例如：1100000000000，寫出前幾位數，在第一位數後面加上小數點寫成 1.1，再計算位數為十三，$13-1=12$，把它寫起來 1.1×10^{12}。

⑶$1.1\times10^{12}$ 與 1099511627776 作比較，是否覺得既簡潔又好讀呢？

為了後面的計算與討論，我們將記錄方式以四捨五入取到小數點後一位，寫成 1.1×10^{12}。而在日常生活中，出現很大的數的情形越來越普遍，能以方便、精簡的方式去呈現這些數，也顯得越來越重要。

把一個正數表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqq a<10$ 且 n 為整數，則 $a\times10^n$ 就是這個數的科學記號表示法。

當一個很大的數不易用一般的方式表現時，我們會採用科學記號表示，計算機亦然。

任務 3

請將下列科學或生活新聞中的大數字，用科學記號表示：

1. 蘋果公司股價在 2014 年 7 月 28 日上漲 1.38%至 99.02 美元，市值達到 5929.18 億美元，約新臺幣 17.78 兆元。請以科學記號表示 17.78 兆。

   $17.78\times10^{12}=1.778\times10^{13}$

2. 「富比世」雜誌今天公布臺灣 50 大富豪名單，旺旺集團主席蔡衍明今年以新臺幣 2784 億元資產，連續第 3 年名列臺灣首富。請以科學記號表示 2784 億。

   $2784\times10^{8}=2.784\times10^{11}$

根據上述資料，比較蘋果公司與旺旺集團主席蔡衍明誰較有錢呢？

任務 4

1. 請比較 17.78 兆與 2784 億的大小，誰比較大？

   兆比億大，2784 比 17.78 多，到底誰比較大，17.78 兆＞2784 億

2. 請比較 1.778×10^{13} 與 2.784×10^{11} 的大小，誰比較大？

   14 位數比 12 位數大，所以 $1.778\times10^{13}>2.784\times10^{11}$

   $10^{13}>10^{11}$，所以 $1.778\times10^{13}>2.784\times10^{11}$

學生手冊 P14

搭配學生手冊 P14

■ 把一個正數表示成 $a\times10^n$ 的形式，其中 $1\leqq a<10$ 且 n 為整數，則 $a\times10^n$ 就是這個數的科學記號表示法。

■ 教學注意事項：
1.1×10^{12} 還是 11×10^{11} 好呢？溝通方便，又容易看到位數，且沒有其他的寫法造成影響。

■ 任務 3

教學注意事項

(1)這裡的練習，主要是寫成科學記號，其實可以提醒學生善用已經知道的單位如「兆」、「億」，即可以方便寫出。

(2)處理大數寫成科學記號，可以結合前面談到「個、十、百、千、萬、億」等，這些名詞以 10 為底數的乘方記錄。

(3)寫成科學記號時，可以輕易地看出位數，在比較大小時，以 10 為底數的指數來比較。因此任務 3 是為與後面的任務 4 相互連結。

■ 任務 4 是銜接前一個任務 3，處理科學記號的比較大小。以下兩個問題是同一個問題，主要就是想要讓學生感受科學記號在比較大小的實用性。

■ 任務 4

教學注意事項

(1)寫成科學記號時，可以輕易地看出位數，在比較大小時，可以看以 10 為底數的指數來比較。

(2)如果任務 4 的數字太大，可以先從 9000 與 10000 誰比較大開始。
9×10^3 與 1×10^4 誰比較大？
你怎麼判斷呢？

過了 20 天，國王跟智者提到說，每天讓他的大臣與士兵們計算米粒數與搬米，實在太累！一開始，大臣在計算米的數目，十分輕鬆，2 粒米、4 粒米、8 粒米、16 粒米、…，但越來越感到計算的困難。士兵們頭幾天在搬運米時，僅利用手指拈起數粒米就完成，但過了一、兩星期後光是數出需要的米粒就非常不耐煩。

