

單元

教師手冊

# 直角三角形的三角比

75%的險升坡



## ● 單元目標

1. 認識坡度的計算方式。
2. 透過製圖、測量發現不同坡度的直角三角形與所對應的銳角度數的關係；  
相同坡度，大小不同的直角三角形，其對應的銳角度數相等。
3. 認識直角三角比  $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$  的意義。
4. 計算特殊角的直角三角比。
5. 透過計算機的直角三角比 ( $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ) 的按鍵，幫助解決生活中的應用問題。

## ● 學習表現與學習內容

依據十二年國民基本教育數學領域課程綱要(104.12草案)

學習表現：

S-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題。

學習內容：

S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。

S-9-5 直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號  $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。(學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度)

## ● 直角三角比回到國中階段的緣起

原先在 83 年課程標準、74 年課程標準與 61 年課程標準均有放入銳角三角函數的內容，以 83 年課程標準所出版的數學教科書(國立編譯館，2000)為例，將銳角三角函數放到第六冊的選修數學，其標題為「銳角三角函數及其簡易應用」，在基礎篇中，課本營造問題情境，並界定鄰邊、對邊與複習相似形的概念，而後教授兩個特殊直角三角形( $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$  與  $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ )的邊長比，才介紹正弦、餘弦與正切函數的概念，至於餘切、正割與餘割函數的概念因時間與篇幅關係略去不教，並明確說明商數關係、平方關係與餘角關係；在應用篇中，課本介紹作圖法、查表法與運用電算器求三角函數值，之後進行三角函數的簡單應用。

自九年一貫實施後，三角函數這個單元已經沒有再出現於國中的課程綱要與教科書中，雖然高中數學課程也對此單元做了鋪陳，然而整體成效未如早期課程安排分屬於國中、高中二階段的學習方式。因此十二年國民基本教育數學領域課程綱要(104.12草案)參考以往的數學課程標準與其他國家的做法，以及考量三角函數的學習銜接與成效，直角三角比似乎可以放入國中階段的九年級教授。教學內容可聚焦在直角三角形特殊角的邊角性質與應用，並引入電算器，至於在以往課程所教授的三角函數關係：倒數關係、平方關係與商數關係與餘角關係，仍建議延後至高中數學教授。

## ● 直角三角比與三角函數的差異

在探討相似三角形的性質後，由於直角三角形只有一個變量，兩個直角三角形，只要知道其中一組銳角對應相等，這兩個直角三角形便相似。而相似三角形的對應邊長會成比例，它的另一種表現方式為三角形任何兩個邊長的比與其相似三角形的邊長比相等。因此，可以將直角三角形的任意兩個邊長比分別定為六個三角函數。

本次課程綱要在國中階段的調整僅強調直角三角比：直角三角形的其中三種邊長比 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ，並利用這三種邊長比來解決生活中許多與相似相關的問題。至於高中階段才去討論三角函數，以及三角函數的關係，並在進行探究之後，才運用正弦定理和餘弦定理描述三角形邊和角的關係，並利用它來了解多邊形的邊和角的精確關係。

## ● 教材設計理念

本教材從生活的案例切入，透過自行車社群網站上對於險升坡標示的討論引入坡度的計算方式與 $\tan A$ 的關係，並討論用角度或邊長比值來描述坡度的問題，利用測量與比較發現 $\cos A$ 、 $\sin A$ 等直角三角比。其間，透過不同的任務，如操作測量、計算比較、運算推理、實際解決問題等活動，逐步發展直角三角比（直角三角形的邊長比值）的概念，角度改變時三角比的變化，並處理相關的生活應用問題。

與以往教材不同之處，在於我們從生活實例引入坡度的討論，讓學生理解數學知識的定義與生活中的描述有其關聯性，讓學生不再覺得 $\tan A$ 是一個符號，而是有其生活中的意義。在教學中，透過活動，方格紙（以1公分為單位）的繪圖來討論不同坡度或角度描述時的直角三角形來做比較，讓學生發現並理解其關聯性與對應，提供學生實作的經驗，以發展其測量與計算的能力。同樣的透過實作與測量讓學生有機會利用三角形相似性質來指出兩股間的比值不變， $\tan A$ 表示此比值（也就是坡度）。之後藉由特定邊長的直角三角形來練習 $\tan A$ ，並使用斜邊、對邊、鄰邊來引入 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 。

另一個不同之處，在於科技的日新月異，因此我們在課程中介紹計算機的三角比按鍵，培養孩子使用計算機做運算，以具有解決生活應用的能力。

由於課綱在國中部分的要求僅有理解相似直角三角形邊長比值的不變性，及對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號 $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ 。所以這邊僅用直角三角比來談論問題，也只做給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長的計算；不另外提到三角函數的對應與變化等關係，此部分仍留待高中的課程再做處理。

## 教材說明

教師可以依教學實際狀況及經驗作適當的切割和說明，預估需四到六堂課。以下為當時教學試驗時的各節次教學重點與對應學生手冊的頁碼。

1. 透過險升坡，介紹坡度的計算方式。(學生手冊 P2~3)
2. 透過方格紙實作坡度 75%、7.5%與有一銳角為 75 度的不同直角三角形。  
(學生手冊 P4~6)
3. 從 75 度收集畫出不同大小的直角三角形藉此討論邊長比值，並正式介紹  $\tan A$ 。  
(學生手冊 P6~7)
4. 藉由實際數字例子(兩股為 7、24 的直角三角形)，練習  $\tan A$  並介紹  $\sin A$ 、 $\cos A$ 。  
(學生手冊 P8~9)
5. 計算機的使用與生活應用問題。(學生手冊 P10~11)

## 模組架構

### (一) 教學模組架構概述

1. 從生活實例討論，利用道路上的險升坡標誌介紹坡度的意義，希望培養學生從生活中觀察數學的例子，提升素養。
2. 設計活動，透過方格紙繪圖來討論 75%、7.5%、75 度等不同的坡度描述，並比較不同的直角三角形有多陡。提供任務讓學生練習畫直角三角形去估算坡度，和固定坡度的直角三角形來測量斜邊上升的角度，讓學生從中察覺角度與坡度的對應，增加學生實作及測量的能力。
3. 透過兩個大小不同，但是某一銳角相同(75 度)的直角三角形，來發現其間的關係，讓學生有機會利用三角形相似性質來指出兩股間的比值不變，使用  $\tan A$  來表示此比值(也就是坡度)，並做相關的應用與討論。
4. 透過特定邊長的直角三角形來練習  $\tan A$ 、並使用斜邊、對邊、鄰邊來引入  $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$  的意義。
5. 學習使用計算機，解決直角三角形給定其一邊長與一銳角，求出其他兩個邊長的生活應用問題。

### (二) 課程前後安排的銜接說明

#### 1. 前置概念

- 8-s-01 能認識一些簡單圖形及其常用符號，如點、線、線段、射線、角、三角形的符號。
- 8-s-08 能理解畢氏定理(Pythagorean Theorem)及其應用。(同 8-a-05)
- 8-s-10 能理解三角形的基本性質。
- 9-s-03 能理解三角形的相似性質。
- 9-s-05 能利用相似三角形對應邊成比例的觀念，解應用問題。

## 2. 銜接概念

### 高中三角函數與三角測量

1. 直角三角形的邊角關係
  - 1.1 直角三角形的邊角關係(正弦、餘弦)、平方關係、餘角關係
2. 廣義角與極坐標
  - 2.1 廣義角的正弦、餘弦、正切、平方關係、補角
  - 2.2 直角坐標與極坐標的變換
3. 正弦定理、餘弦定理
  - 3.1 正弦定理、餘弦定理
4. 差角公式
  - 4.1 差角、和角、倍角、半角公式
5. 三角測量
  - 5.1 三角函數值表
  - 5.2 平面與立體測量

## (三) 與其他領域、科目的連結

### 自然領域：力與力矩

#### 核心素養指標

- 數-E-A2 具備基本的算術操作能力、並能指認基本的形體與相對關係，在日常生活情境中，用數學表述與解決問題。
- 數-J-A2 具備有理數、根式之運作能力，並能以符號代表數或幾何物件，執行運算與推論，在生活情境或可理解的想像情境中，分析本質以解決問題。
- 數-S-A2 具備數學模型的基本工具，以數學模型解決典型的現實問題。瞭解數學在觀察歸納之後還須演繹證明的思維特徵及其價值。
- 數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡及時間，認識日常經驗中的幾何形體，並能以符號表示公式。
- 數-J-B1 具備處理代數與幾何中數學關係的能力，並用以描述情境中的現象。能在經驗範圍內，以數學語言表述平面的基本關係和性質。
- 數-J-B2 具備正確使用計算機以增進學習的素養，包含知道其適用性與限制、認識其與數學知識的輔成價值、並能用以執行數學程序。

## 本教材所使用的工具

1. 科學型計算器(FX-180)每兩位學生 1 臺。
2. 量角器每位學生 1 個。
3. 直尺每位學生 1 把。
4. 方格紙每位學生 1 份。(如附件一～三)

## 1 / 75%險升坡

在網站的自行車討論綜合區出現以下的照片與一長串的討論：



阿文：「這是環島時拍到的，這個交通標誌是不是標示錯誤？」

小堅：「忘了點小數點吧，或者是你漏看，如果是 7.5%，看起來滿像的。」

阿文：「真的是寫 75% 不是 7.5%，附上 google 地圖的連結，可以看到 google 上面的照片」。(連結如下)

