宜蘭縣第十七屆蘭陽盃數學大賽活動

數學金頭腦複試題本

准考證號碼：___________________

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第十六屆蘭陽盃數學大賽的數學金頭腦複試題本題本採單面印刷，**共有 8 題填充題、 1 題計算題、 1 題證明題，合計 10 頁**。測驗時間**共 105 分鐘**。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

1. **請填入本試題本封面的准考證號碼資料。**
2. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。
3. 填充題可利用試題本中空白部分計算後，填入答案空格，批閱僅就答案空格內容處理。
4. 計算題及證明題請依題目敘述內容進行作答。
5. 不可故意污損試題本，否則不予計分。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

一、(填充題 10 分) 38021 與 88453 的最大公因數是 __________

*** 以下空白處可用作計算 ***

二、(填充題 10 分) 若有一個正四面體，它的稜邊長是 $2\sqrt{2}$，則此正四面體的外接球半徑 (即對稱中心到頂點的距離) 是 ＿＿＿＿＿

*** 以下空白處可用作計算 ***

三、(填充題 10 分) 費氏數列是以遞迴的方法來定義：

$$\begin{cases} a_0 & = & 0 \\ a_1 & = & 1 \\ a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

費氏數 a_{2024} 除以 5 的餘數是 ________

*** 以下空白處可用作計算 ***

四、(10 分) 令 M_1 是四次函數 $y=x^4+3x^2-1$ 的最小值，M_2 是四次函數 $y=x^4-3x^2+1$ 的最小值，則 $M_1-M_2=$ ________

*** 以下空白處可用作計算 ***

五、(填充題 10 分) 三角形 ABC 中，$\overline{AB}$ 線段長為 75，$\overline{AC}$ 線段長為 77。若已知三角形 ABC 的面積是 2310，則 $\overline{BC}$ 線段長為 ________

*** 以下空白處可用作計算 ***

六、(填充題 10 分) 平面上有 L_1、L_2、L_3 三條平行線，已知 L_1 與 L_2 的距離為 5，L_2 與 L_3 的距離為 2，L_1 與 L_3 的距離為 7，而且有一個正三角形其三個頂點分別在這三條平行線上，則此正三角形的邊長為 ________

*** 以下空白處可用作計算 ***

題組 (第七題與第八題)

進位制，又被稱為進制，是一種計數的方法。透過這種方式，我們可以用有限種數字符號表示所有的數值。一種進位制所使用的數字符號的數量被稱為該進位制的基數。若一個進位制的基數是 n，我們就稱它為 n 進位制，簡稱為 n 進制。目前最常見的進位制是十進制，使用 10 個阿拉伯數字（即 0 到 9）來進行計數。

一般而言，n 進制具有 n 個數字。如果 a_0 到 a_{d-1} 都是這 n 個數字中的某個，那麼我們就有：

$$a_{d-1}\ldots a_{0(n)} = \sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k$$

七、(填充題 10 分) 計算兩個 9 進制整數的乘積：

$54_{(9)} \times 87_{(9)} = \underline{\hspace{3cm}}_{(9)}$

*** 以下空白處可用作計算 ***

八、(填充題 10 分)n 進制的有限小數表示為：

$$a_{d-1}\ldots a_0.a_{-1}\ldots a_{-e(n)} = \sum_{k=-e}^{d-1} a_k n^k$$

$\frac{1}{7}$ 化成 10 進制循環小數等於 $0.\overline{142857}_{(10)}$；若將 $\frac{1}{7}$ 化成 9 進制循環小數表示，$\frac{1}{7}=$ __________ $_{(9)}$

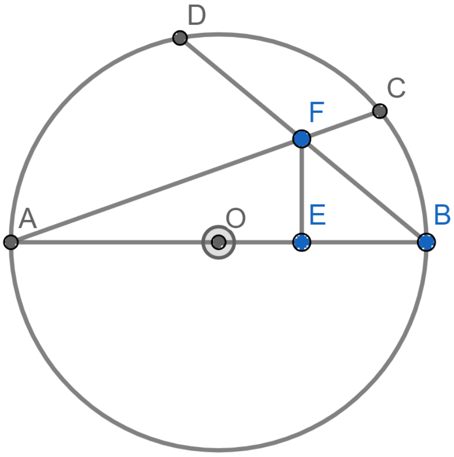
*** 以下空白處可用作計算 ***

九、(計算題 10 分) 直角三角形 ABC 中，角 A 是直角，$\overline{AB}$ 線段長為 3，$\overline{AC}$ 線段長為 4。在斜邊 $\overline{BC}$ 線段上有 D、E 兩點，使得三角形 ADE 為正三角形。求正三角形 ADE 的面積。

*** 須有計算過程只有答案不計分 ***

第九題計算題作答：

十、(證明題 10 分)(如圖) 圓心為 O，線段 $\overline{AB}$ 為直徑，C、D 為圓上兩點，線段 $\overline{AC}$ 與線段 $\overline{BD}$ 相交於點 F，線段 $\overline{EF}$ 與線段 $\overline{AB}$ 互相垂直，垂足為點 E，證明：O、E、C、D 四點共圓。



