

素養導向國民中學數學教材—— 指數律——國王的棋盤



國家教育研究院

十二年國民基本教育數學領域教材與教學模式研發編輯小組



單元

指數律

國王的棋盤



1 / 某種記錄方法



很久以前，在現今的印度，住著一位很有智慧的人。這個智者創造西洋棋的遊戲，國王非常喜愛智者所發明的遊戲。

國王對智者說：「你想要什麼作為獎賞？」

智者鞠躬並說道：「能為陛下您服務，這件事對我來說就已經是獎賞了。」

「但是我希望你能得到實質的獎賞。」國王用嚴厲的聲音說。「你得選擇一個獎賞！」

智者沉默了很久，「好的，陛下」智者終於說了：「我僅有一個要求，就是明天時，請國王您在棋盤的第 1 個方格上，賜給我 2 粒米；隔天，在第 2 個方格上，賜給我 4 粒米；第 3 天，在第 3 個方格上，賜給我 8 粒米；第 4 天，在第 4 個方格上，賜給我 16 粒米；……。就這樣每 1 個方格上，都賜給我前一天 2 倍的米粒，直到棋盤所有格子上都放了米為止。」

國王與在場的每一個人都感到很好奇，到最後會有多少粒米在棋盤上呢？他想像著棋盤上的米粒：「1、2、3、4、5、……、共有 64 個格子。到最後的米會有 1 公斤重嗎？」國王可不確定。

此時皇后對國王輕聲說：「最簡單的方式就是直接問智者一共需要多少米？」



國王怎能顯露出他有不確定的事呢？在這樣的自尊心作祟下，他大方地對智者說：「你的要求已被允許了。」

這件事引發了大臣與貴族們的一陣笑聲，討論著智者與他的古怪要求。



如上圖，你認為在一般大賣場可見的每 3 公斤一袋的米，夠不夠應付智者的要求呢？



國王為了方便負責的士兵知道每天要拿多少粒米，因此請大臣們一起商量如何記錄。

甲大臣說：「先幫負責的士兵算好米粒數。第 1 天，2 粒米；第 2 天，4 粒米；第 3 天，8 粒米；第 4 天，16 粒米，依此記錄下去即可。」

乙大臣說：「只要列出算式，負責的士兵們就可以算出來。第 1 天，2 粒米；第 2 天， 2×2 粒米；第 3 天， $2 \times 2 \times 2$ 粒米；第 4 天， $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 粒米，依此記錄下去即可。」

丙大臣說：「我這邊想到一種記錄方式，只要負責的士兵能了解這個方法就可以。」

第 1 天，記為 2^1 粒米；第 2 天， 2×2 記為 2^2 粒米；第 3 天， $2 \times 2 \times 2$ 記為 2^3 粒米；第 4 天， $2 \times 2 \times 2 \times 2$ 記為 2^4 粒米，依此記錄下去。」



任務 1

請分別依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，完成以下的問題與討論。

1. 完成以下表格：

	第 5 天	第 6 天	第 7 天	第 8 天	第 9 天	第 10 天	第 11 天
甲大臣							
乙大臣							
丙大臣							

2. 依甲、乙、丙三位大臣建議的方式，記錄第 20 天時所需要的米粒數。

請寫出不同記錄方式的優缺點。

甲大臣：

乙大臣：

丙大臣：

3. 如果你是國王，你會喜歡哪一種記錄方式呢？請寫出算式或是理由來支持你。

法國數學家笛卡兒(René Descartes, 1596~1650)在 1637 年的著作《幾何學》中創立了一種與丙大臣相同想法的簡記方式。

一數連加數次時，可用乘法來簡記，例如： $5+5+5=5\times 3$ 。

同樣的，一個數連乘數次時，有和丙大臣建議一樣的簡記方法。例如： 5 連乘 3 次，即 $5\times 5\times 5$ ，可以表示成 5^3 ，其中 5^3 讀作五的三次方， 5 稱為**底數**(或簡稱**底**)，右上角的 3 稱為**指數**，用來表示連乘的次數。

另外，相同數連乘的運算稱為**乘方**(或次方)。當乘方的指數為 1 時，通常省略不寫，例如： 3^1 寫成 3。

任務 2

以下是國王的棋盤，請試著幫丙大臣記錄以下各天所需的米粒數。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)
(25)	(26)	(27)	(28)	(29)	(30)	(31)	(32)
(33)	(34)	(35)	(36)	(37)	(38)	(39)	(40)
(41)	(42)	(43)	(44)	(45)	(46)	(47)	(48)
(49)	(50)	(51)	(52)	(53)	(54)	(55)	(56)
(57)	(58)	(59)	(60)	(61)	(62)	(63)	(64)