<https://www.google.com.tw/maps/@22.182002,120.874778,3a,15y,270.23h,86.48t/data=!3m6!1e1!3m4!1srtOK3IviAhDW2F6TcesPcw!2e0!7i13312!8i6656?hl=zh-TW>

### 任務 1

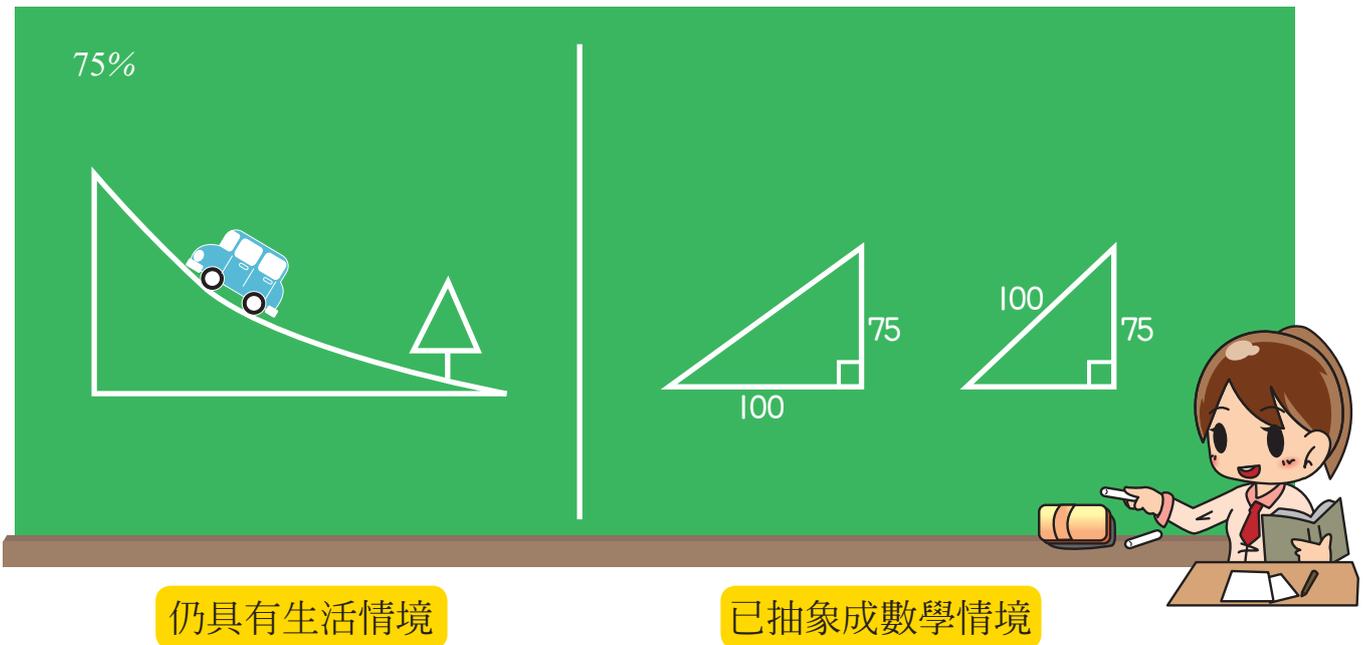
請畫出該險升坡，並在圖中呈現「75%」這個訊息。

學生可能出現的反應，參考右頁圖示。

## 搭配學生手冊 P2

- 試教時的第一節課，教師可以透過險升坡，介紹坡度的計算方式。
- 請學生閱讀險升坡的文章，並進行任務一。
- 任務一

學生可能出現的反應如下：



### 教學建議事項

1. 請學生上台畫出較具代表性的圖形，並分別簡述自己所畫的圖形。
2. 如上圖，學生所畫的圖形大致分成兩類，左邊仍具有生活情境；而右邊則已抽象成數學情境，並使用直角三角形來呈現。
3. 右邊的兩個圖之不同點是在於「100」所標示的位置，一個標在水平距離，另一個標在實際路面。
4. 與學生討論右邊的兩個圖，哪一個比較合理，並請學生說明自己的看法。
  - (1) 學生可能的關鍵回答：  
學生指出，在後面的討論串，小堅：「75%等於是每前進 100 公尺會上升 75 公尺。」
  - (2) 教師可以的參考回應：  
教師可以請學生指出學生手冊上所描述「75%等於是每前進 100 公尺會上升75公尺。」的圖形是哪一個？
5. 總結學生的討論與引導，依據學生手冊上的說法，將每前進 100 公尺解釋成水平距離，而不是斜邊（實際路面）。

後面的討論串，又有了以下對話。

阿文：「75%，指的是75度嗎？」

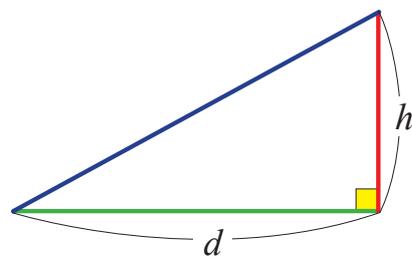
小堅：「不是的，75%是指每前進100公尺會上升75公尺。登山都沒這麼陡，是否有人故意塗掉小數點？」

我們來看看他們對話中談到的「75%」是指什麼？

如圖一，坡度的意義和表示方式：

以坡面上兩點間的**高度差**除以兩點間的**水平距離**。即

$$T(\text{坡度}) = \frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}} = \frac{h}{d}$$

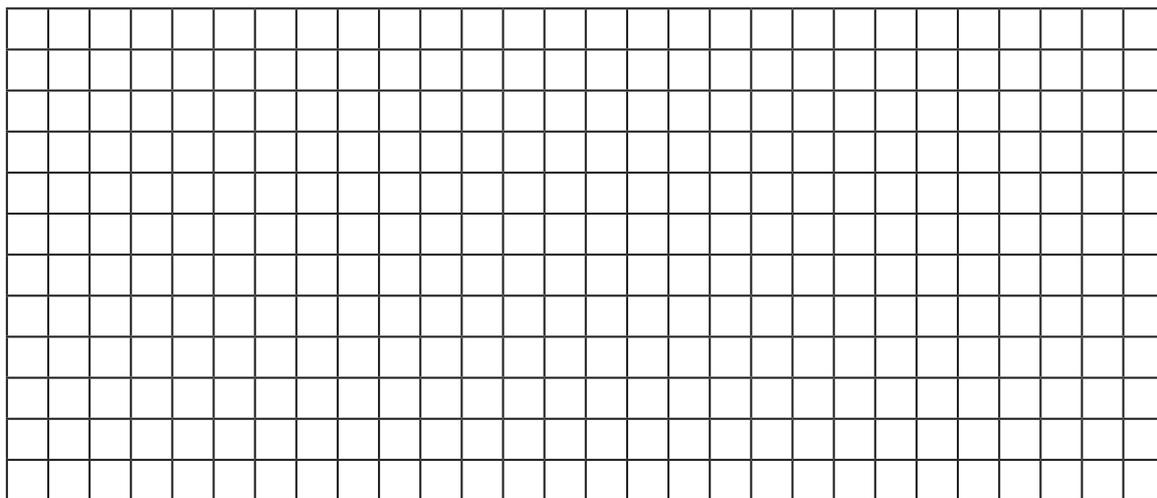


圖一

其中  $h$  表示高度差， $d$  表示水平距離。坡度在道路上的標示常以「百分率」的形式出現。

## 任務 2

請在附件一的方格紙(單位長 1 公分)中，分別畫出坡度為 75%、7.5%的兩個直角三角形，並試著用量角器測量所繪製的兩個直角三角形的角度，並將角度標示上去。 學生製圖的可能結果，參考右頁圖示。



(單位長 0.5 公分)

## 搭配學生手冊 P3

■ 試教時的第二節課，教師開始透過方格紙實作「坡度 75%」、「坡度 7.5%」、「有一銳角為 75 度」的各類不同直角三角形。

### ■ 任務二

1. 其目標是給定坡度讓學生測量角度。
2. 請學生閱讀坡度的計算方式，對應前面的坡度討論，以引導學生在直角三角形的標示與計算。
3. 讓學生使用附件一，每一格為 1 公分，讓學生方便使用直尺與單位畫出不同坡度如 7.5%、75% 的圖形，尤其是坡度 7.5% 的直角三角形。

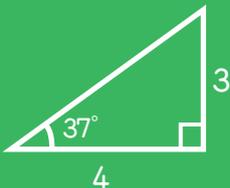


### 教學建議事項

1. 建議在製圖前先跟學生約定製圖時的水平方向與斜邊繪製的位置，以確認學生知道測量角度是指水平方向與斜邊的夾角。
2. 學生製圖的可能結果如下：

任務 2  
(附件一)