大臣們請國王跟智者反應：「每天讓他的大臣與士兵們計算米粒數與搬米，實在太累！他們已經精疲力竭了，能不能用別的方式代替。」

任務 5

第 20 天時，國王要提供多少米粒數？能利用計算機以外的方法來估算第 20 天的米量嗎？

約 1 萬粒？約 10 萬粒？約 100 萬粒？還是約 1000 萬粒呢？（提示：$2^{10}=1024$）

約 100 萬粒

智者：「既然如此，我只拿最後一天的米就好了。」

任務 6

藉由第 20 天的米量，估算最後一天需要米多少粒？

學生可能的反應爲

甲：$2^{64}=2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{4}$

$\doteqdot1000\times1000\times1000\times1000\times1000\times1000\times16$

$=1{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000\times16=16\times10^{18}=1.6\times10^{19}$

乙：$2^{64}=2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{4}$

$\doteqdot10^{3}\times10^{3}\times10^{3}\times10^{3}\times10^{3}\times10^{3}\times16=16\times10^{18}=1.6\times10^{19}$

丙：$2^{64}=2^{20}\times2^{20}\times2^{20}\times2^{4}=1{,}048{,}576^{3}\times16$ 想說用指數律可以算出精確的值。

丁：1.6×10^{19}，20 位數，以 1×10^{19} 代替。

搭配學生手冊 P15

■ 回到本單元剛開始的故事，士兵們覺得無法負荷了，因此提出第 20 天的米到底有多少？以下的任務與問題就是要解決一開始國王的問題「1、2、3、4、5、……、共有 64 個格子。到最後會有 1 公斤重的米嗎？」或是我們在第 1 頁文末提的問題「一般大賣場賣 3 公斤一袋的米，夠不夠應付智者的要求呢？」

■ 任務 5 是個選擇題，鼓勵學生用估算來處理。

教學注意事項

⑴學生可以回溯前面第 2 頁的計算結果，1,048,576 或 2^{20}。

⑵學生也可能因提示誤導而計算，如 $2^{20}=2^{10}\times2^{10}=1024\times1024=1,048,576$。不過算出這個結果後，有學生會自動反應大概 100 萬，詢問他爲何這樣。生：「因爲這是個七位數，第一個數字是 1，而且對 100 萬來說，4 萬多還好。」

⑶提醒學生只要估算就好，大概是多少？

⑷這邊其實是一種估算的方式，但是沒有提醒，學生不容易想到。再提醒 $2^{10}=1024$ 接近 1000。

$2^{20}=2^{10}\times2^{10}=1024\times1024\fallingdotseq1000\times1000=10^{6}$。

■ 任務 6

教學注意事項

⑴可以提醒用前一題的結果估算就好。

⑵提醒：學生仍喜歡用 1000 去算，才用 10^{18} 記錄。教師宜提醒並鼓勵學生利用指數的運算，以免學生無法熟練指數律的使用。

還記得故事最後，國王的疑問嗎？「最後會有 1 公斤重的米嗎？」

任務 7

有一個小兵向國王報告：「50 粒米約 1 公克重。」

根據這個資料，請計算最後一天的米量有多重？

學生可能的回答；

甲：利用前一題的米量 16,000,000,000,000,000,000 或 1.6×10^{19} 來估算重量，

$1.6\times10^{19}\div50=160\times10^{17}\div50=3.2\times10^{17}$ 公克，$3.2\times10^{17}\div1000\div1000$

$=3.2\times10^{11}$ 公噸。

乙：利用前一題的米量 10,000,000,000,000,000,000 或 1×10^{19} 來估算重量，

$1\times10^{19}\div50=100\times10^{17}\div50=2\times10^{17}$ 公克，$2\times10^{17}\div1000\div1000$

$=2\times10^{11}$ 公噸。

丙：轉換成米粒數來比較

7 億公噸 $=7\times10^{8}$ 公噸 $=7\times10^{8}\times10^{3}$ 公斤 $=7\times10^{8}\times10^{3}\times10^{3}$ 公克