1. 第 30 天

2. 第 60 天

3. 最後一天

大臣們一面記錄，一面討論以下的問題。

任務 3

1. 第 4 天，需要 2^4 粒米，隔天，需要多少粒米？(請以 2 為底數的乘方表示)

2. 第 9 天所需要米粒數是第 6 天所需要米粒數的幾倍？

2/ 次方的運算

在臺灣，數字的位值由小到大會用到個、十、百、千、萬、億等名詞，這些名詞其實可以和 10 為底數的乘方相對應，在後續的學習中我們會討論。

【2014 年 7 月 30 日新聞】
審計部 29 日公布「102 年度中央政府總決算」報告書，經審計部審核，民國 102 年度審定歲入決算 1 兆 7304 億餘元。兆有多大呢？



名詞	實際數字	算式(以 10 連乘的運算)	以 10 為底數的乘方記錄
個	1		?
十	10	10	10^1
百	100	10×10	10^2
千	1000	$10 \times 10 \times 10$	10^3
萬	10000	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^4
十萬	100000	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^5
百萬	1000000	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^6
千萬	10000000	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^7
億	100000000	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$	10^8
十億	1000000000	$10 \times 10 \times 10$	10^9
百億	10000000000	$10 \times 10 \times 10$	10^{10}
千億	100000000000	$10 \times 10 \times 10$	10^{11}
兆	1000000000000		

表一

任務 1

1. 10^8 是幾位數？是 1 後面幾個 0？

2. 10^{12} 是幾位數？是 1 後面幾個 0？

清朝《數理精蘊》記載的數字單位，由小到大依次為一、十、百、千、萬、億、兆、京、垓。萬以下是十進位，萬以後則為萬進位，即「萬萬為億、萬億為兆、萬兆為京、萬京為垓」。

任務 2

「萬萬為億」是指 1 萬的 1 萬倍為億，即 $10000 \times 10000 = 100000000$ ，也可利用以 10 為底數的乘方，參考上方的表格，記作 $10^4 \times 10^4 = 10^8$ 。請將下列各題的文字描述與運算，以 10 為底數的乘方記錄下來，並將「兆」、「京」、「垓」以 10 為底數的乘方表示。

1. 萬億為兆： $100000000 \times 10000 = 1000000000000$ ，可記作 $10^8 \times 10^4 = 10^{12}$ 。
2. 萬兆為京：
3. 萬京為垓：

在小學時，3 個 2 相加與 4 個 2 相加，總共有 7 個 2 相加。可記作

$$(2+2+2)+(2+2+2+2)=2+2+2+2+2+2+2$$

或者

$$2 \times 3 + 2 \times 4 = 2 \times 7$$

那麼，3 個 2 相乘再與 4 個 2 相乘，總共有 7 個 2 相乘。可以怎麼記，想一想？

$$(2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

或者

$$2^3 \times 2^4 = 2^7$$

你有發現什麼比較好的計算方法？

任務 3

試著計算下列以 3 為底數的乘法運算，並將答案以 3 為底數表示。

1. $3^2 \times 3^2$
2. $3^5 \times 3^6$
3. 3×3^4
4. 當兩個底數相同的乘方相乘時，指數之間有什麼關係嗎？

過去新聞報導中，曾出現很大且需運算的數，下面是利用以 10 為底數的記錄方式，請試著完成任務。

例如：某公司將半年的業績獎金 100000 元均分給 100 位員工，即 $100000 \div 100 = 1000$ (元)，記作 $10^5 \div 10^2 = 10^3$ (元)。

任務 4

1. 新聞報導，這次威力彩頭獎金為 1 億元，由一家工廠的 100 位同事共同獲得，請問每人可分得多少元？
2. A 國目前國民人數約有 1000 萬人，如果 A 國負債約一兆元，請問 A 國平均每個人負債多少元？

在小學時，6 個 3 相加減掉 2 個 3 相加，會剩下 4 個 3 相加。可記作

$$(3+3+3+3+3+3)-(3+3)=3+3+3+3$$

或者 $3 \times 6 - 3 \times 2 = 3 \times 4$

那麼，6 個 3 相乘除以 2 個 3 相乘，會剩下幾個 3 相乘呢？可以怎麼記錄？

$$(3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3) \div (3 \times 3) = \frac{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

