一、(填充題 10 分，每格 5 分) 坐標平面上四點分別為 $A(2,0)$、$B(3,0)$、$C(5,4)$、$D(0,4)$，若 P 是坐標平面上一個可移動的點，則

- 線段和 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$ 的最小值是 $\underline{\quad 10 \quad}$
- 線段平方和 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$ 的最小值是 $\underline{\quad 29 \quad}$

二、(填充題 10 分) 若將循環小數 $0.\overline{142857}$ 乘以 333333 會得到一個整數 n, 則整數 n 的正因數個數有 $\underline{\quad 24 \quad}$ 個。

三、(填充題 10 分) 假設電動腳踏車的速率每分鐘 400 公尺，步行的速率是每分鐘 80 公尺。父親與兄弟二人從家裡到學校，父親騎電動腳踏車載哥哥，弟弟步行，三人同時出發，途中父親放下哥哥，哥哥繼續步行前進，父親騎電動腳踏車回頭接到弟弟後繼續往學校前進，三人同時到達學校。哥哥從家裡到學校的平均速率是每分鐘 $\underline{\quad 200 \quad}$ 公尺

k 四、(10 分) 若 u,v 是二次方程式

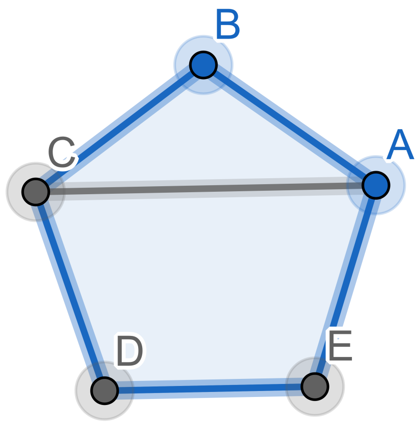
$$x^2-3x-3=0$$

的兩個實數根，則

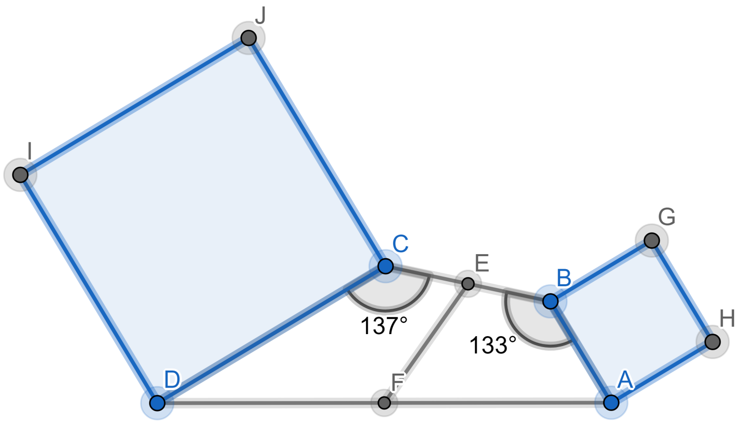
$$u^5+v^5=\underline{\quad 783 \quad}$$

五、(填充題 10 分)(如圖) 正五邊形的五個頂點依序為 A、B、C、D、E，正五邊形的對角線 $\overline{AC}$ 與邊長 $\overline{AB}$ 的比值我們稱之為黃金分割率，黃金分割率的數值大小為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。則下列比值

$$\frac{\text{正五邊形 } ABCDE \text{ 面積}}{\text{三角形 } ABC \text{ 面積}}=\underline{\quad \frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad}$$



六、(填充題 10 分)(如圖) 四邊形 $ABCD$ 中，角 ABC 是 133°，角 BCD 是 137°,E 是線段 $\overline{BC}$ 的中點，F 是線段 $\overline{AD}$ 的中點。若線段 $\overline{EF} = 4$ 單位長，則正方形 $ABGH$ 與正方形 $CDIJ$ 的面積和是 ___64___ 平方單



位

七、(填充題 10 分) a,b 是兩個實數且 $a > b > 0$，若以 a,b 的代數式來表達下列二次方程式

$$\frac{x^2+b^2}{a^2+b^2} = \frac{1+bx}{1+ab}$$

中 x 的兩根，則 x 的兩根中較小的根為 $\underline{\qquad \frac{b^3-a}{1+ab} \qquad}$

八、(填充題 10 分) m、n 是兩個正整數且 $m > n > 0$，若同時要求同時要求 m、n 的算術平均 $\frac{m+n}{2}$、幾何平均 $\sqrt{mn}$、調和平均 $\frac{2mn}{m+n}$ 也都是正整數，則 m 的最小可能整數值是 $\underline{\qquad 40 \qquad}$

九、(計算題 10 分) 資優班的諸葛老師在上課時跟同學們說：任給我們一個多項式 $P(x)$, 將正整數 1、2、...、n 代入多項式 $P(x)$，多項式函數值的和

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(n)$$

會是 n 的一個多項式函數 $Q(n)$;

例如我們學過的等差級數和公式

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

可看成使 $P(x) = x$ 與 $Q(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ 的一個特例。將來同學還會學到的平方和級數公式與立方和級數公式

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

都可以看成是這個數學性質的特例。

接著，諸葛老師要同學們作計算：若是我們知道四次方級數和可寫成下列公式

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(an^2+bn+c)}{30}$$

則 a、b、c 分別是多少？諸葛老師的學生都很快推敲出了答案。

若由你來回答諸葛老師的考題，你會如何求 a、b、c 之值？

*** 須有計算過程只有答案不計分 ***

第九題計算題作答：

$n = 1, 2, 3$ 代入級數和公式得到 a, b, c 的三元一次聯立方程組

$$\begin{cases} a+b+c &= 5 \\ 4a+2b+c &= 17 \\ 9a+3b+c &= 35 \end{cases}$$

解聯立方程組得

$$\begin{cases} a &= 3 \\ b &= 3 \\ c &= -1 \end{cases}$$

配分原則建議：方程組三條方程式中，每條正確的方程式得兩分，共得六分，答案完全正確再得四分

十、(作圖題 10 分) 任給三條平行線，作一個正三角形使得其三個頂點分別在這三條平行線上。

第十題作圖題作答 (須描述作圖過程)：

做法一

為求方便描述作圖過程，我們可假設 3 條平行線是水平的。在中間的平行線上取一點 P，然後從點 P 向右上、右下兩側各做 60° 射線交上下兩平行線於 A、B 兩點，以 A 為圓心，AB 線段長為半徑做圓，交中間平行線於 C 點，並要求 P 與 C 點是在直線 AB 的兩側，則三角形 ABC 即為所求。

做法二

為求方便描述作圖過程，我們可假設 3 條平行線是水平的。在中間的平行線上取一點 A，在 A 點的右下方區域的下方平行線上取兩點，分別稱為 B_1、B_2，然後以逆時針方向分別做做出正三角形 AB_1C_1 以及正三角形 AB_2C_2，做直線 C_1C_2 交上方平行線於 C 點，以 C 點為圓心，AC 線段長度為半徑做圓，交下方平行線於 B 點，則三角形 ABC 即為所求。

配分原則建議：描述做法並做出正三角形即可得滿分。