

宜蘭縣第十四屆蘭陽盃數學大賽活動

數學金頭腦複試題本

准考證號碼：_____

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第十四屆蘭陽盃數學大賽的數學金頭腦複試題本題本採單面印刷，共有 8 題填充題、1 題計算題、1 題作圖題，合計 11 頁。測驗時間共 105 分鐘。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

1. 請填入本試題本封面的准考證號碼資料。
2. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。
3. 填充題可利用試題本中空白部分計算後，填入答案空格，批閱僅就答案空格內容處理。
4. 計算題及作圖題請依題目敘述內容進行作答。
5. 不可故意污損試題本，否則不予計分。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

一、(填充題 10 分，每格 5 分) 坐標平面上四點分別為 $A(2, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 、 $C(5, 4)$ 、 $D(0, 4)$ ，若 P 是坐標平面上一個可移動的點，則

- 線段和 $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 的最小值是 _____
- 線段平方和 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ 的最小值是 _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

二、(填充題 10 分) 若將循環小數 $0.\overline{142857}$ 乘以 333333 會得到一個整數 n , 則整數 n 的正因數個數有 _____ 個。

*** 以下空白處可用作計算 ***

三、(填充題 10 分) 假設電動腳踏車的速率每分鐘 400 公尺，步行的速率是每分鐘 80 公尺。父親與兄弟二人從家裡到學校，父親騎電動腳踏車載哥哥，弟弟步行，三人同時出發，途中父親放下哥哥，哥哥繼續步行前進，父親騎電動腳踏車回頭接到弟弟後繼續往學校前進，三人同時到達學校。哥哥從家裡到學校的平均速率是每分鐘 _____ 公尺

*** 以下空白處可用作計算 ***

四、(10 分) 若 u, v 是二次方程式

$$x^2 - 3x - 3 = 0$$

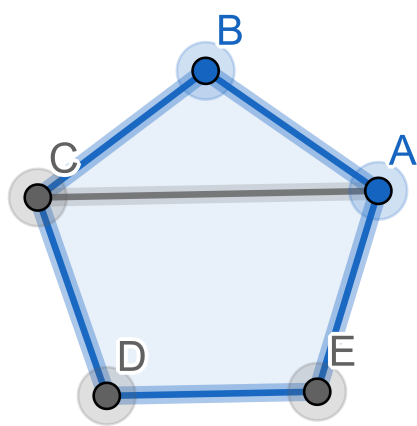
的兩個實數根，則

$$u^5 + v^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

*** 以下空白處可用作計算 ***

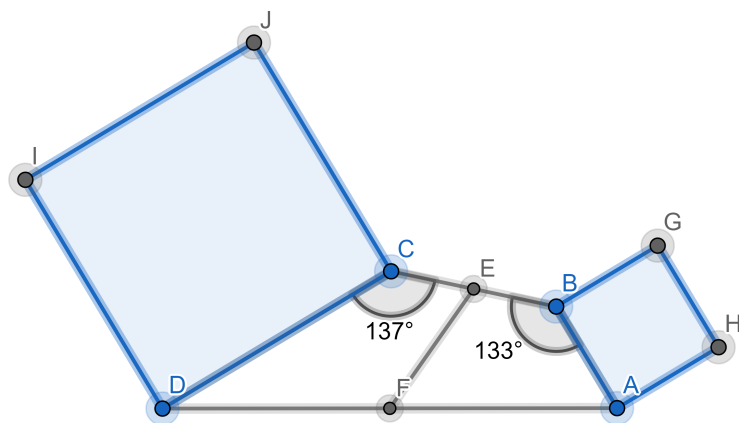
五、(填充題 10 分)(如圖) 正五邊形的五個頂點依序為 A 、 B 、 C 、 D 、 E ，
正五邊形的對角線 \overline{AC} 與邊長 \overline{AB} 的比值我們稱之為黃金分割率，黃金分
割率的數值大小為 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 。則下列比值

$$\frac{\text{正五邊形 } ABCDE \text{ 面積}}{\text{三角形 } ABC \text{ 面積}} = \underline{\hspace{2cm}}$$



*** 以下空白處可用作計算 ***

六、(填充題 10 分)(如圖) 四邊形 $ABCD$ 中，角 ABC 是 133° ，角 BCD 是 137° ， E 是線段 \overline{BC} 的中點， F 是線段 \overline{AD} 的中點。若線段 $\overline{EF} = 4$ 單位長，則正方形 $ABGH$ 與正方形 $CDIJ$ 的面積和是 _____ 平方單位



*** 以下空白處可用作計算 ***

七、(填充題 10 分) a, b 是兩個實數且 $a > b > 0$ ，若以 a, b 的代數式來表達下列二次方程式

$$\frac{x^2 + b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 + bx}{1 + ab}$$

中 x 的兩根，則 x 的兩根中較小的根為 _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

八、(填充題 10 分) m 、 n 是兩個正整數且 $m > n > 0$ ，若同時要求 m 、 n 的算術平均 $\frac{m+n}{2}$ 、幾何平均 \sqrt{mn} 、調和平均 $\frac{2mn}{m+n}$ 也都是正整數，則 m 的最小可能整數值是 _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

九、(計算題 10 分) 資優班的諸葛老師在上課時跟同學們說：任給我們一個多項式 $P(x)$, 將正整數 $1、2、\dots、n$ 代入多項式 $P(x)$ ，多項式函數值的和

$$P(1) + P(2) + \dots + P(n)$$

會是 n 的一個多項式函數 $Q(n)$;

例如我們學過的等差級數和公式

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

可看成使 $P(x) = x$ 與 $Q(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ 的一個特例。將來同學還會學到的平方和級數公式與立方和級數公式

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

都可以看成是這個數學性質的特例。

接著，諸葛老師要同學們作計算：若是我們知道四次方級數和可寫成下列公式

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(an^2 + bn + c)}{30}$$

則 $a、b、c$ 分別是多少？諸葛老師的學生都很快推敲出了答案。

若由你來回答諸葛老師的考題，你會如何求 $a、b、c$ 之值？

*** 請在下一頁作答計算過程與答案 ***

*** 須有計算過程只有答案不計分 ***

第九題計算題作答：

十、(作圖題 10 分) 任給三條平行線，作一個正三角形使得其三個頂點分別在這三條平行線上。

第十題作圖題作答 (須描述作圖過程)：