或者 $3^6 \div 3^2 = 3^4$

你有發現什麼比較好的計算方法？

任務 5

試著計算下列以 5 為底數的除法運算，並將答案以 5 為底數表示。

1. $5^6 \div 5^2$

2. $5^{12} \div 5^4$

3. 當兩個底數相同的乘方相除時，指數之間有什麼關係嗎？

在 14 世紀，歐洲數學家雷姆(Nicole Oresme，1323~1382)引用指數律中的加法律和乘法律來處理幾何和物理的問題。透過前面學習的指數律，對以下問題嘗試作運算。

任務 6

試計算下列算式，並在各式的()與□中，填入正確的數：

1. $(5^4)^2 = () \times () = 5^\square$

2. $(2^3)^4 = () \times () \times () \times () = 2^\square$

3. 觀察以上的運算，你發現了什麼？請你舉例說明。

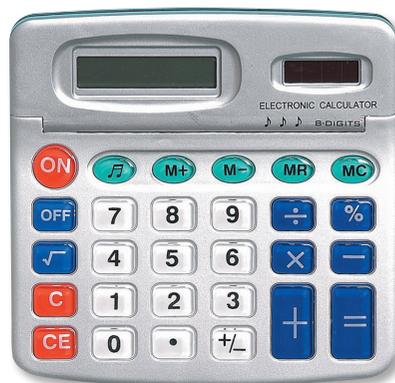
4. $(10^5)^3 = 10^\square$

5. $(10^3)^5 = 10^\square$

6. $(10^5)^3$ 與 $(10^3)^5$ 的計算結果是否相同，請寫出算式或理由來說明。

3 / 計算機的使用

因為科技上的進步，以往複雜的計算現在可透過方便取得的計算機幫忙完成，請使用計算機，依指示做些小計算。(每臺計算機按鍵功能會有差異，可以請任課教師協助你。)



任務 1

拿出計算機，

1. 先按 **10**，再按 **x**，接著按 **=** 1 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

2. 歸零後，先按 **10**，再按 **x**，接著按 **=** 6 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

3. 歸零後，先按 **10**，再按 **x**，接著按 **=** 25 次，你的計算機上顯示多少呢？能說說看這是怎麼算出來的？

你知道第 40 天，國王要放多少粒米在棋盤上嗎？你可以試著用手邊的計算機，算算看，並嘗試回答下面的問題。（你用的是哪一種計算機呢？電腦中的小算盤或是手機中的計算機？）

任務 2

以計算 2^{40} (2 的 40 次方) 為例：

1 標準型計算機



先按 **2**，再按 *****，接著按 **=** 39 次，即可以得到運算結果。



先按 **2**，再按 **×** 及 **2**，重複 39 次(螢幕呈現如 $2 \times 2 \times \dots \times 2$)，按 **=** 即可以得到運算結果。

2 工程型計算機



先按 **2**，再按 **x^y** ，接著按 **40**，按 **=**，即可以得到運算結果。在此計算機中，先輸入的數字為 x (代表底數)，後輸入的數字為 y (代表指數)。



先按 **2**，再按 **^**，接著按 **40**，按 **=**，即可以得到運算結果。

1.099512e12、 $1.099511627776 \times 10^{12}$ 與 1099511627776 這三個數字相同嗎？

不同計算機的顯示方式有所不同，雖然 $1.099511627776 \times 10^{12}$ 與 1099511627776 這個十三位數相同，但受限於不同機型，顯示為 1.099512e12，此為近似值，數字最右邊的 **e12** 指的就是乘上 10^{12} (以 10 為底數時，指數為 12)。

你可以對一個數取四捨五入到很大的位數，也可以到很小的位數，就看你想要多準確。 $2^{40} = 1099511627776$ ，這個數字寫在書上容易，但是要記住就很痛苦。為了讓此類數字容易記憶，可以將它四捨五入。

1099511627776 → **1099512000000** 取七位有效數字，在前七位數之後的數都變成零，精確度 99.99999%。

1099511627776 → **1100000000000** 取兩位有效數字，在前兩位數之後的數都變成零，精確度 99%。

1099511627776 → **1000000000000** 取一位有效數字，在前一位數之後的數都變成零，精確度 90%。

其實 1100000000000 已經很精確，因此通常很大的大數我們會四捨五入到兩位有效數字。而下表是我們進一步使用指數的記錄方式來呈現 1100000000000 成為 1.1×10^{12} 的演變過程。

