

宜蘭縣第十八屆蘭陽盃數學大賽活動

數學金頭腦複試題本

准考證號碼：_____

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第十八屆蘭陽盃數學大賽的數學金頭腦複試題本題本採單面印刷，共有 8 題填充題、1 題計算題、1 題證明題，合計 10 頁。測驗時間共 105 分鐘。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

1. 請填入本試題本封面的准考證號碼資料。
2. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。
3. 填充題可利用試題本中空白部分計算後，填入答案空格，批閱僅就答案空格內容處理。
4. 計算題及證明題請依題目敘述內容進行作答。
5. 不可故意污損試題本，否則不予計分。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

一、(填充題 10 分) 化簡 $\sqrt[3]{1263^3 + 1684^3 + 2105^3} =$ _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

二、(填充題 10 分) 若直角三角形三邊長都為正整數且其中一股的長為 31，
則此直角三角形的斜邊長是_____

*** 以下空白處可用作計算 ***

三、(填充題 10 分) $f(x) = 3x + 2$ ，數列 $\{a_n\}$ 是以遞迴的方法來定義：

$$\begin{cases} a_1 = f(1) \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

數列第 2025 項 (即 a_{2025}) 除以 80 的餘數是 _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

四、(填充題 10 分) 圓內接四邊形的四邊長依序為 1、13、13 和 11 單位長，則圓內接四邊形的面積是 _____ 平方單位

*** 以下空白處可用作計算 ***

五、(填充題 10 分) 若 n 、 $\frac{n+13}{2}$ 、 $\sqrt{13n}$ 和 $\frac{26n}{n+13}$ 四個數都是正整數，而且

$n > 13$ ，則正整數 $n =$ _____

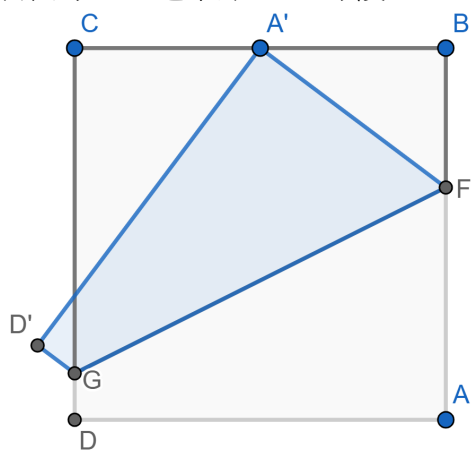
*** 以下空白處可用作計算 ***

六、(填充題 10 分) 多項式 $x^{16} + x + 1$ 除以多項式 $x^4 + x + 1$ 的餘式是

*** 以下空白處可用作計算 ***

題組 (第七題與第八題)