$=7\times10^{14}$ 公克，

$7\times10^{14}\times50=350\times10^{14}=3.5\times10^{16}$ 粒米。

任務 8

根據 2012 年統計的結果，全世界的稻作產量高達 7 億公噸。請問這足夠國王支付最後一天的米量嗎？如果不夠，約幾年才可以提供完畢？

7 億公噸 $=7\times10^{8}$ 公噸，$7\times10^{8}<3.2\times10^{11}$，不夠。

$$(3.2\times10^{11})\div(7\times10^{8})=\frac{3.2\times10^{11}}{7\times10^{8}}=\frac{32\times10^{10}}{7\times10^{8}}=\frac{32}{7}\times\frac{10^{10}}{10^{8}}$$

$=4.6\times10^{2}=460$ 年

搭配學生手冊 P16

■ 任務 7

教學注意事項

(1)這一題是總結前面最一開始的問題，很有挑戰性，教師宜留下足夠的時間讓學生討論及發表。

(2)建議讓學生利用前一個任務所得到的米粒數 1.6×10^{19} 表示，或 10,000,000,000,000,000,000 來估算。

(3)這題涉及到科學記號的除法與如何使用科學記號比較大小。

(4)學生對於單位換算需能清楚操作，公克換公斤、公斤換公噸。若需要，教師可以提醒學生。

■ 教具與設備：

如果想要增加眞實的測量，可以跟實驗室借電子秤來試著量量看米的重量，可視教學時間做調整。

■ 任務 8

教學注意事項

這題是本單元的延伸討論題，需要處理兩個科學記號的除法，可以視爲後續延伸科學記號乘法與除法的學習。

素養評量題目

※ 基測相關試題

1. 計算 $7^3+(-4)^3$ 之值爲何？
(A) 9　(B) 27　(C) 279　(D) 407
《100 基測 (一)》
【解析】
原式＝343－64＝279，故選(C)

2. 計算 $10^6\times(10^2)^3\div10^4$ 之值爲何？
(A) 10^8　(B) 10^9　(C) 10^{10}　(D) 10^{12}
《99 基測 (一)》
【解析】
求值式$=10^6\times10^6\div10^4=10^{6+6-4}=10^8$
故選(A)

3. 已知 $a=-3^4$，$b=(-3)^4$，$c=(2^3)^4$，$d=(2^2)^6$，則下列四數關係的判斷，何者正確？
(A) $a=b$，$c=d$　(B) $a=b$，$c\neq d$　(C) $a\neq b$，$c=d$　(D) $a\neq b$，$c\neq d$
《100 基測 (二)》
【解析】
$\because a=-3^4<0$，$b=(-3)^4>0$，$\therefore a\neq b$
$\because c=(2^3)^4=2^{3\times4}=2^{12}$，$d=(2^2)^6=2^{2\times6}=2^{12}$，$\therefore c=d$
故選(C)

4. 判斷 3^{12} 是 9^6 的幾倍？
(A) 1　(B) $\left(\frac{1}{3}\right)^2$　(C) $\left(\frac{1}{3}\right)^6$　(D) $(-6)^2$
《100 基測 (一)》
【解析】
$\frac{3^{12}}{9^6}=\frac{3^{12}}{(3^2)^6}=\frac{3^{12}}{3^{12}}=1$，故選(A)

5. 若 a、b 兩數滿足 $10^{2a+1}=1000^{b-1}=1000000000$，則 $a+b=$？

(A) 8　(B) 15　(C) $\frac{25}{2}$　(D) $\frac{43}{6}$

《97 基測 (二)》

【解析】

$\because\ 10^{2a+1}=1000^{b-1}=10^9=1000^3$

$\therefore \begin{cases} 2a+1=9 \\ b-1=3 \end{cases}$　得 $a=4$，$b=4$

因此 $a+b=4+4=8$，故選(A)

6. 用科學符號（即科學記號）可將 1234 表示成「1.234×10^3」。

若 A 的科學符號可表示成「1.23456×10^8」，則 A 爲幾位數？

(A) 6　(B) 7　(C) 8　(D) 9

《94 基測 (一)》

【解析】$1.23456\times10^8=123456000$，$A$ 爲 9 位數，故選(D)

7. 已知某公司去年的營業額爲四千零七十億元，則此營業額可用下列何者表示？

(A) 4.07×10^9 元　(B) 4.07×10^{10} 元

(C) 4.07×10^{11} 元　(D) 4.07×10^{12} 元　《101基測》

【解析】四千零七十億可寫成 407000000000，

$407000000000=4.07\times10^{11}$，故選(C)