第十題證明題作答：

一、(填充題 10 分) 38021 與 88453 的最大公因數是 ＿＿＿＿＿

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：197

二、(填充題 10 分) 若有一個正四面體，它的稜邊長是 $2\sqrt{2}$，則此正四面體的外接球半徑 (即對稱中心到頂點的距離) 是 ________

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：$\sqrt{3}$

三、(填充題 10 分) 費氏數列是以遞迴的方法來定義：

$$\begin{cases} a_0 &= & 0 \\ a_1 &= & 1 \\ a_n &= & a_{n-1}+a_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

費氏數 a_{2024} 除以 5 的餘數是 ＿＿＿＿＿

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：3

四、(10 分) 令 M_1 是四次函數 $y = x^4 + 3x^2 - 1$ 的最小值，M_2 是四次函數 $y = x^4 - 3x^2 + 1$ 的最小值，則 $M_1 - M_2 =$ ________

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：$\frac{1}{4}$

五、(填充題 10 分) 三角形 ABC 中，AB 線段長為 75，AC 線段長為 77。若已知三角形 ABC 的面積是 2310，則 BC 線段長為 _________

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：68

六、(填充題 10 分) 平面上有 L_1、L_2、L_3 三條平行線，已知 L_1 與 L_2 的距離為 5，L_2 與 L_3 的距離為 2，L_1 與 L_3 的距離為 7，而且有一個正三角形其三個頂點分別在這三條平行線上，則此正三角形的邊長為 ________

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：$2\sqrt{13}$

題組 (第七題與第八題)

進位制，又被稱為進制，是一種計數的方法。透過這種方式，我們可以用有限種數字符號表示所有的數值。一種進位制所使用的數字符號的數量被稱為該進位制的基數。若一個進位制的基數是 n，我們就稱它為 n 進位制，簡稱為 n 進制。目前最常見的進位制是十進制，使用 10 個阿拉伯數字（即 0 到 9）來進行計數。

一般而言，n 進制具有 n 個數字。如果 a_0 到 a_{d-1} 都是這 n 個數字中的某個，那麼我們就有：

$$a_{d-1} \dots a_{0(n)} = \sum_{k=0}^{d-1} a_k n^k$$

七、(填充題 10 分) 計算兩個 9 進制整數的乘積：

$54_{(9)} \times 87_{(9)} = \underline{\hspace{3cm}}_{(9)}$

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：5271

八、(填充題 10 分)n 進制的小數表示為：

$$a_{d-1}\dots a_0.a_{-1}\dots a_{-e(n)} = \sum_{k=-e}^{d-1} a_k n^k$$

$\frac{1}{7}$ 化成 10 進制循環小數等於 $0.\overline{142857}_{(10)}$；若將 $\frac{1}{7}$ 化成 9 進制循環小數表示，$\frac{1}{7} = \underline{\hspace{3cm}}_{(9)}$

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：$0.\overline{125}$

九、(計算題 10 分) 直角三角形 ABC 中，角 A 是直角，$\overline{AB}$ 線段長為 3，$\overline{AC}$ 線段長為 4。在斜邊 $\overline{BC}$ 線段上有 D、E 兩點，使得三角形 ADE 為正三角形。求正三角形 ADE 的面積。

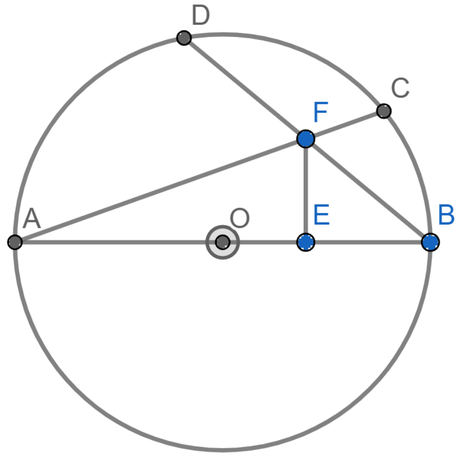
*** 須有計算過程只有答案不計分 ***

第九題計算題作答：

正三角形 ADE 在 DE 線段上的高就是直角三角形 ABC 在斜邊 BC 線段上的高 $= \frac{3\times4}{5} = \frac{12}{5}$，所以正三角形 ADE 的邊長 $= \frac{3\times4}{5} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$。

正三角形 ADE 的面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\frac{8\sqrt{3}}{5})^2 = \frac{48\sqrt{3}}{25}$。

十、(證明題 10 分)(如圖) 圓心為 O，線段 $\overline{AB}$ 為直徑，C、D 為圓上兩點，線段 $\overline{AC}$ 與線段 $\overline{BD}$ 相交於點 F，線段 $\overline{EF}$ 與線段 $\overline{AB}$ 互相垂直，垂足為點 E，證明：O、E、C、D 四點共圓。



第十題證明題作答：

圓周角相等，所以角 $CAD=$ 角 $CBD=\frac{1}{2}$ 角 COD。

半圓含直角，角 ACB 與角 ADB 為直角，線段 $\overline{EF}$ 與線段 $\overline{AB}$ 互相垂直，所以 B、C、F、E 四點共圓，A、D、F、E 四點共圓。

角 $FEC=$ 角 $CBF=$ 角 $CBD=$ 角 $CAD=$ 角 $FAD=$ 角 FED。

因此，角 $COD=$ 角 $CAD+$ 角 $CBD=$ 角 $FED+$ 角 $FEC=$ 角 CED，所以可得 O、E、C、D 四點共圓。