如圖， $ABCD$ 為邊長 200 單位長的正方形紙張，將紙張向上翻摺使得 A 點落到 BC 邊中點 A' ，線段 FG 為摺痕軌跡。

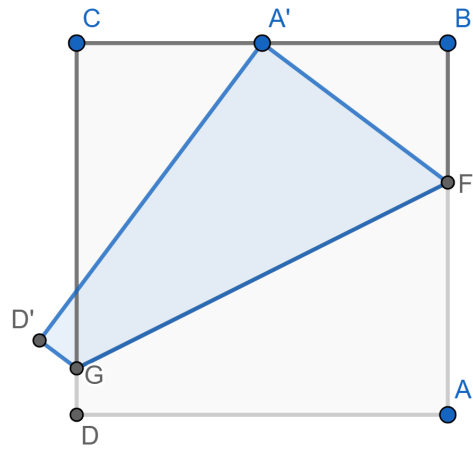


七、(填充題 10 分) 線段 FG 的長度是 _____ 單位長

*** 以下空白處可用作計算 ***

八、(填充題 10 分) 梯形 $AFGD$ 的面積是 _____ 平方單位

*** 以下空白處可用作計算 ***



$ABCD$ 邊長 200 單位長

九、(計算題 10 分) 費氏數列是以遞迴的方法來定義：

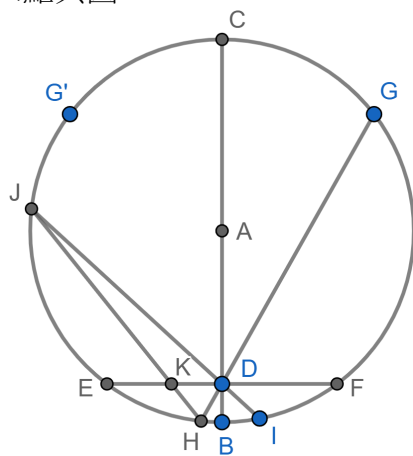
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

比較一個長方形和一個正方形的面積大小：已知長方形的長為 a_{100} ，寬為 a_{98} ；正方形的邊長為 a_{99} 。請問哪個圖形的面積較大？面積大多少？

*** 須有計算過程只有答案不計分 ***

第九題計算題作答：

十、(證明題 10 分) 如圖，圓心為 A ，線段 $\overline{BC}$ 為直徑，圓上四弦 $\overline{BC}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{GH}$ 和 $\overline{IJ}$ 相交於 D 點，且 D 點為 $\overline{EF}$ 的中點，線段 $\overline{EF}$ 與線段 $\overline{HJ}$ 相交於 K 點， G 點對直徑 $\overline{BC}$ 的鏡射點為點 G' ，證明： J 、 K 、 D 、 G' 四點共圓。



第十題證明題作答：

一、(填充題 10 分) 化簡 $\sqrt[3]{1263^3 + 1684^3 + 2105^3} =$ _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：2526

二、(填充題 10 分) 若直角三角形三邊長都為正整數且其中一股的長為 31，
則此直角三角形的斜邊長是_____

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：481

三、(填充題 10 分) $f(x) = 3x + 2$ ，數列 $\{a_n\}$ 是以遞迴的方法來定義：

$$\begin{cases} a_1 = f(1) \\ a_n = f(a_{n-1}) \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

數列第 2025 項 (即 a_{2025}) 除以 80 的餘數是 _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：5

四、(填充題 10 分) 圓內接四邊形的四邊長依序為 1、13、13 和 11 單位長，則圓內接四邊形的面積是 _____ 平方單位

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：72

五、(填充題 10 分) 若 n 、 $\frac{n+13}{2}$ 、 $\sqrt{13n}$ 和 $\frac{26n}{n+13}$ 四個數都是正整數，而且 $n > 13$ ，則正整數 $n =$ _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：325

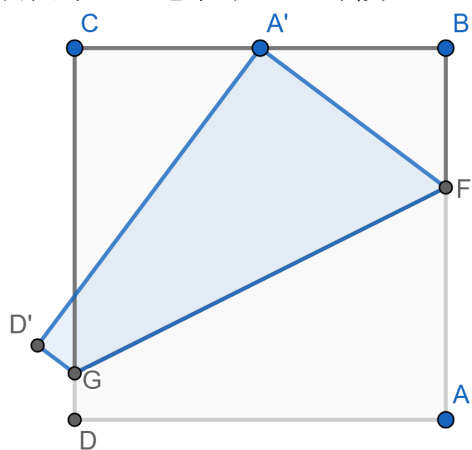
六、(填充題 10 分) 多項式 $x^{16} + x + 1$ 除以多項式 $x^4 + x + 1$ 的餘式是

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案： $4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

題組 (第七題與第八題)