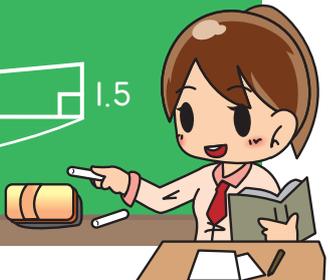
75%

$$= \frac{75}{100}$$
$$= \frac{15}{20}$$
$$= \frac{3}{4}$$


7.5%

$$= \frac{7.5}{100} = \frac{3}{40}$$
$$= \frac{1.5}{20}$$
$$= \frac{0.3}{4}$$

坡度 =  $\frac{\text{高度差}}{\text{水平距離}}$



3. 學生可能的答案：

學生使用量角器測量兩個直角三角形的角度，「坡度 75%」大約是 36~37 度，另一個「坡度 7.5%」大約 4~5 度。

4. 學生在畫坡度 7.5% 時，有的會反應方格紙不夠大張，教師可以透過等值分數（繁分數）來提示，例如  $\frac{7.5}{100} = \frac{75}{1000} = \frac{3}{40} = \frac{?}{20} = \frac{?}{4}$ 。

5. 此時，由於學生所使用的附件方格紙的 1 格邊長就是 1 公分，所以 1.5 公分就是 1.5 格，或是 0.3 公分就是 0.3 格，相當方便。這也是為何我們製作學生用附件的方格紙取每格 1 公分的原因。

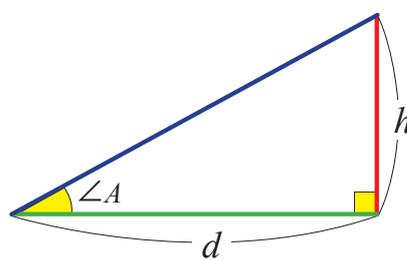
坡度為 75%、7.5%，指的就是  $\frac{h}{d}$  分別為  $\frac{75}{100}$ 、 $\frac{7.5}{100}$  的直角三角形，經過化簡可以得到：

$$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}, 7.5\% = \frac{7.5}{100} = \frac{3}{40}。$$

小堅：「75%的坡度，角度約 37 度，大概要坦克車才能開的上去，即使一般轎車，爬坡也可能會有問題。」

如圖二，對於坡度  $T$ ，是指用高度差  $h$  與水平距離  $d$  所組成的直角三角形；可以測量出  $h$  的對角。

例如，坡度 75%是指  $\angle A$  對面的股( $h$ )與相鄰的股( $d$ )比值為 75%(即 $\frac{3}{4}$ )的直角三角形， $\angle A$  的角度大約 37 度。



圖二

### 任務 3

請在附件一的方格紙(單位長 1 公分)中，繪製一個  $\angle A = 75$  度的直角三角形。請問你可以利用哪些數據，來說明哪一個直角三角形的坡度比較大？

學生製圖的可能結果，參考右頁圖示。

## 搭配學生手冊 P4

■ 請學生閱讀有關坡度  $T$  的計算方式，以及與高度差  $h$  與水平距離  $d$  所組成的直角三角形的關係，並提出疑惑。

### ■ 任務三

1. 目標是給定角度繪製出的直角三角形來估算坡度，與任務二是互相對應。
2. 讓學生繪製一個  $\angle A = 75^\circ$  度的直角三角形。並請學生討論可以利用哪些數據來說明哪一個直角三角形的坡度比較大？



### 教學建議事項

1. 跟學生約定將  $\angle A = 75^\circ$  度擺放在水平方向與斜邊的夾角。
2. 仍請學生繪製在附件一的方格紙，以方便跟「坡度 75%」、「坡度 7.5%」的直角三角形比較。
3. 學生也可能反應，只給一個 75 度，沒有給任何邊長，該怎麼畫？
4. 教師可參考的提示內容：
  - (1) 請學生將水平距離取成整數格（例如 1 格、2 格或是 3 格），這樣才會好算。
  - (2) 學生多半畫的是 75 度角，而不是畫 75 度的直角三角形。

任務 3  
(附件一)

① 取水平距離為「整數格」

② 坡度 =  $\frac{(3.7)}{1}$

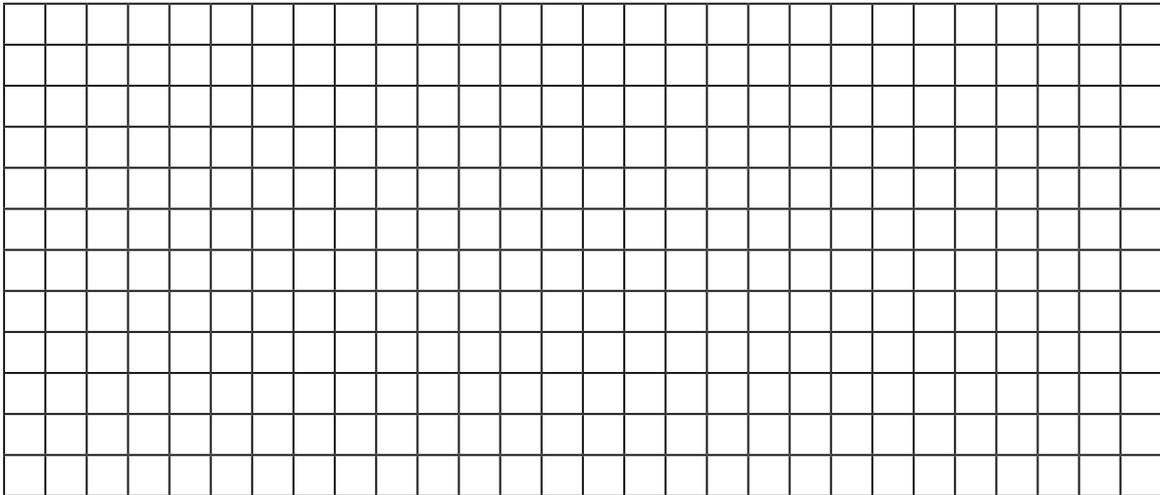
5. 學生估算出來的坡度，是透過直尺測量高度  $h$ （75 度的對邊長）、水平距離  $d$ （75 度的鄰邊長），將高度  $h$  除以水平距離  $d$ ，可以得到比較好的估算結果，約為 3.7 左右。

## 2 / 坡度與角度

### 任務 4

從以下三個角度中挑選其中一個，當做 $\angle A$ 的度數，在附件二的方格紙（單位長 1 公分）上畫出直角三角形，並計算這個直角三角形的坡度是多少？

- (1) 60 度
- (2) 45 度
- (3) 55 度



（單位長 0.5 公分）

請跟你選擇同樣 $\angle A$ 度數的同學一起比較，你們所畫的直角三角形是否一樣大？

若是不一樣大，請檢查一下，你們所得到的坡度是否一樣呢？

請根據你們所得到的結論，試著與同組同學分享為何會得到如此的結論呢？

當  $\frac{h}{d}$  值固定的直角三角形，所繪製不同的三角形它們的對應角有什麼關係呢？

■ 任務四

1. 目標是繪製指定角度，來估算坡度。
2. 本次教學試驗時，是安排成回家作業，題目是提供了 60 度、45 度、55 度，請學生模仿任務三估算坡度。



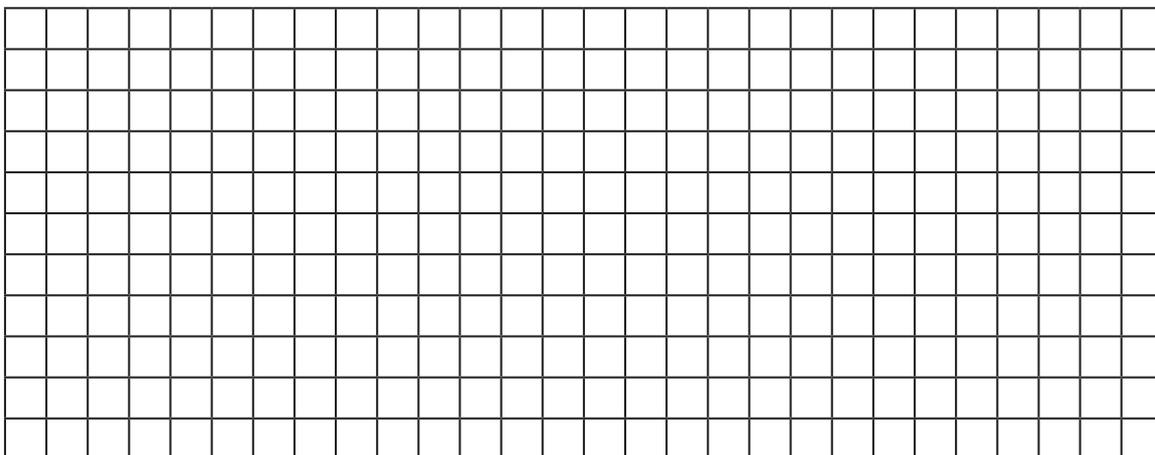
教學建議事項

1. 繪製角度大於 45 度，是考慮當水平距離取整數格時，測量高度時比較方便，對於估算坡度（分母為整數）也比較容易計算，此處可以讓學生使用計算機。
2. 本任務我們提供三個角度，目的在布置水平任務，因此要求學生從以下三個角度挑選其中一個，再互相討論。
3. 教師可提醒選擇同一角度的同學，進行討論「所畫的直角三角形是否一樣大？」，「坡度是否一樣呢？」，根據討論的情形，試著與同組同學分享為何會得到如此的結論。

