

宜蘭縣第十六屆蘭陽盃數學大賽活動

數學金頭腦複試題本

准考證號碼：_____

請不要翻到次頁！
讀完本頁的說明，聽從監試人員的指示才開始作答！

請閱讀以下測驗作答說明：

測驗說明：

這是宜蘭縣第十六屆蘭陽盃數學大賽的數學金頭腦複試題本題本採單面印刷，共有 8 題填充題、1 題證明題、1 題計算題，合計 11 頁。測驗時間共 105 分鐘。作答開始與結束請聽從監試人員的指示。

注意事項：

1. 請填入本試題本封面的准考證號碼資料。
2. 試題中參考的附圖，不一定代表實際大小。
3. 填充題可利用試題本中空白部分計算後，填入答案空格，批閱僅就答案空格內容處理。
4. 計算題及證明題請依題目敘述內容進行作答。
5. 不可故意污損試題本，否則不予計分。

請聽到鈴（鐘）響聲後才翻頁作答

一、(填充題 10 分) 正立方體有八個頂點，頂點兩兩一組可連成四條通過立方體中心的對角線。邊長為 1 的正立方體稱之為單位正立方體， n^3 個單位正立方體可堆疊成一個邊長為 n 的正立方體。若已知堆疊而成的邊長為 m 的正立方體的四條對角線會通過 800 個單位正立方體，則邊長為 $m - 1$ 的正立方體的四條對角線會通過_____ 個單位正立方體

*** 以下空白處可用作計算 ***

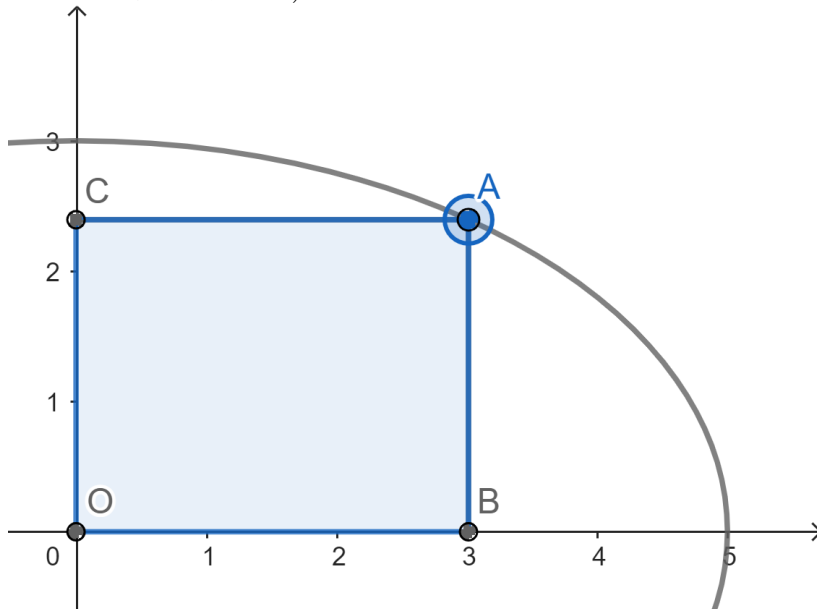
二、(填充題 10 分) 以十進位小數表示 $\sqrt{\frac{13}{2} + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

*** 以下空白處可用作計算 ***

三、(填充題 10 分)(如圖) 坐標平面上第一象限中有一 A 點在橢圓弧上移動，橢圓的方程式是

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

利用兩條坐標軸、過 A 點的鉛直線段 \overline{AB} 與過 A 點的水平線段 \overline{AC} 圍出一個矩形 $OBAC$ ，則矩形 $OBAC$ 面積的最大值是 _____ 平方單位
(答案以十進位小數表示)



*** 以下空白處可用作計算 ***

四、(填充題 10 分) 正整數 n 的階乘是指所有小於等於該數的正整數的乘積，通常用 $n!$ 表示。例如，5 的階乘表示為 $5!$ ，其值為 120：

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

以整數的帶餘除法計算， $20!$ 除以 7^3 的餘數是_____

*** 以下空白處可用作計算 ***

五、(填充題 10 分) 有肺類蝸牛是雌雄同體的。有四隻白玉蝸牛陷入了四角戀：第一隻白玉蝸牛喜歡第二隻，第二隻喜歡第三隻，第三隻喜歡第四隻，第四隻又喜歡第一隻，四隻白玉蝸牛經常在一起糾纏不清。將四隻白玉蝸牛以逆時針方向依序放在一個邊長為 100 公分的正方形的四個頂點上。四隻白玉蝸牛以每分鐘 30 公分的相同速度向喜歡的白玉蝸牛爬去，當牠們從頂點出發到最終聚集在正方形中心，白玉蝸牛爬行出了一條曲線軌跡，每隻白玉蝸牛的爬行時間是_____ 秒。(白玉蝸牛的大小忽略不計)