8. 下列哪一個數值最小？

(A) 9.5×10^9　(B) 2.5×10^9

(C) 9.5×10^8　(D) 2.5×10^8

修改自《96 基測 (一)》

【解析】$2.5<9.5$，$10^8<10^9$，故選(D)

9. 下列哪一個式子計算出來的值最大？

(A) $8.53\times10^9-2.17\times10^8$　(B) $8.53\times10^{10}-2.17\times10^9$

(C) $9.53\times10^9-2.17\times10^8$　(D) $9.53\times10^{10}-2.17\times10^9$

《97 基測 (一)》

【解析】

由於減的數都不影響被減數的位數，只要比較被減數即可。

(A) $8.53\times10^9-2.17\times10^8$ 最小

(B) $8.53\times10^{10}-2.17\times10^9$ 次大

(C) $9.53\times10^9-2.17\times10^8$ 小

(D) $9.53\times10^{10}-2.17\times10^9$ 最大

※ **數學素養題**

1. 西元 1202 年，義大利數學家費波那契（L. Fibonacci）在他的《算盤書》（Liber abaci）中，寫道：「有七個婦人去羅馬旅行，每個人有七匹騾子，每匹騾子馱七口袋子，每口袋子裝七個麵包，每個麵包插七把小刀，每把小刀有七層刀鞘。」（以下的答案均請用次方表示）

(1) 請問總共有幾匹騾子?

$7\times7=7^2$

(2) 請問總共有幾口袋子?

$7\times7\times7=7^3$

(3) 請問總共有幾個麵包?

$7\times7\times7\times7=7^4$

(4) 請問總共有幾把小刀?

$7\times7\times7\times7\times7=7^5$

(5) 請問總共有幾層刀鞘?

$7\times7\times7\times7\times7\times7=7^6$

2. 中國古籍《孫子算經》（約西元 400 年著作）也有類似的記述：

「今日出門望見九隄，隄有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雛，雛有九毛，毛有九色，問每項各幾何？」

翻譯：出門時經過 9 座堤防，每座堤防上面種有 9 顆大樹，每棵大樹上有長出 9 根粗樹枝，每根粗樹枝上築有 9 窩鳥巢，每窩鳥巢裡有 9 隻大鳥，每隻大鳥育有 9 隻雛鳥，每隻雛鳥身上有 9 根羽毛，每根羽毛上有 9 種顏色。

(1) 請問有幾根粗樹枝？

【解析】

$9\times9\times9=9^3$ 根粗樹枝。

(2) 如何從粗樹枝的數量求得雛鳥的數量？

【解析】

$9\times9\times9=9^3$ 根粗樹枝，$9^3\times9\times9\times9=9^3\times9^3=9^6$ 隻雛鳥。

(3) 顏色的數量是粗樹枝數量的幾倍？

【解析】

$9\times9\times9=9^3$ 根粗樹枝，9^8 種顏色，$9^8\div9^3=9^5$ 倍。

3. (1) 有一百個人合開公司，每個人出資一百萬，請問該公司總共投資多少錢？

【解析】

$100\times1000000=100000000$，$10^2\times10^6=10^8$

(2) 公司獲利一千萬元，平分給一百個合夥人，請問每人拿到多少錢？

【解析】

$10{,}000{,}000\div100=100000$，$10^7\div10^2=10^5$

4. 在中文裡「大數」這個單位指的是 10^{72}，而「穰」這個單位則指的是 10^{28}，所以「一穰大數」指的是一穰個大數。

(1) 請將「一穰大數」用 10 的次方表示。

【解析】

$10^{28}\times10^{72}=10^{100}$

(2) 請問「大數」是「穰」的幾倍？

【解析】

$10^{72}\div10^{28}=10^{72-28}=10^{44}$

5. 在課文中，我們介紹了美國數學家愛德華・卡斯納（Edward Kasner）在 1940 年創造的古戈爾 Googol，代表 10^{100}。

現在我們介紹另一個大數小古戈爾，代表 2^{100}。

請問 10^{100} 是 2^{100} 的幾倍？

注意！此題需用到教師手冊中加深加廣任務的概念，需在進行過該任務後才適合使用此題作爲評量題目。

$$10^{100}\div2^{100}=\frac{10^{100}}{2^{100}}=\frac{10\times10\times10\times\cdots}{2\times2\times2\times\cdots}=(\frac{10}{2})\times(\frac{10}{2})\times(\frac{10}{2})\times\cdots\cdots=5^{100}$$