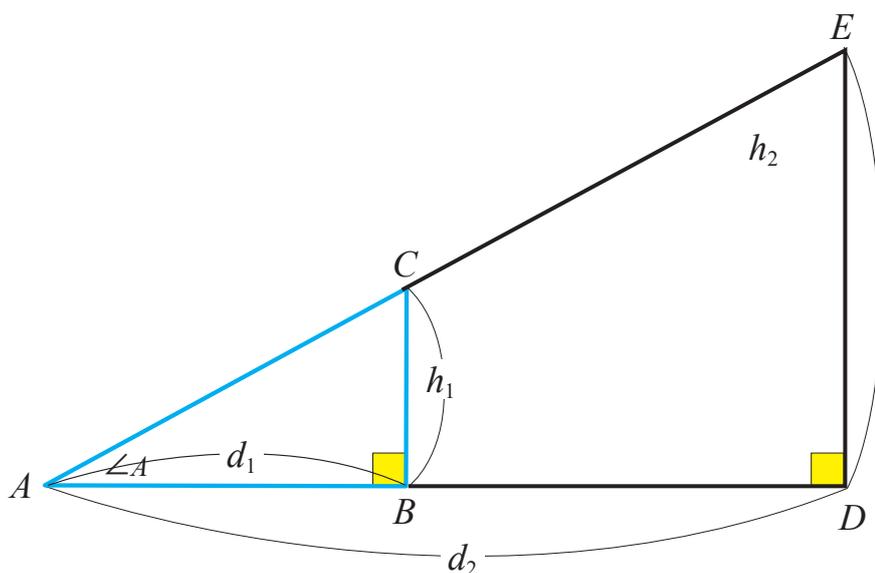
## 任務 5

請在附件三的方格紙(單位長 1 公分)中，分別畫出  $\frac{h}{d}$  值是  $\frac{4}{3}$ ，但是大小不同的直角三角形。並試著用量角器測量該兩個三角形的  $\angle A$ 。說說看，你發現甚麼？

$\angle A$  的角度皆相同。



(單位長 0.5 公分)



由任務 4、任務 5 可以發現：

兩個直角三角形，當銳角的角度相等時，其  $\frac{h}{d}$  的比值也會相等。

同樣地，兩個直角三角形，當它們  $\frac{h}{d}$  的比值相等時， $h$  的對角角度也會相等。

■ 任務五

目標是指定坡度，來測量符合該坡度的直角三角形的銳角角度。



教學建議事項

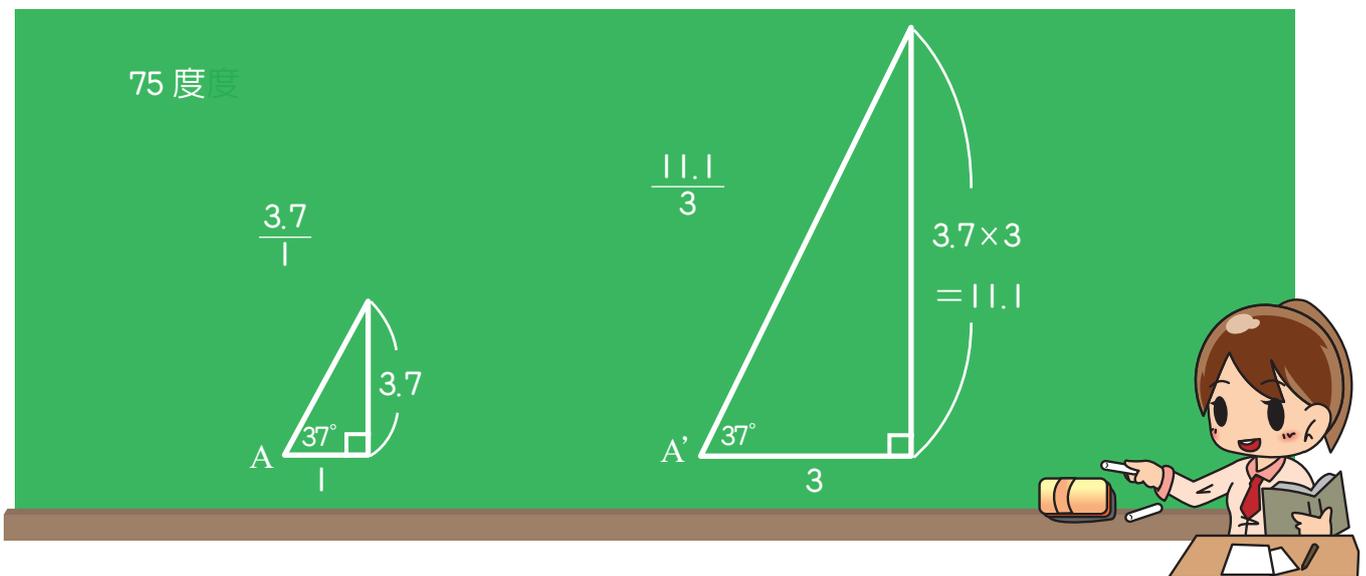
1. 本次教學試驗時，安排成回家作業請學生模仿任務二估算角度。
2. 建議教師可收回學生手冊看看學生的學習狀況
3. 任務五原本目的在蒐集坡度相同、大小不同的直角三角形，藉此來討論邊長比值相等時，角度也會相等。教師可以在課堂中讓學生實作再討論，若時間不足，由於任務五與任務二均為提供給定坡度，做測量角度的工作，因此也可將任務五當成作業來處理，以蒐集學生不同的例子。

■ 第三節課的開始，依據學習內容 S-9-4，給定角度（畫出角度），估算坡度（邊長比值），才是教學的主軸。因此試教時，延續任務三選擇由 75 度的直角三角形出發，藉由學生畫出的不同大小直角三角形，討論邊長比值（坡度），並正式介紹  $\tan A$ 。



教學建議事項

1. 延續任務三，即由 75 度出發，討論不同大小的直角三角形的邊長比值。
2. 試教時，課堂實例：



藉此討論，給直角三角形的一個銳角，其相同度數為75度，取不同水平距離時，得到不同高度，此兩邊長的比值卻是不變的。

老師在黑板提示並示範水平距離為 1 格，得高度大約 3.7 格。  
 同學提出：「他的高度是 11 格左右。」  
 老師問：「其水平距離為幾格？」  
 學生答：「3 格。」

3. 呼應了學習內容 S-9-4 相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變。

前面所提的坡度( $\frac{h}{d}$ )常用來標記山坡、屋頂和道路的斜坡坡度有多大，並以直角三角形來協助觀察與描述，因此 $\frac{h}{d}$ 這個數值，在數學上也可以用 $\tan\angle A$ 或 $\tan A$ 表示，即 $\tan A = \frac{h}{d}$ 。(  $0^\circ < \angle A < 90^\circ$  )

### 3 / $\tan A$ 的討論

#### 任務 6

- (1) 請問  $\tan 30^\circ$  的值為多少？
- (2) 若某道路坡度為「 $\tan 30^\circ$ 」，則請問每前進 100 公尺大概會上升多少公尺呢？

(1)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) 57.7 公尺

#### 任務 7

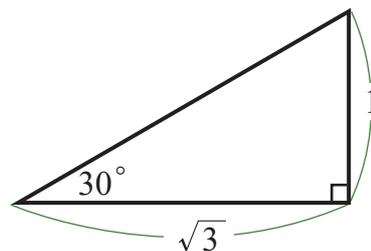
有個山坡地，被標示坡度為 100%，請計算或測量一下這個山坡地坡度所對應的 $\angle A$ 為幾度。

45 度

■ 任務六

第(1)題：

1. 可配合圖示（如右圖）來協助解題。
2. 學生在沒有計算機或不會查表的情況下，會透過 30-60-90 的特殊直角三角形來求得答案。
3. 答案可能出現  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



第(2)題：

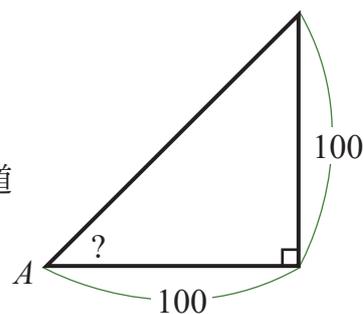
1. 答案可能出現  $\frac{100}{\sqrt{3}}$ 、 $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ 。
2. 此時是使用計算機的適當時機，利用計算機可算出大約 57.7 公尺（ $\frac{100}{1.732}$ 、 $\frac{100 \times 1.732}{3}$ ），可以具體觀察上升高度小於前進距離 100 公尺。
3. 若有直角三角比的值表，在此處亦可引導學生查得  $\tan 30^\circ = 0.5774$ ，與之呼應。

■ 任務七



教學建議事項

1. 本任務可用來區辨坡度（邊長比值）與角度是不同的。
2. 可配合圖示（如右圖）來協助理解題意，學生大多能知道本題答案為 45 度（等腰直角三角形）。



## 4 / 直角三角比

依據前面的討論，在一個直角三角形  $ABC$  中，兩股分別為 7、24。我們也可以看成水平方向的距離為 7，鉛垂方向的距離為 24。

如此，可以得到  $\tan A = \frac{24}{7}$ 。

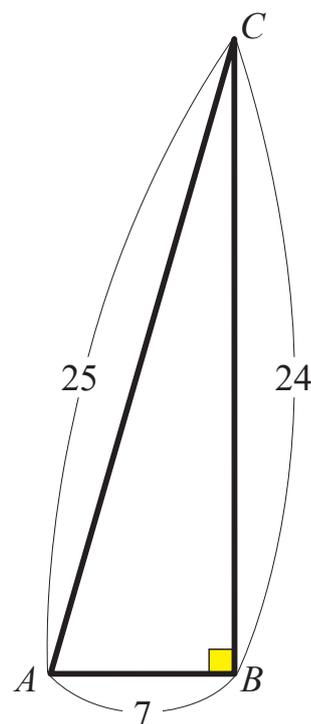
同時，注意這個直角三角形的斜邊是可以算出來的。如圖三，直角三角形  $ABC$  中， $\overline{AC}$  為斜邊，