*** 以下空白處可用作計算 ***

六、(填充題 10 分) 以坐標原點 O 為圓心的單位圓上有 A 和 B 兩點，其坐標分別為 $A = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ 和 $B = (\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ ；過 A 點的單位圓切線與過 B 點的單位圓切線相交於 C 點，則四邊形 $OACB$ 的面積是_____ 平方單位。(答案以最簡分數表示)

*** 以下空白處可用作計算 ***

題組 (第七題與第八題)

已知 α 、 β 兩數滿足

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 6 \end{cases}$$

令

$$I_n = \alpha^n + \beta^n$$

則

$$\begin{cases} I_1 = 2 \\ I_2 = 6 \end{cases}$$

七、(填充題 10 分) 求 $I_7 =$ _____。

*** 以下空白處可用作計算 ***

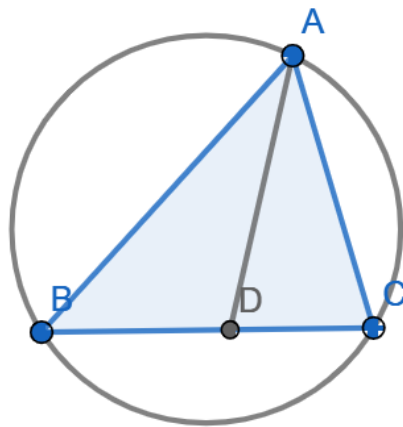
八、(填充題 10 分) I_{14} 與 I_{13} 的最大公因數是 _____

*** 以下空白處可用作計算 ***

題組 (第九題與第十題)

計算與證明題需寫出計算與證明過程，過程不明或理由不足將酌予扣分或不給分。

九、(證明題 10 分) (如圖) 若在任意三角形 ABC 中， \overline{AD} 為 $\angle A$ 的角平分線，證明 $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC} - \overline{BD} \times \overline{CD}$ 。



*** 以下請作答證明過程 (下一空白頁可繼續作答本題) ***

*** 第九題續答頁面 ***

十、(計算題 10 分) 給定三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB} = 5$ 單位長、 $\overline{AC} = 4$ 單位長、 $\overline{BC} = 6$ 單位長，已知 \overline{AD} 為 $\angle A$ 的角平分線，求 \overline{AD} 的長度是多少？

第十題計算題作答：

一、(填充題 10 分) 正立方體有八個頂點，頂點兩兩一組可連成四條通過立方體中心的對角線。邊長為 1 的正立方體稱之為單位正立方體， n^3 個單位正立方體可堆疊成一個邊長為 n 的正立方體。若已知堆疊而成的邊長為 m 的正立方體的四條對角線會通過 800 個單位正立方體，則邊長為 $m - 1$ 的正立方體的四條對角線會通過_____ 個單位正立方體

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：793

二、(填充題 10 分) 以十進位小數表示 $\sqrt{\frac{13}{2} + (\frac{1}{20})^2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

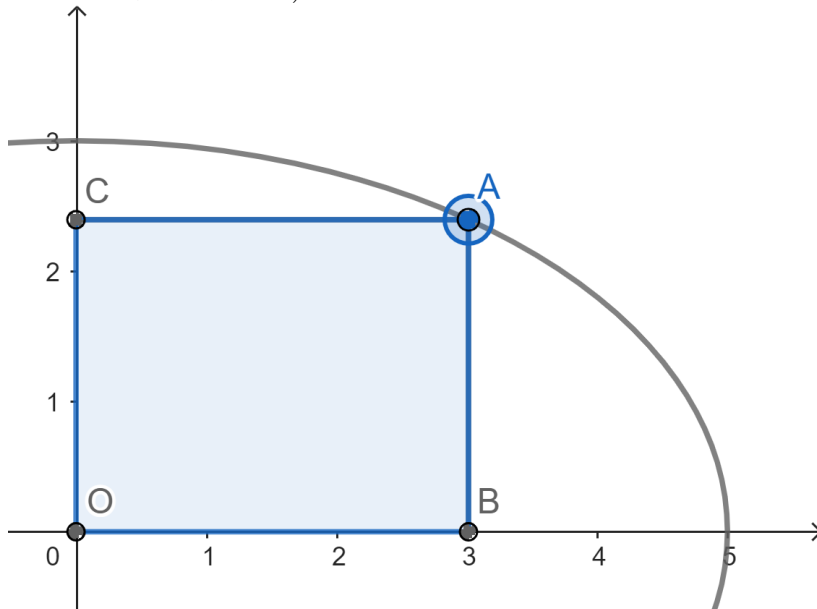
*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：2.55