原本數字的簡單運算		指數的記錄方式	
1100000000000	×	1	= 1100000000000 × 1
110000000000.0	×	10	= 110000000000.0 × 10^1
11000000000.00	×	100	= 11000000000.00 × 10^2
1100000000.000	×	1000	= 1100000000.000 × 10^3
110000000.0000	×	10000	= 110000000.0000 × 10^4
11000000.00000	×	100000	= 11000000.00000 × 10^5
1100000.000000	×	1000000	= 1100000.000000 × 10^6
110000.0000000	×	10000000	= 110000.0000000 × 10^7
11000.00000000	×	100000000	= 11000.00000000 × 10^8
1100.000000000	×	1000000000	= 1100.000000000 × 10^9
110.0000000000	×	10000000000	= 110.0000000000 × 10^{10}
11.00000000000	×	100000000000	= 11.00000000000 × 10^{11}
1.100000000000	×	1000000000000	= 1.100000000000 × 10^{12}

表二

為了後面的計算與討論，我們將記錄方式以四捨五入取到小數點後一位，寫成 1.1×10^{12} 。而在日常生活中，出現很大的數的情形越來越普遍，能以方便、精簡的方式去呈現這些數，也顯得越來越重要。

把一個正數表示成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ 且 n 為整數，則 $a \times 10^n$ 就是這個數的科學記號表示法。

當一個很大的數不易用一般的方式表現時，我們會採用科學記號表示，計算機亦然。

任務 3

請將下列科學或生活新聞中的大數字，用科學記號表示：

1. 蘋果公司股價在 2014 年 7 月 28 日上漲 1.38% 至 99.02 美元，市值達到 5929.18 億美元，約新臺幣 17.78 兆元。請以科學記號表示 17.78 兆。
2. 「富比世」雜誌今天公布臺灣 50 大富豪名單，旺旺集團主席蔡衍明 今年以新臺幣 2784 億元資產，連續第 3 年名列臺灣 首富。請以科學記號表示 2784 億。

根據上述資料，比較蘋果公司與旺旺集團主席蔡衍明 誰較有錢呢？

任務 4

1. 請比較 17.78 兆與 2784 億的大小，誰比較大？
2. 請比較 1.778×10^{13} 與 2.784×10^{11} 的大小，誰比較大？

過了 20 天，國王跟智者提到說，每天讓他的大臣與士兵們計算米粒數與搬米，實在太累！一開始，大臣在計算米的數目，十分輕鬆，2 粒米、4 粒米、8 粒米、16 粒米、……，但越來越感到計算的困難。士兵們頭幾天在搬運米時，僅利用手指拈起數粒米就完成，但過了一、兩星期後光是數出需要的米粒就非常不耐煩。

大臣們請國王跟智者反應：「每天讓他的大臣與士兵們計算米粒數與搬米，實在太累！他們已經精疲力竭了，能不能用別的方式代替。」

任務 5

第 20 天時，國主要提供多少米粒數？能利用計算機以外的方法來估算第 20 天的米量嗎？

約 1 萬粒？約 10 萬粒？約 100 萬粒？還是約 1000 萬粒呢？（提示： $2^{10} = 1024$ ）

智者：「既然如此，我只拿最後一天的米就好了。」

任務 6

藉由第 20 天的米量，估算最後一天需要米多少粒？

還記得故事最後，國王的疑問嗎？「最後會有 1 公斤重的米嗎？」



任務 7

有一個小兵向國王報告：「50 粒米約 1 公克重。」

根據這個資料，請計算最後一天的米量有多重？



任務 8

根據 2012 年統計的結果，全世界的稻作產量高達 7 億公噸。請問這足夠國王支付最後一天的米量嗎？如果不夠，約幾年才可以提供完畢？

素養導向數學教材 / 曾世杰 主編

-- 初版 -- 新北市三峽區：國家教育研究院

1. 數學教育
2. 中小學教育
3. 教材與教法

素養導向國民中學數學教材：指數律

主編者：鄭章華

作者：曾明德、鄧家駿

(依姓氏筆畫順序排列)

發行人：柯華葳

出版者：國家教育研究院

編審者：十二年國民基本教育數學素養教材研發編輯小組

召集人：曾世杰

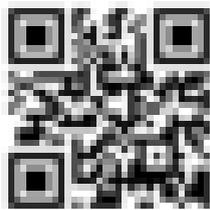
副召集人：單維彰、鄭章華

編輯小組：古欣怡、朱安強、林美曲、林信安、馬雅筠、陳吳煜
陳淑娟、曾明德、曾俊雄、鄧家駿

(依姓氏筆畫順序排列)

版次：初版

電子全文可至國家教育研究院網站 <http://www.naer.edu.tw> 免費取用



本書經雙向匿名審查通過
(歡迎使用，請註明出處)