對  $\angle A$  而言， $\overline{AB}$  為  $\angle A$  的鄰邊， $\overline{BC}$  為  $\angle A$  的對邊。

如果，我們將  $\tan A = \frac{24}{7}$ ，

看成是  $\frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}}$ ，那麼另兩組比值，

$\frac{24}{25}$  ( $\frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\angle A \text{ 的鄰邊}}$ )、 $\frac{7}{25}$  ( $\frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}$ ) 就分別用  $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的對邊}}{\text{斜邊}}$ 、 $\cos A = \frac{\angle A \text{ 的鄰邊}}{\text{斜邊}}$  來表示。



圖三

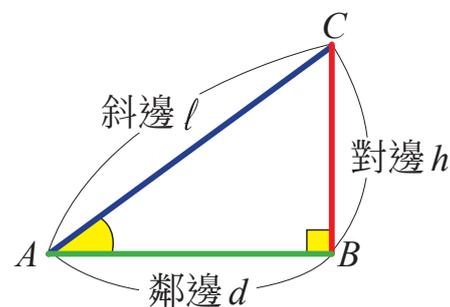
我們進一步將直角三角形三個邊長的兩兩比值，所表示的名稱整理如下：

$$\tan A = \frac{h}{d} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},$$

$$\sin A = \frac{h}{l} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}, \quad (\text{此處用 } \sin A \text{ 表示 } \sin \angle A)$$

$$\cos A = \frac{d}{l} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}, \quad (\text{此處用 } \cos A \text{ 表示 } \cos \angle A)$$

稱為  $\angle A$  的直角三角比。



- 第四節課的開始，藉由實際的例子與生活用語的文字敘述進行閱讀與討論（以兩股為 7、24 的直角三角形為例），協助學生練習計算  $\tan A$ ，並引入  $\sin A$ 、 $\cos A$ 。



教學建議事項

1. 考量從「坡度」引入「 $\tan A$ 」，兩者間是有差異的，在前一節課所得到的  $\tan A$  仍停留在水平距離與高度差的比值，在此呼應學習內容 S-9-5 引入鄰邊與對邊比值的定義方式。也可以讓學生觀察與體會鄰邊未必是水平的，此處是指在直角三角形中，未必會將直角的鄰邊水平放置。

S-9-5

直角三角形的三角比：對直角三角形的一個銳角定義「斜邊」、「鄰邊」、「對邊」，並引入符號  $\tan A$ 、 $\sin A$ 、 $\cos A$ ；直角三角形內，給定一邊的長和一個銳角的角度，決定另一邊的邊長。（學生無使用計算機時，角度限於 30 度、45 度、60 度）

2. 由於第一次引入這些符號，建議先以數字為例來計算與表示比較具體。
3. 在此我們所引用的數字例為兩股分別是 7、24 的直角三角形，並可求出斜邊 25，透過另外兩組邊，即 24、25 與 7、25 的比值，直接引出  $\sin A$  與  $\cos A$ 。

斜邊 25

對邊 24

$\tan A = \frac{24}{7} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$

$\frac{24}{25} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$

A 7 鄰邊

4. 三角比翻譯自英文的 *trigonometric ratio*，國中階段僅限於銳角的三角比，在沒有計算機的協助下，更僅限於 30 度、45 度、60 度。這是為了高中階段廣義角的三角比（十年級）、以及三角函數 (*trigonometric function*) 的圖形（十一年級 A 類）等較抽象的課程作準備。

### 任務 8

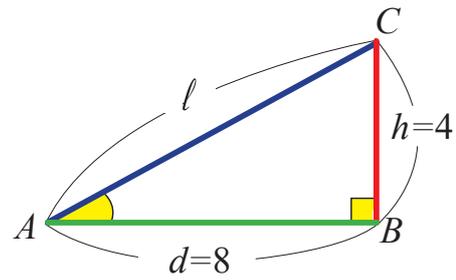
如圖，有一直角三角形  $ABC$ ，已知  $h=4$ 、 $d=8$ ，  
求斜邊  $l$ 、 $\tan A$ 、 $\sin A$  與  $\cos A$  的值。

斜邊  $l$  為  $4\sqrt{5}$ ，

$$\tan A = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}，$$

$$\sin A = \frac{4}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}，$$

$$\cos A = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}。$$



## 5 / 特殊角度的 $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$

當  $\angle A$  是某些特殊角度時，可以先描繪一個直角三角形，先計算出各邊長度關係，製作表格供之後使用。

### 任務 9

試著完成下表。

$\angle A$	$\tan A$	$\sin A$	$\cos A$
30 度	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45 度	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60 度	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

■任務八

1. 目的在練習學到的直角三角比  $\tan A$ 、 $\sin A$  與  $\cos A$ 。
2. 此任務意在檢查學生是否能直接使用直角三角比的意義來解題。

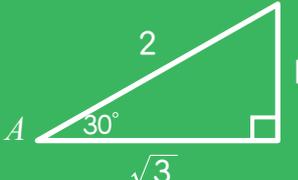
■任務九

目的在讓學生理解當  $\angle A$  是某些特殊角度時，可以先描繪一個有的直角三角形，先計算出各邊長度關係，製作表格供以後使用。

 教學建議事項

1. 建議學生或由教師協助畫出圖形以幫助解題
2. 提供角度均為國中熟悉的特殊直角三角形。

$\angle A$	$\frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}$ $\tan A$	$\frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}$ $\sin A$	$\frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}$ $\cos A$
30度	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45度			
60度			




3. 在此， $\tan A$ 、 $\sin A$  與  $\cos A$  的值不強調化簡，目的讓學生再次熟悉使用直角三角比的意義來解題。

## 6 / 計算機的使用

當我們遇到 $\angle A$ 的度數不是上述的特殊角時，我們可以使用如圖的計算機，算出 $\angle A$ 的 $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$ 的值。

首先，我們先來看看如何使用計算機。



- 1 先按 **ON/C**，打開螢幕，並檢視螢幕左邊上方是否出現 *DEG* (表示 *degree* 度數)。
- 2 若左邊螢幕上方沒出現 *DEG*，而是出現 *RAD*、或 *GRAD*，可以按 **DRG** 數次，來切換到 *DEG* 模式。
- 3 接著按  $\angle A$  的度數，例如 45 (指的是  $45^\circ$ )，再按 **tan**，就會得到 1 (即  $\tan 45^\circ$  的值)。
- 4 若要求  $\sin A$  或  $\cos A$  的值，也可以依同樣的方式操作。

### 任務 10

利用計算機，當 $\angle A=55^\circ$ 時， $\tan A$ 、 $\sin A$ 與 $\cos A$ 的值為何？

$$\tan 55^\circ = 1.428148007 \text{ (若約定四捨五入取到小數點後第 3 位，則得到 1.428)}$$

$$\sin 55^\circ = 0.819152044 \text{ (若約定四捨五入取到小數點後第 3 位，則得到 0.819)}$$

$$\cos 55^\circ = 0.573576436 \text{ (若約定四捨五入取到小數點後第 3 位，則得到 0.574)}$$

## 搭配學生手冊 P10

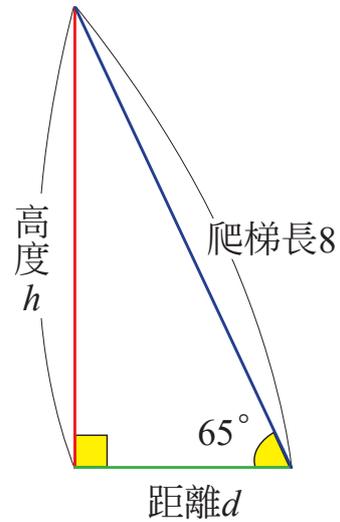
- 第五節課，讓學生能使用計算機來計算直角三角比與解決生活應用問題。
- 計算機的使用注意事項
  1. 建議兩人一臺為宜。
  2. 提醒或注意學生的計算機狀態是否為 DEG。
  3. 可讓學生先練習按  $\tan 45^\circ$ ，詢問學生是否得到 1，以及解釋為何得到 1。

## 7 生活中的應用

### 任務 11

考量油漆工人在放置爬梯的安全，如果一座爬梯長度為 8 公尺，靠著牆面置放與地面接合角度為  $65^\circ$ ，這樣的架設是比較穩固的。

- (1) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子底部離牆面有多遠呢？
- (2) 依此擺放，8 公尺長的梯子，梯子頂部離地面有多高呢？