如圖， $ABCD$ 為邊長 200 單位長的正方形紙張，將紙張向上翻摺使得 A 點落到 BC 邊中點 A' ，線段 FG 為摺痕軌跡。



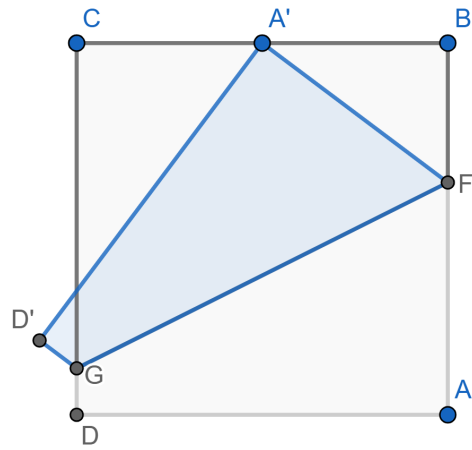
七、(填充題 10 分) 線段 FG 的長度是 _____ 單位長

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案： $100\sqrt{5}$

八、(填充題 10 分) 梯形 $AFGD$ 的面積是 _____ 平方單位

*** 以下空白處可用作計算 ***



$ABCD$ 邊長 200 單位長

答案：15000

九、(計算題 10 分) 費氏數列是以遞迴的方法來定義：

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

比較一個長方形和一個正方形的面積大小：已知長方形的長為 a_{100} ，寬為 a_{98} ；正方形的邊長為 a_{99} 。請問哪個圖形的面積較大？面積大多少？

*** 須有計算過程只有答案不計分 ***

第九題計算題作答：

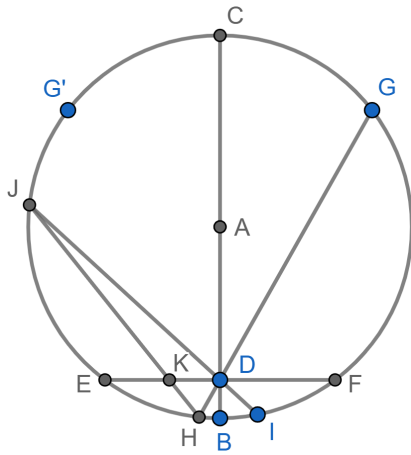
長方形與正方形的面積差： $a_{100}a_{98} - a_{99}^2$ 。

$$\begin{aligned} a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 &= (a_{n-1} + a_{n-2})a_{n-2} - a_{n-1}^2 \\ &= a_{n-2}^2 + a_{n-1}(a_{n-2} - a_{n-1}) \\ &= a_{n-2}^2 - a_{n-1}a_{n-3} \\ &= (-1)(a_{n-1}a_{n-3} - a_{n-2}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{100}a_{98} - a_{99}^2 &= (-1)(a_{99}a_{97} - a_{98}^2) \\ &= (-1)^2(a_{98}a_{96} - a_{97}^2) \\ &\vdots \\ &= (-1)^{97}(a_3a_1 - a_2^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

答案：正方形的面積較大，面積大 1 平方單位

十、(證明題 10 分) 如圖，圓心為 A ，線段 $\overline{BC}$ 為直徑，圓上四弦 $\overline{BC}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{GH}$ 和 $\overline{IJ}$ 相交於 D 點，且 D 點為 $\overline{EF}$ 的中點，線段 $\overline{EF}$ 與線段 $\overline{HJ}$ 相交於 K 點， G 點對直徑 $\overline{BC}$ 的鏡射點為點 G' ，證明： J 、 K 、 D 、 G' 四點共圓。



第十題證明題作答：

G 點對直徑 $\overline{BC}$ 的鏡射點為點 G' ， $\angle GDF = \angle G'DE = \angle G'DK$ 。

線段 $\overline{EF}$ 與線段 $\overline{GG'}$ 平行 (因為兩弦皆垂直於直徑 $\overline{BC}$)，

$$\angle GDF = \angle DGG' = \angle HGG'$$

所以， $\angle G'DK = \angle HGG'$ 。

J 、 H 、 G 、 G' 四點共圓，所以

$$\angle G'JH + \angle HGG' = 180^\circ$$

可得

$$\angle G'JK + \angle G'DK = \angle G'JH + \angle HGG' = 180^\circ$$

所以， J 、 K 、 D 、 G' 四點共圓，得證。