三、(填充題 10 分)(如圖) 坐標平面上第一象限中有一 A 點在橢圓弧上移動，橢圓的方程式是

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1,$$

利用兩條坐標軸、過 A 點的鉛直線段 \overline{AB} 與過 A 點的水平線段 \overline{AC} 圍出一個矩形 $OBAC$ ，則矩形 $OBAC$ 面積的最大值是 _____ 平方單位
(答案以十進位小數表示)



*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：7.5

四、(填充題 10 分) 正整數 n 的階乘是指所有小於等於該數的正整數的乘積，通常用 $n!$ 表示。例如，5 的階乘表示為 $5!$ ，其值為 120：

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

以整數的帶餘除法計算， $20!$ 除以 7^3 的餘數是_____

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：245

五、(填充題 10 分) 有肺類蝸牛是雌雄同體的。有四隻白玉蝸牛陷入了四角戀：第一隻白玉蝸牛喜歡第二隻，第二隻喜歡第三隻，第三隻喜歡第四隻，第四隻又喜歡第一隻，四隻白玉蝸牛經常在一起糾纏不清。將四隻白玉蝸牛以逆時針方向依序放在一個邊長為 100 公分的正方形的四個頂點上。四隻白玉蝸牛以每分鐘 30 公分的相同速度向喜歡的白玉蝸牛爬去，當牠們從頂點出發到最終聚集在正方形中心，白玉蝸牛爬行出了一條曲線軌跡，每隻白玉蝸牛的爬行時間是_____ 秒。(白玉蝸牛的大小忽略不計)

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：200

六、(填充題 10 分) 以坐標原點 O 為圓心的單位圓上有 A 和 B 兩點，其坐標分別為 $A = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ 和 $B = (\frac{7}{25}, \frac{24}{25})$ ；過 A 點的單位圓切線與過 B 點的單位圓切線相交於 C 點，則四邊形 $OACB$ 的面積是_____ 平方單位。(答案以最簡分數表示)

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案： $\frac{1}{3}$

題組 (第七題與第八題)

已知 α 、 β 兩數滿足

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 6 \end{cases}$$

令

$$I_n = \alpha^n + \beta^n$$

則

$$\begin{cases} I_1 = 2 \\ I_2 = 6 \end{cases}$$

七、(填充題 10 分) 求 $I_7 =$ _____。

*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：478

八、(填充題 10 分) I_{14} 與 I_{13} 的最大公因數是 _____

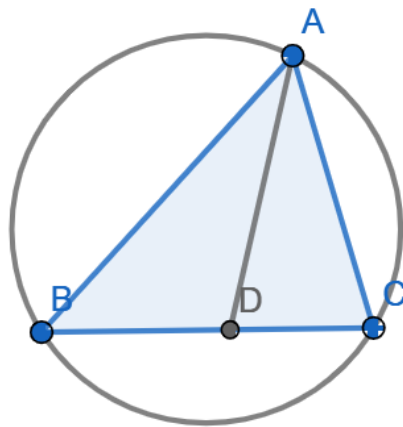
*** 以下空白處可用作計算 ***

答案：2

題組 (第九題與第十題)

計算與證明題需寫出計算與證明過程，過程不明或理由不足將酌予扣分或不給分。

九、(證明題 10 分) (如圖) 若在任意三角形 ABC 中， \overline{AD} 為 $\angle A$ 的角平分線，證明 $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC} - \overline{BD} \times \overline{CD}$ 。



*** 以下請作答證明過程 (下一空白頁可繼續作答本題) ***

作射線 \overrightarrow{AD} 交外接圓於 E 點， \overline{AD} 為 $\angle A$ 的平分線，則 $\angle BAE = \angle DAC$ 。圓周角 $\angle BEA = \angle DCA$ ，所以三角形 BAE 與三角形 DAC 為相似三角形。

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD} \times \overline{AE} = \overline{AD}^2 + \overline{AD} \times \overline{DE}$$

由圓幂性質可得

$$\overline{AD} \times \overline{DE} = \overline{BD} \times \overline{CD}$$

所以

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AD}^2 + \overline{BD} \times \overline{CD}$$

移項後即得證。

*** 第九題續答頁面 ***

十、(計算題 10 分) 給定三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB} = 5$ 單位長、 $\overline{AC} = 4$ 單位長、 $\overline{BC} = 6$ 單位長，已知 \overline{AD} 為 $\angle A$ 的角平分線，求 \overline{AD} 的長度是多少？

第十題計算題作答：

\overline{AD} 為 $\angle A$ 的平分線，所以

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{4}$$

由於

$$\overline{BD} + \overline{CD} = \overline{BC} = 6$$

我們可得

$$\begin{cases} \overline{BD} = \frac{10}{3} \\ \overline{CD} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

根據第九題可得

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC} - \overline{BD} \times \overline{CD} = 5 \times 4 - \frac{10}{3} \times \frac{8}{3} = \frac{100}{9}$$

所以 \overline{AD} 的長度是 $\frac{10}{3}$ 單位長。