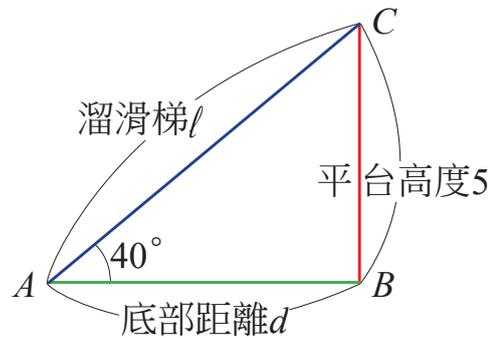


- (1) 由  $\frac{d}{8} = \cos 65^\circ$ ， $\cos 65^\circ = 0.423$  (約定四捨五入取到小數點後第 3 位)  
得  $d = 8 \times 0.423 = 3.384$  (公尺)
- (2) 由  $\frac{h}{8} = \sin 65^\circ$ ， $\sin 65^\circ = 0.906$  (約定四捨五入取到小數點後第 3 位)  
得  $h = 8 \times 0.906 = 7.248$  (公尺)

### 任務 12

校園規劃溜滑梯從 5 公尺的高度滑下，依規定溜滑梯的角度不可以超過  $40^\circ$ 。

- (1) 請問溜滑梯的平台底部要保留多少公尺的水平距離來架設滑梯？
- (2) 這個溜滑梯的長度是多少公尺？

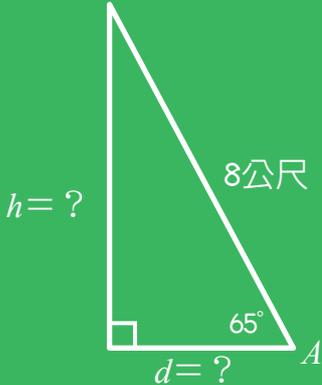


- (1) 由  $\frac{5}{d} = \tan 40^\circ$ ， $\tan 40^\circ = 0.839$  (約定四捨五入取到小數點後第 3 位)  
得  $0.839 \times d = 5$ ， $d = \frac{5}{0.839} = 5.959$  (公尺)
- (2) 由  $\frac{5}{l} = \sin 40^\circ$ ， $\sin 40^\circ = 0.643$  (約定四捨五入取到小數點後第 3 位)  
得  $0.643 \times l = 5$ ， $l = \frac{5}{0.643} = 7.776$  (公尺)

■ 任務十一

1. 確認學生能理解題意，並嘗試小組兩兩合作解題。
2. 教師可以下列方式，協助學生轉譯題意。

任務 11



①  $d = \underline{\hspace{2cm}}$  公尺

$$\frac{d}{8} = \cos 65^\circ \doteq 0.423$$

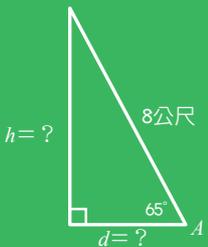
②  $h = \underline{\hspace{2cm}}$  公尺



■ 任務十二

1. 確認學生能理解題意，並嘗試小組兩兩合作解題。
2. 教師可以下列方式，協助學生轉譯題意。

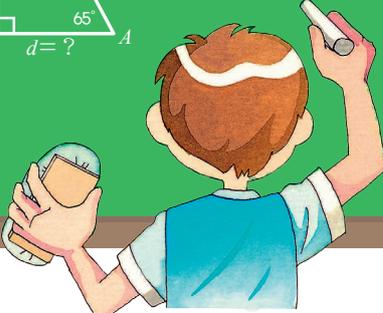
任務 11



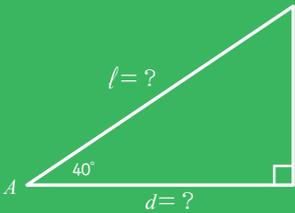
①  $d = \underline{\hspace{2cm}}$  公尺

$$\frac{d}{8} = \cos 65^\circ \doteq 0.423$$

②  $h = \underline{\hspace{2cm}}$  公尺



任務 12



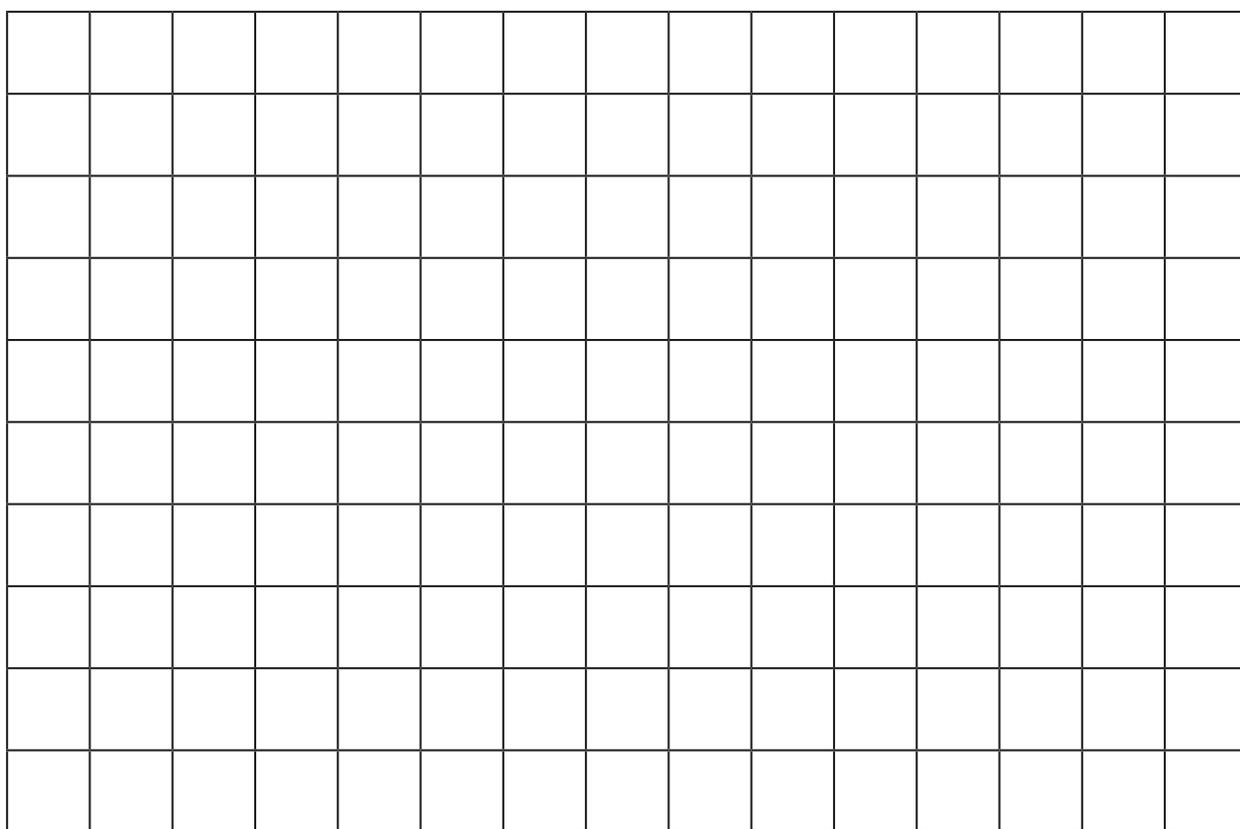
①  $d = \underline{\hspace{2cm}}$  公尺



(下列各題的運算結果，皆四捨五入到小數點後第 2 位)

- 1 根據內政部營建署公布的市區道路及附屬工程設計標準中，提到「人行天橋及人行地下道之出入口為斜坡式坡道者，其坡度不得大於百分之十二。」、「無障礙通行空間設置坡道者，坡道斜率不得大於一比十二。」等與坡度有關的規範。

(1)請在方格紙(單位長1公分)繪製「坡面與水平面夾角 12 度」、「坡度 12%」、「坡道斜率 1 : 12」三種直角三角形。並比較這三種坡度描述的直角三角形，哪一個比較陡？



答案如右頁所示。

■素養評量 1

設計想法：

1. 提供內政部營建署公布的市區道路及附屬工程設計標準，與坡度有關的規範。  
「人行天橋及人行地下道之出入口為斜坡式坡道者，其坡度不得大於百分之十二。」  
「無障礙通行空間設置坡道者，坡道斜率不得大於一比十二。」藉以複習坡度的概念與計算。
2. 讓學生可以利用方格紙繪製「坡面與水平面夾角 12 度」的直角三角形。

第(1)題參考解答：

可以讓學生利用方格紙繪製「坡面與水平面夾角 12 度」，再計算坡度。  
再和「坡度 12%」、「坡道斜率 1 : 12」比較。



「坡面與水平面夾角 12 度」：坡度約 21%

「坡度 12%」：坡度即為 12%

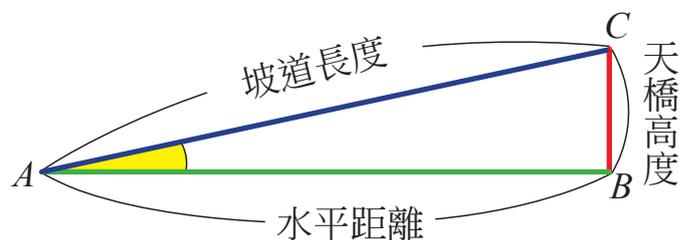
「坡道斜率 1 : 12」：坡度約 8%

$21\% > 12\% > 8\%$

所以「坡面與水平面夾角 12 度」比較陡。

答：坡面與水平面夾角 12 度比較陡。

(2) 學校外面規劃人行天橋的設置，天橋高度 3 公尺，若依內政部法規，需要預備多長的水平距離來建置斜坡式坡道(坡道坡 12%)。(四捨五入到小數點後第 2 位)