6. 在美國數學家愛德華・卡斯納之後，有人發明了一個更大的大數，古戈爾普勒克斯（googolplex）是 10 的古高爾次方：$10^{\text{googol}}=10^{10^{100}}$。

請討論 $10^{10^{100}}$ 與 $(10^{10})^{100}$ 的大小關係。

【解析】

$(10^{10})^{100}=10^{10\times100}=10^{1000}$，

10^{1000} 與 $10^{10^{100}}$ 比較，因爲底數相同，比指數的大小即可，

$10^{100}>10^3=1000$，所以 $10^{10^{100}}>(10^{10})^{100}$。

補充說明：

乘方的指數運算順序通常由上到下

正確：$a^{b^c}=a^{(b^c)}$

錯誤：$a^{b^c}=(a^b)^c=a^{b\times c}$

7. 小古戈爾，代表 2^{100}；有人仿造古戈爾普勒克斯（googolplex）發明了小古戈爾普勒克斯代表 $2^{2^{100}}$。請討論 $2^{2^{100}}$ 與 $(2^2)^{100}$ 的大小關係。

【解析】

$(2^2)^{100}=2^{2\times100}=2^{200}$，

2^{200} 與 $2^{2^{100}}$ 比較，因爲底數相同，比指數的大小即可，

$2^{100}>200$，所以 $2^{2^{100}}>(2^2)^{100}$。

補充說明：

乘方的指數運算順序通常由上到下

正確：$a^{b^c}=a^{(b^c)}$

錯誤：$a^{b^c}=(a^b)^c=a^{b\times c}$

8. 根據聯合國公布的資料顯示，全世界人口總數在 2012 年已經超過 70 億。古老歐洲有吸血鬼的傳說，如果吸血鬼吸了一個人的血，那個被吸血的人，也會變成吸血鬼。我們來試著挑戰一下「世界上有沒有吸血鬼」的證明。

假設一個吸血鬼，一個月只吸一個人的血，從 2012 年的 1 月開始，只有 1 位吸血鬼；2012 年的 2 月，就會有 2 位吸血鬼；2012 年的 3 月，就會有 4 位吸血鬼。

(1) 請將 70 億用科學記號表示？

【解析】

$70\times10^8=7\times10^9$

(2) 請估算一下，幾個月後，全世界的人都變成吸血鬼？

【解析】

$2^{10}>1000=10^3$，$2^{10}\times2^{10}\times2^{10}>10^3\times10^3\times10^3=10^9$，

$2^{10}\times2^{10}\times2^{10}=2^{30}$，需要 30 個月

$2\times2\times2\times2^{30}>7\times10^9$，$2\times2\times2\times2^{30}=2^{33}$，故需要 33 個月。

素養導向數學教材　/　曾世杰　主編
-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1.數學教育
2.中小學教育
3.教材與教法

素養導向國民中學數學教材：指數律 － 教師手冊
主 編 者：鄭章華
作　　者：曾明德、鄧家駿
（依姓氏筆畫順序排列）
發 行 人：柯華葳
出 版 者：國家教育研究院
編 審 者：十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組
召 集 人：曾世杰
副召集人：單維彰、鄭章華
編輯小組：古欣怡、朱安強、林美曲、林信安、馬雅筠、陳吳煜
陳淑娟、曾明德、曾俊雄、鄧家駿
（依姓氏筆畫順序排列）
版　　次：初版
電子全文可至國家教育研究院網站 *http: //www.naer.edu.tw* 免費取用

本書經雙向匿名審查通過
（歡迎使用，請註明出處）