假設水平距離為  $x$  公尺，坡度是 12%。

$$\frac{3}{x} = \frac{12}{100}$$

$$x = 25$$

即水平距離 25 公尺。

再假設坡道長度為  $y$  公尺，利用畢氏定理得

$$y^2 = 25^2 + 3^2$$

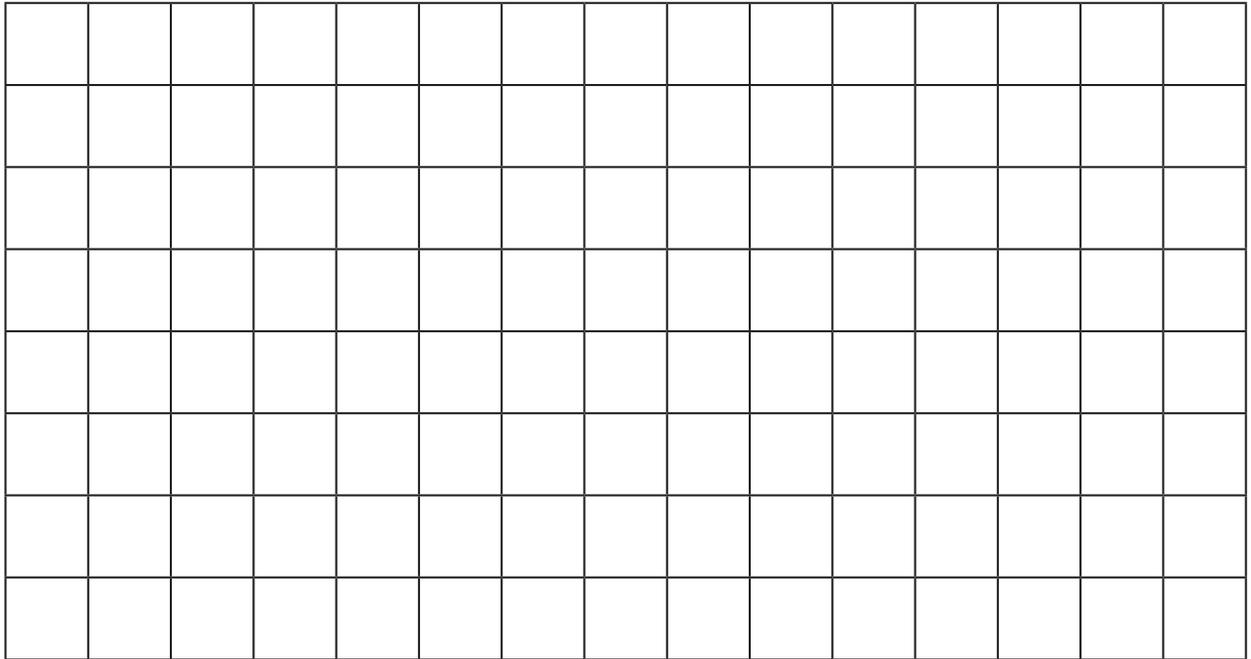
$$y^2 = 634$$

$$y = \sqrt{634} = 25.18 \text{ (公尺)}$$

答：預留的坡道長度為 25.18 公尺。



- 2 請畫一個直角三角形在下方的方格紙上。將你指定的銳角  $\angle A$  的度數及各邊的長度測量出來。



- (1) 請計算  $\tan A$  的值。(四捨五入到小數點後第 2 位)

略

- (2) 請計算  $\sin A$  的值。(四捨五入到小數點後第 2 位)

略

- (3) 請計算  $\cos A$  的值。(四捨五入到小數點後第 2 位)

略

■ 素養評量二

設計想法：

1. 讓學生自己利用量角器，在方格紙上畫一個指定的銳角  $\angle A$  度數  
（正整數介於  $1^\circ \sim 89^\circ$  間）的直角三角形，並將各邊的長度測量出來。
2. 除評量學生對於  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  值的計算外，由於每個孩子取的角度不同，直角三角比的比值也不同，整理起來可以看到一個簡易的直角三角比參考表。

參考解答

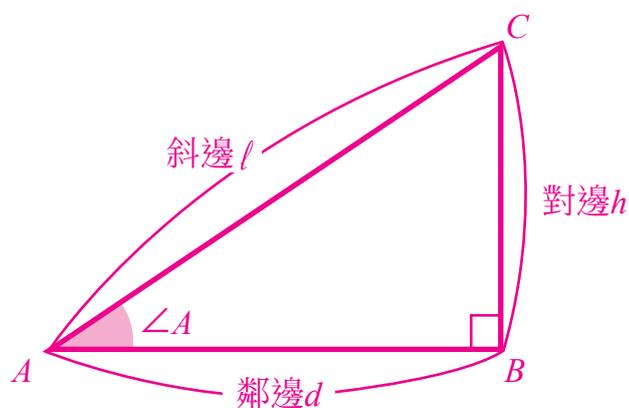
讓學生利用量角器在方格紙繪製直角三角形，並測量三個邊的長度。

利用以下三角比的關係式計算比值。

$$\tan A = \frac{h}{d} = \frac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}},$$

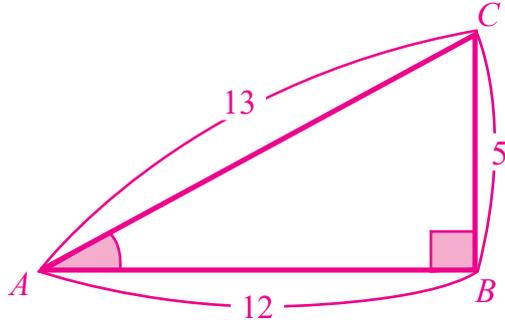
$$\sin A = \frac{h}{l} = \frac{\text{對邊}}{\text{斜邊}},$$

$$\cos A = \frac{d}{l} = \frac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}.$$



- 3 一直角三角形  $ABC$  中，設  $\overline{AC} = 13$ ， $\overline{AB} = 12$ ， $\overline{BC} = 5$ ，試求  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  的值。（可以畫出三角形，須確定斜邊與直角位置）

可以畫出三角形，須確定斜邊與直角位置。



答： $\sin A = \frac{5}{13}$ ， $\cos A = \frac{12}{13}$ ， $\tan A = \frac{5}{12}$ 。

- 4 利用計算機，當  $\angle A = 70^\circ$  時， $\tan A$ 、 $\sin A$  與  $\cos A$  的值為何？（四捨五入到小數點後第 2 位）

答： $\tan 70^\circ = 2.75$ ， $\sin 70^\circ = 0.94$ ， $\cos 70^\circ = 0.34$ 。

■ 素養評量 3

設計想法：

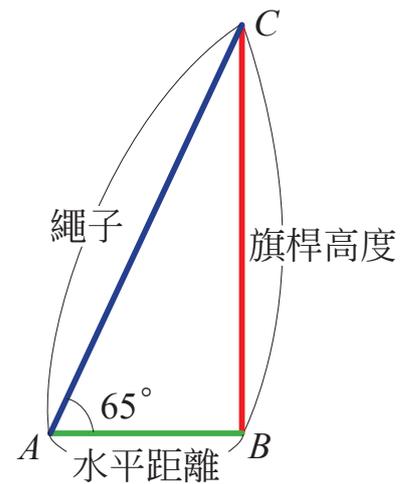
評量學生知道直角三角形的三個邊，計算  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  的值。

■ 素養評量 4

設計想法：

評量學生利用計算機求  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  的值。

- 5 如圖，旗桿頂垂下一條比旗桿長的繩子，小子將繩子一端拉住，往水平方向走了 10 公尺，拉直繩子，且繩子與地面的夾角為 65 度，求旗桿的高度與繩子的長度。（請利用計算機作答，並四捨五入到小數點後第 2 位）



水平距離為 10，假設旗桿高度為  $x$  公尺，

$$\frac{x}{10} = \tan 65^\circ$$

$$x = 10 \times \tan 65^\circ = 10 \times 2.14 = 21.4 \text{ (公尺)}$$

再假設繩子長度為  $y$  公尺，

$$\frac{10}{y} = \cos 65^\circ$$

$$y = 10 \div \cos 65^\circ = 10 \div 0.42 = 23.81 \text{ (公尺)}$$

答：旗桿高度為 21.4 公尺，繩子長度為 23.81 公尺。

■ 素養評量 5

設計想法：

評量學生利用計算機與  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  解決應用問題。

- 6 哈里發塔(阿拉伯語：خليفة برج，拉丁話：burj khalifah，英文：Burj Khalifa)，又譯哈利法塔，是位於阿拉伯聯合大公國首都杜拜境內的摩天大樓，為當前世界第一高樓與人工構造物，高度為 828 公尺，樓層總數 169 層。

政府欲在哈里發塔附近 5 公里內設置機場，且假設飛機離開跑道開始起飛時，維持 13 度，起飛點距離哈里發塔約 4000 公尺，這架飛機會不會直接撞到該建築物呢？ 答：不會撞到。

【解法一】

計算哈里發塔高度與水平距離的  $\tan A$  值，再跟  $\tan 13^\circ$  做比較。

$$\frac{828}{4000} = 0.207, \tan A \text{ 值低於 } \tan 13^\circ = 0.23, \text{ 所以不會撞到。$$

【解法二】

利用  $\tan 13^\circ$  計算水平距離 4000 公尺後，高度為多少？

$$\text{假設高度為 } x \text{ 公尺，} \frac{x}{4000} = \tan 13^\circ$$

$$x = 4000 \times \tan 13^\circ = 4000 \times 0.23 = 923.47 \text{ (公尺)，}$$

比哈里發塔高，所以不會撞到。



■ 素養評量 6

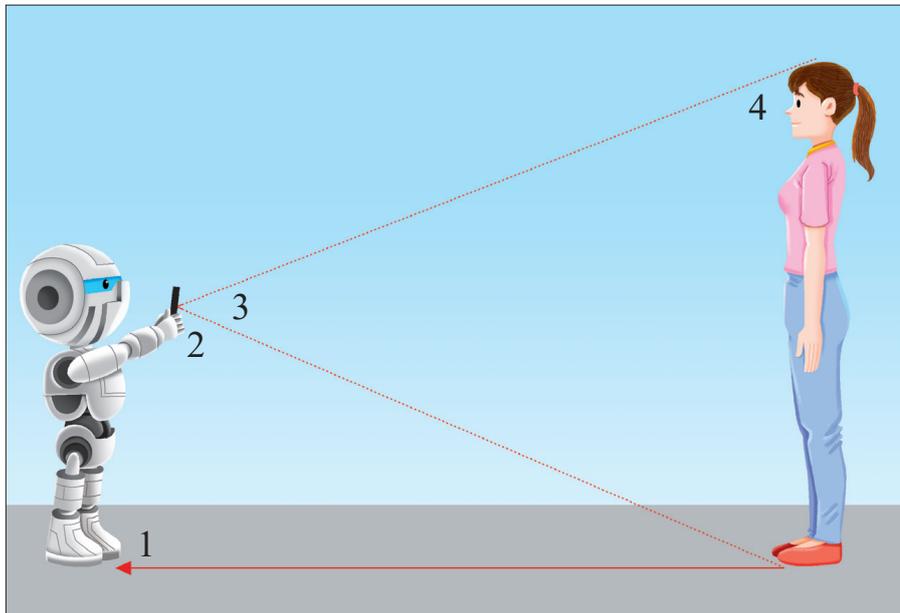
設計想法：

1. 本題參考民國 83 年版國編版教科書選修數學第六冊的問題，當年正要興建 101 大樓，離松山機場很近，因此引起很大的爭議。配合時間的變遷，改討論哈里發塔。
2. 評量學生利用計算機與  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan A$  解決應用問題。

- 7 有使用過手機中的 APP 軟體嗎？透過手中的智慧型手機再配合《Smart Measure》軟體，你也可以立即知道任何物件的大概高度。

【附註】除了 smart measure 之外，尚有 easy measure、Remote Height Meter(遠距高度測量儀)等各類 APP 程式具有相同的原理與功能，本教材僅利用其中一種詳細說明，教師或同學可視下載狀況、是否收費、軟體穩定性來決定採用哪些 APP 程式。

- (1) 使用此手機軟體，唯一需要輸入的數值是你手持手機時的高度，即大約將身高減去 30 公分。假定你使用手機測量自己與對面那位女生的距離，該軟體利用手機中內建的陀螺儀(方向感測器)，可用來測量鉛直、水平，或者是兩面(邊)之間的夾角。請在下圖中，指出該軟體需量出哪一個角度，即可以透過手持手機時的高度計算出你與該位女生的距離。



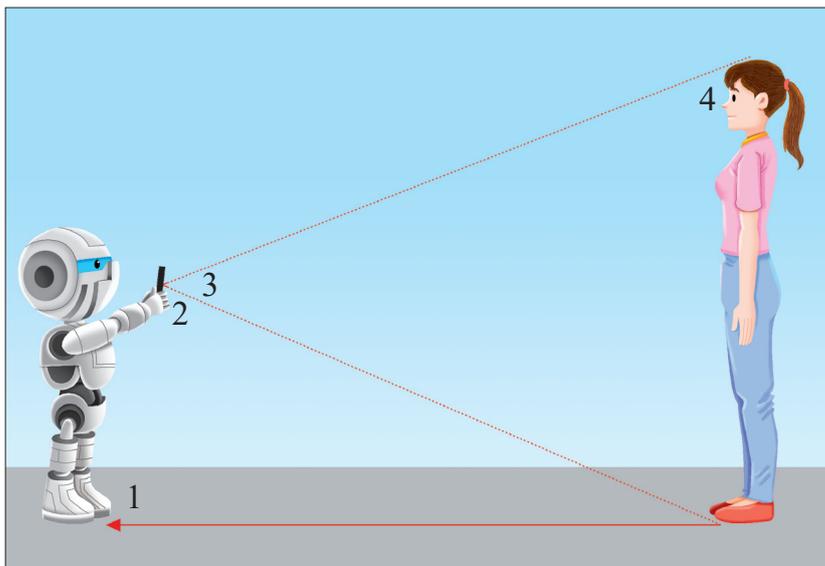
- (A)  $\angle 1$  (B)  $\angle 2$  (C)  $\angle 3$  (D)  $\angle 4$

(B)

■ 素養評量 7

設計想法：

1. 智慧型手機現在幾乎人手一台，因此介紹其中一個 APP 軟體《Smart Measure》，可以立即知道任何物件的大概高度。
2. 使用此手機軟體，唯一需要輸入的數值是你手持手機時的高度，即大約將身高減去 30 公分。
3. 假定你使用手機測量自己與對面那位美女的距離，該軟體利用手機中內建的陀螺儀（方向感測器），此可以用來測量鉛直、水平，或者是兩面（邊）之間的夾角。依下列步驟。
  - (1) 首先立正站定用手機向偵測物件的底部拍下一張照片，可以獲得測量物件與你的距離。
  - (2) 保持相同姿勢，再把手機相機鏡頭指向測量物件的最高點，然後按下【樹林鍵】，便可立即獲得此物件的高度。



4. 評量學生利用利用直角三角比的知識，來理解該 APP 軟體設計的想法。也可以利用外堂課讓學生操作練習該軟體的使用。

(2) **步驟 1** 首先立正站定用手機向偵測物件的底部拍下一張照片，可以獲得測量物件與你的距離。

**步驟 2** 保持相同姿勢，再把手機相機鏡頭指向測量物件的最高點，然後按下【樹林鍵】，便可立即獲得此物件的高度。

請依據上述此軟體的操作步驟，寫下或畫圖說他是如何利用手機測量的角度，得到該女生的身高。提供三種參考解法

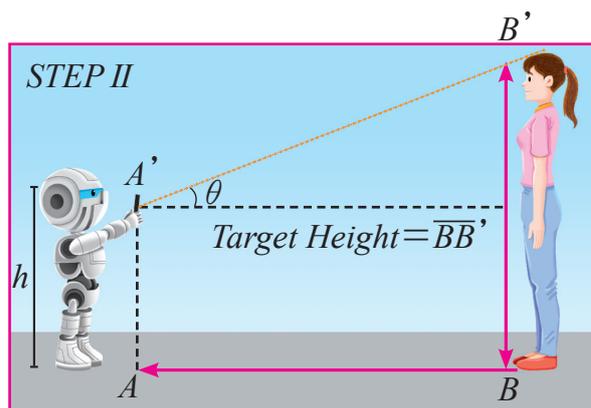
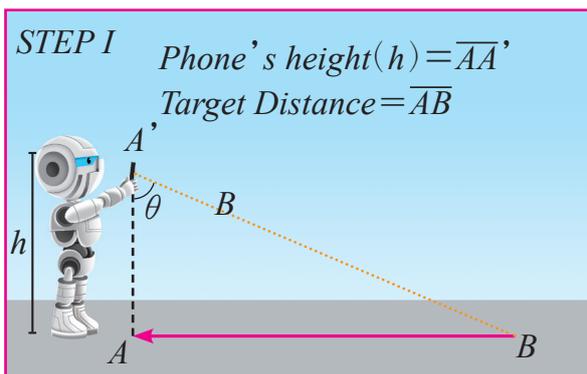
【解法一】文字說明

量測出 $\angle 2$ ，並利用手持高度 $\times \tan(\angle 2)$ 後得到距離，再量測出 $\angle 3$ ，利用 $\angle 2 + \angle 3 - 90$ 度，求得一個新角度 $\theta$ ，用距離乘以 $\tan \theta$ 再加上手持高度，即可以得到該女生的身高。

【解法二】數學算式說明

手持高度設為 $h$ 公尺， $h \times \tan(\angle 2) \times \tan(\angle 2 + \angle 3 - 90 \text{度}) + h$

【解法三】作圖說明



Phone's height( $h$ )  $\doteq$  your height - 0.3m (1ft)

(3)《Smart Measure》是一款手機軟體，並不是專業測量工具，根據實地測試，利用《Smart Measure》來量度家中的大門和圍牆高度頗準確，但當測量電腦螢幕時卻顯示有 1.2 公尺長，所以評估使用該軟體測量大型物件會有較佳的表現。請試著用數學理由說明為何測量大型物件會比小型物件有較佳的表現。

因為此軟體是依據測量的角度，來作三角函數的運算，大型物件夾角較大，若量測上角度的誤差不至於影響太大，但是小型物件原先改變的夾角就小，量測上的小誤差就會有顯著的影響。